

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXXII

1935 (XIII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1935 (XIII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 gennaio 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. O. M. CORBINO.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria algebrica). — *Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

1. L'ulteriore sviluppo della teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica F , mi ha ora condotto a stabilire un altro fatto, che mi sembra molto importante.

Ho di recente ricordato in questi « Rendiconti » (seduta 4 novembre u. s.) che una serie di equivalenza su F si definisce nel modo più opportuno, luminoso ed elegante e tale da porre *a priori* in evidenza il carattere invariante per trasformazioni birazionali, come una serie ottenibile per somma e sottrazione da un numero finito di *serie elementari*. Chiamo così (altre volte le ho chiamate, con frase più ingombrante, serie intersezioni complete) le serie formate dai gruppi di livello delle coppie di funzioni razionali (indipendenti) del punto di F .

In particolare può trattarsi di una serie di *equivalenza curvilinea* (che riducesi ad una serie lineare, se la curva è irriducibile) o di un sol gruppo di punti. Nel primo caso i gruppi della serie elementare li ho chiamati *semifissi* (in quanto variano sopra un ente in cui c'è un solo grado di libertà, invece di 2); nel secondo caso si ha un gruppo *fisso*.

Ho anche detto (loc. cit.) che le serie di equivalenza vengono *caratterizzate* dalla proprietà di esser contenute totalmente in serie razionali di gruppi effettivi o virtuali della superficie.

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1935.

Resta la questione di sapere come si costruiscono in concreto le serie di equivalenza sopra un modello proiettivo della superficie. Per le serie lineari sopra una curva o pei sistemi lineari di V_{k-1} sopra una M_k , la costruzione proiettiva discende subito dalla definizione invariante che li considera come insiemi di varietà di livello delle singole funzioni razionali del punto dell'ente. Per le serie di equivalenza sopra F la costruzione proiettiva è fornita dal teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di gruppi di punti sulla superficie F di S_r , sia di equivalenza, è che i suoi gruppi possano esser costruiti per intersezione di F con una varietà algebrica VIRTUALE M_{r-2} , variabile con continuità, fuori di un gruppo virtuale di punti fissi.

Si potrebbe aggiungere: «e di un gruppo virtuale semifisso»; ma, come si vedrà tosto, quest'aggiunta è inutile.

Il suddetto teorema è implicito ne' miei precedenti lavori ed anzi mi ha fornito, in uno di essi, una delle possibili definizioni delle serie di equivalenza. Sarà tuttavia bene di ripeter qui le argomentazioni che lo fanno derivare da quella che apparisce ormai come la definizione più opportuna.

Mi riferisco per semplicità di discorso al caso $r = 3$. Una serie elementare, in conseguenza della sua definizione, è segata su F da un sistema continuo di curve sghembe, fuori di un gruppo effettivo fisso, da cui si voglia fare astrazione. Ciò, anche se si tratta di una serie di gruppi semifissi o di un sol gruppo.

La somma di più serie elementari è segata (fuori di punti fissi eventuali) dal sistema continuo somma di quelli che segano le date serie elementari; ossia ancora da un sistema continuo di curve sghembe.

Ciò posto, la data serie di equivalenza σ sarà, in base alla definizione, del tipo $\sigma = \Sigma\sigma_i - \Sigma\tau_i$, ove σ_i, τ_i son serie elementari. La serie $\Sigma\sigma_i$ è tagliata, su F , fuori di un gruppo fisso a , da un sistema continuo di curve sghembe A ; e la serie $\Sigma\tau_i$ è tagliata, fuori di un gruppo fisso b , da un sistema continuo di curve sghembe B . Onde σ è tagliata dalla curva virtuale variabile $A - B$, fuori del gruppo fisso virtuale $a - b$. Questo significa, in altre parole, che, dato un gruppo G variabile in σ , esiste una curva A segante F in G , nel gruppo fisso a ed in un gruppo ulteriore L , pel quale passa una B , che sega altrove F in b . In simboli:

$$(A, F) = a + G + L, (B, F) = b + L, (A - B, F) = G + a - b.$$

La reciproca si dimostra (come ho fatto in precedenti lavori) tenuto conto che una curva sghemba effettiva Γ , proiettata da un generico punto O , dà luogo ad una rappresentazione monoidale minima, individuata da Γ ; e che, mercè tale rappresentazione, Γ risulta differenza di due curve intersezioni complete; sicchè la serie segata dalla Γ variabile risulta differenza delle due serie elementari segate da queste ultime curve.

2. Nelle applicazioni che ho fatto delle serie di equivalenza alla teoria delle corrispondenze fra superficie, ho considerato con particolare attenzione le serie di equivalenza segate su F da curve sghembe *effettive*. Quale grado di generalità hanno queste serie? Orbene, il risultato importante e inaspettato, cui facevo allusione in principio, è che queste serie comprendono *tutte* le serie di equivalenza. Si ha cioè il teorema molto più significativo del precedente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di gruppi G di punti sopra una superficie F di S_r , sia di equivalenza, è che i gruppi G possano esser segati da una varietà algebrica EFFETTIVA M_{r-2} , mobile con continuità, fuori di un gruppo effettivo fisso e di un gruppo effettivo semifisso sopra una conveniente curva IRRIDUCIBILE di F .

La dimostrazione della necessità della condizione (la sufficienza risulta senz'altro da quanto precede) è laboriosa e delicata. Nè può diversamente essere, trattandosi di una questione esistenziale. Occorre invero (continuando a parlare del caso $r=3$), stabilire l'esistenza d'una curva sghemba effettiva C , mobile con continuità insieme al gruppo $G = (A - B, F) + b - a$, passante pel gruppo stesso e intersecante ulteriormente F , fuori di un gruppo fisso, in un gruppo variabile di una serie lineare sopra una certa curva irriducibile e fissa D , di F . Lo spunto della dimostrazione mi è stato fornito da un passo premesso da Zeuthen a talune questioni numerative.

Dirò che come curva D può assumersi la sezione di F con una superficie S , di ordine abbastanza alto. La curva C si costruisce così. Per A si conducono due superficie Φ, Ψ di eguale ordine abbastanza alto, alle quali s'impone inoltre di passare doppiamente pel gruppo fisso b . Per l'ulteriore intersezione di Φ, Ψ si conducono altre due superficie R, R_0 di ordini tali che le $S + \Phi, S + \Psi, R + F, R_0 + F$ risultino tutte dello stesso ordine. Se, come s'è supposto, gli ordini di S, Φ, Ψ son abbastanza alti, tenute fisse queste superficie, nei sistemi lineari individuati il primo dalla superficie fissa $S + \Phi$ e dalla superficie variabile $R + F$; ed il secondo dalla superficie fissa $S + \Psi$ e dalla superficie variabile $R_0 + F$, vi son superficie, non contenenti come parte F , le quali passano per la curva B : l'ulteriore intersezione di tali superficie è la curva C desiderata.

Il trasporto del risultato ad r qualunque è immediato. La dimostrazione di tutto ciò verrà esposta diffusamente in una prossima Memoria.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria differenziale). — *Sistemi di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative*. Nota di P. BUZANO, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Il sistema di due equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del 2° ordine (*equazioni di Laplace*) per una funzione di tre variabili $x(u_1, u_2, u_3)$, sistema che si può scrivere nel seguente modo⁽²⁾:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{hij} x^{(ij)} + \sum_{i=1}^3 c_{hi} x^{(i)} + c_h x = 0 \quad (h = 1, 2)$$

è stato finora studiato in casi molto particolari dal Bompiani⁽³⁾ e dal Terracini⁽⁴⁾. Io mi sono occupato di questo sistema da un punto di vista generale e ne ho fatto lo studio nel campo analitico e in relazione con le varietà a tre dimensioni che lo rappresentano⁽⁵⁾. In questa Nota riassumerò brevemente i risultati ottenuti, riservandomi di fornire maggiori dettagli e lo sviluppo delle dimostrazioni in un successivo lavoro. Per quanto tali risultati si presentino sotto forma assai semplice, ho incontrato una certa difficoltà nel determinare le condizioni di integrabilità attraverso le quali essi vengono conseguiti e nel dominarne l'insieme assai complicato. Mi sono poi particolarmente soffermato sul tipo più generale di sistema (1) (nel senso che sarà chiarito in seguito) giungendo a una interpretazione geometrica completa delle nove condizioni di integrabilità che in esso si incontrano e trovando così, in relazione con ogni V_3 , integrale di un sistema di quel

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(2) Dove si è posto: $x^{(i)} = \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $x^{(ij)} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ e i coefficienti c_{hij} , c_{hi} , c_h sono funzioni analitiche di u_1, u_2, u_3 .

(3) E. BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. «Atti Acc. Sc. Torino», vol. XLIX, 1913-14.

(4) A. TERRACINI, *Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà*. Nota II. «Rend. Lincei», ser. 5ª, vol. XXIX, 1920.

(5) Varietà i cui punti hanno come coordinate proiettive omogenee delle soluzioni del sistema (1). Sulle varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali esiste tutta una serie di lavori di C. SEGRE, E. BOMPIANI, A. TERRACINI, V. LALAN, E. P. LANE, P. BOWLES, U. LEVI; ma nessuno oltre ai due già citati riguarda direttamente il sistema (1).

tipo, una configurazione geometrica che sembra assai interessante. Per gli altri tipi (particolari) di sistemi (1) mi sono invece di regola limitato a indicare una forma canonica per i loro termini contenenti le derivate seconde, dopo di che la formazione esplicita delle condizioni di integrabilità, sulla quale io non mi sono ulteriormente soffermato, risulta notevolmente semplificata.

Ipotesi fondamentale delle mie ricerche è che le funzioni x non soddisfino altre equazioni di Laplace oltre le (1) e le loro combinazioni lineari, e, quanto ad equazioni del 3° ordine, soddisfino solo quelle ottenute derivando una volta le (1) e le loro combinazioni lineari. Sotto tale ipotesi ho ridotto il sistema (1), mediante cambiamenti di variabili, a un certo numero di tipi essenzialmente distinti, valendomi del sistema lineare delle forme quadratiche associate alle equazioni di Laplace, sistema introdotto dal Terracini e legato in modo covariante alle equazioni stesse⁽¹⁾. Nel caso in esame tale sistema è individuato dalle forme quadratiche:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{hij} \theta_i \theta_j \quad (h = 1, 2)$$

e (pensando $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ come coordinate proiettive omogenee di un punto del piano) rappresenta un *fascio di coniche*. Per tale fascio si possono distinguere, secondochè è riducibile o irriducibile, rispettivamente 3 tipi o 5 tipi (questi ultimi corrispondenti a punti base distinti o variamente coincidenti). Corrispondentemente a tali possibilità le equazioni (1) devono ammettere delle conseguenze lineari che, introducendo gli operatori differenziali:

$$A_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

già usati dal Terracini⁽²⁾, si scrivono rispettivamente nei seguenti modi (dove il segno $\sim$ sta ad indicare che il 1° membro è uguale al 2° a meno di un'espressione lineare in x e nelle sue derivate prime):

$$I \quad a) \begin{cases} A_2 A_1 x \sim 0 \\ A_3 A_1 x \sim 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} A_1^2 x \sim 0 \\ A_2 A_1 x \sim 0 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} A_1^2 x \sim 0 \\ A_2^2 x \sim 0 \end{cases} ;$$

(1) A. TERRACINI, *Alcune quistioni su gli spazi tangenti e osculatori a una varietà*. Nota I. «Atti Acc. Sc. Torino», vol. XLIX, 1913-14.

(2) Nel lavoro citato sopra e in altri successivi. Di tali operatori si è pure valso UGO LEVI nel suo lavoro: *Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e 3° ordine*. «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», 1933, nn. 1-2. Un secondo lavoro del LEVI è in corso di stampa sullo stesso periodico.

$$\text{II} \quad a) \left\{ \begin{array}{l} A_2 A_1 x \sim 0 \\ (A_1 + A_2 + A_3) A_3 x \sim 0 \end{array} \right. ; \quad b) \left\{ \begin{array}{l} A_2 A_1 x \sim 0 \\ (A_1 + A_2) A_3 x \sim 0 \end{array} \right. ;$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} A_2 A_1 x \sim 0 \\ A_3^2 x \sim 0 \end{array} \right. ; \quad d) \left\{ \begin{array}{l} (A_1^2 + A_2 A_3) x \sim 0 \\ A_2 A_1 x \sim 0 \end{array} \right. ; \quad e) \left\{ \begin{array}{l} (A_1^2 + A_2 A_3) x \sim 0 \\ A_2^2 x \sim 0 \end{array} \right. .$$

Vale a dire: il sistema (I) è equivalente a uno di questi otto sistemi, corrispondendo quelli del gruppo I a fasci di coniche riducibili e quelli del gruppo II a fasci irriducibili.

A questo punto viene spontaneo cercare di cambiare le variabili in modo da semplificare la forma degli operatori A_i sostituendoli con altri $\bar{A}_i$ in cui alcuni coefficienti siano nulli; ma ciò non è immediato poichè, ad esempio, volendo ottenere: $\bar{a}_{13} = 0$, $\bar{a}_{23} = 0$ bisogna prendere come nuova variabile $\bar{n}_3$ un integrale del sistema: $A_1 F = 0$, $A_2 F = 0$ e quindi bisogna constatare che esso sia completo in conseguenza delle condizioni di integrabilità del sistema delle equazioni di Laplace.

Allora ho proceduto nel seguente modo.

Nei casi I a) e I b) ho scritto le conseguenze differenziali del 3° ordine ottenute applicando alle equazioni del sistema gli operatori A_i e ho constatato che esse ammettono delle conseguenze lineari del 2° ordine: per l'ipotesi fatta in principio queste devono essere combinazioni lineari rispettivamente delle equazioni I a) e I b) e, limitandomi a scrivere ciò per i termini del 2° ordine, ho ottenuto anzitutto che nel caso I a) il sistema: $A_2 F = 0$, $A_3 F = 0$ è completo e, ridotti allora i sistemi alle seguenti forme (indicando le variabili con u, v, w):

$$\text{I} \quad a) \left\{ \begin{array}{l} x_{uv} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_w + ax \\ x_{uw} = b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_w + bx \end{array} \right. ;$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x_{uu} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_w + ax \\ \mathcal{L} x_{uv} + \mathcal{M} x_{uw} = b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_w + bx \end{array} \right. ;$$

ho ottenuto inoltre che per I a) deve essere: $a_3 = b_2 = 0$, $a_2 = b_3$ e per I b) $a_2 = a_3 = 0$. A partire da queste due forme ridotte si potrebbe proseguire lo studio dei due sistemi determinando tutte le condizioni di integrabilità: ma ciò è già stato fatto nei lavori citati del Bompiani (per un sistema che contiene I a) come caso particolare)⁽¹⁾ e del Terracini (per il sistema I b))⁽²⁾, dove è data la forma degli integrali generali e la caratterizzazione delle V_3 rappresentative.

(1) Lavoro citato nella nota (3) di p. 6: la parte che qui interessa è costituita dai nn. 18 e 19 (pp. 30-32).

(2) Lavoro citato nella nota (4) di p. 6: la parte che qui interessa è costituita dal n. 4 (pp. 186-188).

I sei casi rimanenti sono invece del tutto nuovi: procedendo per essi come per i due precedenti si vede che le 6 equazioni del 3° ordine, ottenute applicando gli operatori A_i , *non* ammettono in questi casi conseguenze lineari del 2° ordine; ma allora applicando un'altra volta gli operatori A_i si ottengono delle equazioni del 4° ordine che ammettono delle conseguenze lineari del 3° ordine le quali (per l'ipotesi fatta in principio) devono essere combinazioni lineari delle precedenti 6 equazioni del 3° ordine: scrivendo ciò limitatamente ai termini del 3° ordine si ottiene, attraverso sviluppi analitici alquanto complicati, che, nei rispettivi casi, i seguenti sistemi sono completi:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & c) \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_2 F = 0; \end{cases} \\ \text{II} \quad & a) \begin{cases} A_2 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_1 F = 0 \\ (A_1 + A_2 + A_3) F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_2 F = 0 \\ (A_1 + A_2 + A_3) F = 0; \end{cases} \\ & b) \begin{cases} A_2 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_2 F = 0; \end{cases} c) \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_2 F = 0 \\ A_3 F = 0; \end{cases} \\ & d) \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_3 F = 0, \end{cases} \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_2 F = 0; \end{cases} e) \begin{cases} A_1 F = 0 \\ A_2 F = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ciò permette subito di scegliere delle nuove variabili (u, v, w) in modo da ridurre i sistemi alle seguenti forme:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & c) \begin{cases} x_{uu} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_w + ax \\ x_{vv} = b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_w + bx; \end{cases} \\ \text{II} \quad & a) \begin{cases} x_{uw} \sim \mathcal{L} x_{uv} \\ x_{vw} \sim \mathcal{M} x_{uv} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{con la condizione: } \mathcal{M}^2 \mathcal{L}_u - \mathcal{L}^2 \mathcal{M}_v + \mathcal{L} \mathcal{M}_w - \mathcal{M} \mathcal{L}_w = 0;$$

$$\begin{aligned} & b) \begin{cases} x_{uv} \sim 0 \\ x_{uu} + \mathcal{L} x_{vw} \sim 0 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} x_{vw} \sim 0 \\ x_{uv} + \mathcal{L} x_{uw} \sim 0; \end{cases} \\ & d) \begin{cases} x_{uv} \sim 0 \\ x_{uu} + \mathcal{L} x_{vw} \sim 0 \end{cases}; \quad e) \begin{cases} x_{vv} \sim 0 \\ x_{uu} + \mathcal{L} x_{uv} + \mathcal{M} x_{vw} \sim 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nel caso I c) sulle V_3 integrali le linee u e v sono *quasi-asintotiche* $\gamma_{1,2}$; se poi è $a_3 = 0$, oppure $b_3 = 0$, le linee u , o rispettivamente le linee v , sono *asintotiche* delle superficie $w = \text{cost.}$; se infine è $a_3 = b_3 = 0$ le super-

ficie $w = \text{cost.}$ sono integrali di due equazioni di Laplace e quindi o sono sviluppabili o stanno in S_3 ⁽¹⁾: ma potendosi qui escludere la 1^a alternativa (per la forma delle equazioni), dovrà verificarsi la 2^a.

Dei rimanenti casi ho scelto il II a), che è il più generale nel senso che corrisponde a fasci di coniche associate con quattro punti-base distinti, e ne ho proseguito lo studio. Ho anzitutto determinato le condizioni di integrabilità e ho trovato che sono *nove* comprendendovi quella già scritta per $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$: quest'ultima dice semplicemente che sulle V_3 rappresentative oltre ai sistemi di superficie $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$ ne esiste un 4° che gode di proprietà del tutto analoghe a quelle dei primi tre. Chiamando *superficie caratteristiche* le superficie dei 4 sistemi suddetti e *linee caratteristiche* le loro intersezioni a 2 a 2, risulta che ogni punto x della V_3 passano 4 superficie caratteristiche $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ e 6 linee caratteristiche $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{34}$. Le equazioni II a) dicono subito che i piani tangenti alle superficie caratteristiche di un sistema (per es. Σ_1) nei punti di una linea caratteristica di uno dei 3 sistemi non contenuti su quelle superficie (nell'es. γ_{23} o γ_{24} o γ_{34}), sono tangenti a una curva e, in ciascun piano considerato, il punto che descrive questa curva sta su una tangente a una linea caratteristica (risp. $\gamma_{14}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$). A partire da ciascun piano tangente a una superficie caratteristica si ottengono tre delle curve suddette (facendo variare il punto di contatto del piano rispettivamente lungo le tre linee caratteristiche non tangenti al piano) e si dimostra che i tre punti che le descrivono sono *allineati*. A ciascun punto x della V_3 risulta allora connessa una configurazione di 12 punti che vogliamo chiamare *punti caratteristici* e che sono così distribuiti:

1) ce ne sono 2 su ciascuna delle 6 tangenti alle linee caratteristiche uscenti da x ;

2) ce ne sono 6 su ciascuno dei 4 piani tangenti alle superficie caratteristiche uscenti da x e tre di essi sono allineati.

Allora ho dimostrato che le rimanenti otto condizioni di integrabilità *equivalgono* a delle proprietà riguardanti ciascuna superficie caratteristica *separatamente* ed esprimibili nel seguente modo:

« Nel piano tangente a ciascuna superficie caratteristica esistono 3 punti caratteristici allineati i cui luoghi sono 3 superficie riferite fra loro e tali che:

a) piani tangenti in punti corrispondenti sono a 2 a 2 incidenti;

b) S_3 osculatori in punti corrispondenti si segano a 2 a 2 secondo un piano ».

(1) Vedi C. SEGRE, Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine. « Atti Acc. Sc. Torino », vol. XLII, n. 12, p. 15, 1907.

In tali proprietà è pure contenuta la seguente che merita di essere segnalata a parte:

« Ciascuna superficie caratteristica è integrale di un'equazione lineare alle derivate parziali del 3° ordine e appartiene quindi a una classe di superficie già considerata dal Segre ⁽¹⁾ e dal Bompiani ⁽²⁾ ».

Matematica (Geometria). — *Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulle ovali inscritte o circoscritte ad un poligono convesso* ⁽³⁾. Nota III di B. SEGRE, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Date due qualunque ovali inscritte in un medesimo $2n$ -gono convesso, si orientino concordemente le ovali in uno dei due modi possibili, e le si riferiscano (in una corrispondenza conservante le deflessioni) associando fra loro punti di esse in cui le rispettive tangenti risultano parallele ed equiverse. *Esistono allora sempre (almeno) $2n$ coppie distinte di punti omologhi, tali che nei punti di ciascuna coppia le due ovali hanno curvature uguali. Di più, se si esclude che le due ovali abbiano qualche arco in comune, lungo una di esse la differenza fra la curvatura in un suo punto e la curvatura dell'altra ovale nel punto omologo, possiede sempre almeno n massimi positivi alternati con n minimi negativi.*

Un'ovale di larghezza costante, ammette sempre almeno un esagono regolare circoscritto ⁽⁵⁾; orbene, basta applicare il teorema precedente ad una qualunque orbiforme ed alla circonferenza inscritta in uno dei suoi esagoni regolari circoscritti, per dedurne una proposizione sulle orbiformi che già abbiamo ottenuta, in tutt'altra guisa, al n. 3 della Nota II.

2. Presa un'ovale $\mathcal{C}$ qualsiasi, che solo supponiamo non sia di larghezza costante, indichiamone con d la minima larghezza e con D ($> d$) la massima larghezza. È subito visto che, per ogni δ soddisfacente alle

$$d < \delta < D,$$

(1) Vedi il lavoro citato nella nota 1 a p. prec.: n. 28, p. 34 (*Generalizzazioni*): quelle che ivi il SEGRE chiama « linee caratteristiche » sono le stesse qui considerate.

(2) E. BOMPIANI, *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari e omogenee*. Nota II. « Rend. Ist. Lomb. », ser. II, vol. LII, 1919: l'equazione che qui interviene è il III Tipo del § 1.

(3) Cfr., specialmente per la terminologia, le Note dell'autore pubblicate in questi « Rendiconti », ser. 6^a, to. 20 (1934), a p. 407 ed a p. 455. Tali Note verranno in seguito rispettivamente richiamate come « Nota I » e « Nota II ».

(4) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(5) V. J. PÁL, *Ueber ein elementares Variationsproblem*. « Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. », to. 3 (1920), n. 2; oppure T. BONNESEN-W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*. « Ergebnisse der Math. », to. III, 1 (Berlin, Springer, 1934), p. 131.

esistono sempre (almeno) due direzioni distinte, secondo le quali $\mathcal{C}$ ha appunto larghezza δ ; si può dunque sempre costruire (almeno) un rombo circoscritto a $\mathcal{C}$, la cui circonferenza inscritta, $\mathcal{C}'$, abbia precisamente larghezza δ , e cioè sia di raggio $\frac{1}{2}\delta$ ⁽¹⁾. Applicando a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ il teorema del n. 1, risulta che:

Per ogni δ compreso fra la minima e la massima larghezza di un'ovale $\mathcal{C}$ (che non sia di larghezza costante), esistono su $\mathcal{C}$ (almeno) 4 punti in cui il raggio di curvatura vale $\frac{1}{2}\delta$; vi son anzi sempre, su $\mathcal{C}$, 4 vertici (separati da almeno una quaterna di punti del tipo suddetto) in due non consecutivi dei quali il raggio di curvatura è $< \frac{1}{2}\delta$, mentre negli altri due il raggio di curvatura è $> \frac{1}{2}\delta$.

Questa proposizione, completata — nel caso delle orbiformi — da quella a cui si è accennato alla fine del n. 1, comprende il celebre teorema affermando che il minimo numero dei vertici di un'ovale è uguale a quattro ⁽²⁾; da essa, inoltre, si trae subito il teorema di BOSE ⁽³⁾, secondo cui almeno due dei massimi raggi di curvatura di un'ovale sono non minori di $\frac{1}{2}D$, ed almeno due dei suoi minimi raggi di curvatura sono non maggiori di $\frac{1}{2}d$, ove d , D denotano rispettivamente la minima e la massima larghezza dell'ovale. Infine, se nel primo enunciato di questo n.º. si assume:

$$\delta = \frac{\text{lunghezza di } \mathcal{C}}{\pi}$$

(com'è lecito in base al teorema dato al principio della Nota II), si riottengono — sotto forma più completa — alcuni risultati dovuti ad HAYASHI ⁽⁴⁾.

3. Daremo ora alcune proposizioni concernenti i punti e le tangenti comuni a due ovali. Rileviamo, intanto, che due archi convessi possono avere

(1) Fra tali rombi vi è sempre (almeno) un quadrato; relativamente a ciò e ad alcune proprietà delle ovali inscritte in un n -gono regolare, ved. B. SEGRE, *Intorno alle ovali inscritte in un poligono regolare*. « Bollettino dell'Un. Mat. Ital. », to. 13 (1934), p. 275.

(2) Per la bibliografia, assai ampia, concernente questo teorema, ved. T. BONNESEN-W. FENCHEL, op. cit., p. 145; una nuova semplicissima dimostrazione trovasi, fra l'altro, in B. SEGRE, *Il teorema sul minimo numero dei vertici di un'ovale, ed alcune sue estensioni*. « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », to. 70 (1934-35).

(3) Cfr. R. C. BOSE, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval*. « Math. Zeitschrift », to. 35 (1932), p. 16, § VI.

(4) Ved. T. HAYASHI, *Some geometrical applications of the Fourier series*. « Rendic. del Circolo Mat. di Palermo », to. 50 (1926), p. 96, § II.

infiniti punti comuni, senza tuttavia possedere alcun arco parziale in comune; ciò si verifica, ad esempio, per gli archi definiti nell'intorno dell'origine dalle equazioni cartesiane:

$$y = x^2 \quad , \quad y = x^2 + x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Il numero dei punti ed il numero delle tangenti comuni a due ovali, sono però sempre entrambi finiti od entrambi infiniti; più precisamente si ha che:

Due qualunque ovali complanari aventi un numero finito di punti comuni, e per le quali non si presenti uno dei due casi eccezionali di cui tosto diremo, hanno sempre di conseguenza un numero di tangenti comuni uguale al precedente; e viceversa. Vi è solo eccezione quando le due ovali sono l'una esterna all'altra (esse allora non s'incontrano ed ammettono 4 tangenti comuni), oppure quando le due ovali si toccano esternamente in un punto (esse posseggono in tal caso un punto e tre tangenti comuni).

Il teorema precedente è affatto generale; in un caso particolare notevole, esso può venir così precisato ulteriormente:

Due ovali complanari, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, che si incontrino senza toccarsi in alcuno dei punti comuni, hanno necessariamente lo stesso numero — finito e pari — di punti e di tangenti comuni. Supposto questo numero $2n$ maggiore di 2, si orientino concordemente (in uno dei due modi possibili) $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ ed il $2n$ -gono convesso avente per vertici i loro punti comuni. Si può allora asserire che ciascuna delle $2n$ rette contemporaneamente tangenti alle $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, ha in relazione ad entrambe lo stesso verso positivo; e che, tenuto anche conto dei versi, le direzioni di quelle $2n$ rette orientate separano le direzioni dei lati del suddetto $2n$ -gono convesso orientato.

4. Qualora le $2n$ tangenti comuni alle due ovali $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, dianzi considerate, determinassero un $2n$ -gono convesso circoscritto alle $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, si potrebbe applicare a queste ultime il teorema del n. 1. Ebbene, in qualunque caso sussiste una proposizione del tutto simile a quella che così si otterrebbe, la quale può venir così enunciata:

Se due ovali si segano secondo $2n$ punti, con $n > 1$, si orientino concordemente le ovali in uno dei due modi possibili, e le si riferiscano associando fra loro punti di esse in cui le relative tangenti risultano parallele ed equiverse. Esistono allora sempre almeno $2(n - 1)$ coppie distinte di punti omologhi, tali che nei punti di ciascuna coppia le due ovali hanno curvature uguali. Di più — lungo una di dette ovali — la differenza fra la curvatura in un suo punto e la curvatura dell'altra ovale nel punto omologo, ammette sempre almeno $n - 1$ massimi positivi alternati con $n - 1$ minimi negativi.

Nel caso particolare in cui una delle due ovali è una circonferenza, la prima parte di questo teorema è già nota ⁽¹⁾.

5. Se $\mathcal{O}$ è un'ovale ed O un punto del suo piano, si può dire — usando il linguaggio infinitesimale — che l'ovale dedotta da $\mathcal{O}$ mediante una rotazione infinitesima attorno ad O , ha in comune colla $\mathcal{O}$ i piedi delle normali abbassate da O su $\mathcal{O}$; ed anche si può dire che quell'ovale tocca le rette tangenti alla $\mathcal{O}$ nei punti suddetti. Poggiando sui teoremi dei n. 1 e 4, se ne inferisce che:

Il numero delle normali ad un'ovale assegnata che possono condursi da un qualunque punto del suo piano, non supera mai il numero dei vertici dell'ovale aumentato di 2. Se da un punto escono $n \geq 4$ normali, e se le tangenti all'ovale nei piedi di tali normali costituiscono un n -gono convesso ad essa circoscritto, si può anzi asserire che l'ovale possiede certamente almeno n vertici.

Meccanica. — *Questioni di elasticità vincolata.* — III. *Espressioni della Θ e della ψ nel caso generale. Le equazioni dell'elasticità vincolata pei solidi la cui fibra baricentrica è piana.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Facendo seguito alle due precedenti Note pubblicate su questi « Rendiconti » ⁽³⁾ cerchiamo l'espressione della Θ e della Ψ nel caso generale troviamo le equazioni dell'elasticità vincolata pei solidi la cui fibra baricentrica è piana.

7. — ESPRESSIONE DELLA Θ E DELLA Ψ NEL CASO GENERALE.

Partiamo dall'espressione generale del ds^2 (Formula (5) Nota II)

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 \{ (1 - \gamma c)^2 + (\gamma \tau)^2 + (\chi \tau)^2 \} + dy^2 + dz^2 - 2\gamma \tau dx dz + 2\chi \tau dx dy.$$

Se si suppone di poter trascurare in prima approssimazione le potenze di ordine superiore al primo delle quantità (puri numeri) γc , $\gamma \tau$, $\chi \tau$ e $\chi \tau$ la (1) si riduce a

$$(1') \quad ds^2 = dx^2 (1 - 2\gamma c) + dy^2 + dz^2 - 2\gamma \tau dx dz + 2\chi \tau dx dy.$$

(1) Ved. S. MUKHOPADHYAYA, *Circles Incident on an Oval of undefined Curvatures*. « Tôhoku Math. Journ. », to. 34 (1931), p. 115, oppure *Collected geometrical papers*. Part II (Calcutta, University Press, 1931), p. 295.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(3) Vedi i « Rendiconti » delle sedute del 2 e del 16 dicembre 1934.

Il tensore fondamentale è allora:

$$\begin{vmatrix} a_{11} = 1 - 2\gamma c & , & a_{12} = 2\chi\tau & , & a_{13} = -2\gamma\tau \\ a_{21} = 2\chi\tau & , & a_{22} = 1 & , & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -2\gamma\tau & , & a_{32} = 0 & , & a_{33} = 1 \end{vmatrix}$$

da cui segue, con la stessa approssimazione

$$a = (1 - 2\gamma c) \quad , \quad \sqrt{a} = (1 - \gamma c) \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 + \gamma c ;$$

$$\begin{vmatrix} a^{11} = 1 + 2\gamma c & , & a^{12} = -2\chi\tau & , & a^{13} = 2\gamma\tau \\ a^{21} = -2\chi\tau & , & a^{22} = 1 & , & a^{23} = 0 \\ a^{31} = 2\gamma\tau & , & a^{32} = 0 & , & a^{33} = 1 \end{vmatrix} .$$

Le componenti controvarianti dello spostamento elastico sono (Formola (9)

Nota II) $u^1 = \lambda^1 \gamma + \mu^1 \chi + \nu^1$; $u^2 = \lambda^2 \gamma + \mu^2 \chi + \nu^2$; $u^3 = \lambda^3 \gamma + \mu^3 \chi + \nu^3$; mentre le componenti covarianti della deformazione si calcolano mediante la formola (5) (Nota I), ottenendo

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \sum_j \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} u^j + a_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + a_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right]$$

Nei coefficienti del ds^2 , ($1'$), compariscono le curvature, o, ciò che è lo stesso, i raggi di curvatura e di torsione R e T. L'espressione, testè richiamata, delle γ_{ik} mostra che vi dovrebbero figurare anche le derivate delle

curvature $c = \frac{1}{R}$, $\tau = \frac{1}{T}$ rispetto all'arco x della direttrice. Supponiamo che (esclusi al più un numero finito di vertici da considerarsi a parte) la variazione dei raggi di curvatura sia graduale, cioè che le derivate (puri numeri) $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dT}{dx}$ vadano trattate come quantità finite.

Essendo $\frac{dc}{dx} = -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{dx}$; $\frac{d\tau}{dx} = -\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx}$, potremo in conformità, nel

convenuto ordine di approssimazione, trascurare i prodotti di $\frac{dc}{dx}$, $\frac{d\tau}{dx}$ per γ^2, χ^2 o più generalmente per un'area dell'ordine di grandezza dell'area Ω della sezione normale del solido. Si noti a tal proposito che il vettore ν è dello stesso ordine di grandezza dei vettori $\gamma\lambda, \chi\mu$, cioè in sostanza delle dimensioni lineari della sezione (λ e μ essendo numeri puri).

Con ciò si trova:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \gamma_{11} &= -c [\lambda^2 y + \mu^2 \tau + v^2] + (1 - 2yc) \left[y \frac{d\lambda^1}{dx} + \tau \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{dv^1}{dx} \right] + \\
 &\quad + 2\tau \left[y \frac{d\lambda^2}{dx} + \tau \frac{d\mu^2}{dx} + \frac{dv^2}{dx} \right] - 2y\tau \left[y \frac{d\lambda^3}{dx} + \tau \frac{d\mu^3}{dx} + \frac{dv^3}{dx} \right] \\
 \gamma_{22} &= 2\tau \lambda^1 + \lambda^2 \\
 \gamma_{33} &= -2y\tau \mu^1 + \mu^3 \\
 \gamma_{12} &= \tau [\lambda^3 y + \mu^3 \tau + v^3] + \frac{1}{2} (1 - 2yc) \lambda^1 + \tau \lambda^2 - y\tau \lambda^3 + \\
 &\quad + \tau \left[y \frac{d\lambda^1}{dx} + \tau \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{dv^1}{dx} \right] + \frac{1}{2} \left[y \frac{d\lambda^2}{dx} + \tau \frac{d\mu^2}{dx} + \frac{dv^2}{dx} \right] \\
 \gamma_{13} &= -\tau [\lambda^2 y + \mu^2 \tau + v^2] + \frac{1}{2} (1 - 2yc) \mu^1 + \tau \mu^2 - y\tau \mu^3 - \\
 &\quad - y\tau \left[y \frac{d\lambda^1}{dx} + \tau \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{dv^1}{dx} \right] + \frac{1}{2} \left[y \frac{d\lambda^3}{dx} + \tau \frac{d\mu^3}{dx} + \frac{dv^3}{dx} \right] \\
 \gamma_{23} &= \tau \mu^1 + \frac{1}{2} \mu^2 - y\tau \lambda^1 + \frac{1}{2} \lambda^3.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Per la dilatazione cubica, o, ciò che è lo stesso, per la divergenza del vettore u (spostamento elastico) abbiamo (Formola (11) della Nota I):

$$\Theta = \sum_i \left\{ \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^i} u^i \right\},$$

e quindi nel caso nostro

$$(3) \quad \Theta = y \frac{d\lambda^1}{dx} + \tau \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{dv^1}{dx} + \lambda^2 + \mu^3 - c (\lambda^2 y + \mu^2 \tau + v^2).$$

Infine dalla formola (14) (Nota I),

$$\psi = \sum_{ik} \sum_{jh} a^{ij} a^{hk} \gamma_{jh} \gamma_{ik},$$

ricaviamo per l'invariante quadratico del tensore di deformazione, l'espressione:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \psi &= (a^{11})^2 \gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2 + 2a^{11} \gamma_{12}^2 + 2a^{11} \gamma_{13}^2 + 2\gamma_{23}^2 + 4a^{12} \gamma_{11} \gamma_{12} + \\
 &\quad + 4a^{13} \gamma_{11} \gamma_{13} + 4a^{12} \gamma_{12} \gamma_{22} + 4a^{12} \gamma_{13} \gamma_{23} + 4a^{13} \gamma_{13} \gamma_{33} + 4a^{13} \gamma_{12} \gamma_{23}.
 \end{aligned}$$

8. — LE EQUAZIONI DELL'ELASTICITÀ VINCOLATA PEI SOLIDI
LA CUI CURVA DIRETTRICE È PIANA.

Lo scopo del nostro metodo è di stabilire le equazioni differenziali ordinarie determinatrici delle nove componenti controvarianti incognite dei vettori λ , μ e ν . Occupiamoci qui del caso, relativamente più semplice, ma già molto notevole per le applicazioni concrete, di un solido a curva direttrice piana ($\tau = 0$).

Supponiamo inoltre che si tratti di solidi a sezione uniforme, e che gli assi y e z (orientati per ipotesi secondo la normale e la binormale alla curva direttrice D) si identifichino in ciascun punto cogli assi principali di inerzia della sezione normale alla D .

Le formule (2) e (4) divengono in questo caso assai più semplici. Si ha infatti per il quadrato dell'elemento lineare:

$$(5) \quad ds^2 = dx^2 (1 - 2yc) + dy^2 + dz^2,$$

con che

$$\begin{vmatrix} a_{11} = 1 - 2yc & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} = 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^{11} = 1 + 2yc & a^{12} = 0 & a^{13} = 0 \\ a^{21} = 0 & a^{22} = 1 & a^{23} = 0 \\ a^{31} = 0 & a^{32} = 0 & a^{33} = 1 \end{vmatrix}.$$

Le componenti covarianti della deformazione sono:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = -c [\lambda^2 y + \mu^2 z + \nu^2] + (1 - 2yc) \left[y \frac{d\lambda^1}{dx} + z \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{d\nu^1}{dx} \right] \\ \gamma_{22} = \lambda^2 \quad \gamma_{33} = \mu^2 \\ \gamma_{12} = \frac{1}{2} (1 - 2yc) \lambda^1 + \frac{1}{2} \left[y \frac{d\lambda^2}{dx} + z \frac{d\mu^2}{dx} + \frac{d\nu^2}{dx} \right] \\ \gamma_{13} = \frac{1}{2} (1 - 2yc) \mu^1 + \frac{1}{2} \left[y \frac{d\lambda^3}{dx} + z \frac{d\mu^3}{dx} + \frac{d\nu^3}{dx} \right] \\ \gamma_{23} = \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda^3. \end{array} \right.$$

La divergenza Θ del vettore spostamento elastico e l'invariante quadratico ψ sono dati da:

$$(3) \quad \Theta = y \frac{d\lambda^1}{dx} + z \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{d\nu^1}{dx} + \lambda^2 + \mu^3 - c (\lambda^2 y + \mu^2 z + \nu^2),$$

$$(7) \quad \psi = (a^{11})^2 \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + 2a^{11} \gamma_{12} + 2a^{11} \gamma_{13} + 2\gamma_{23}^2.$$

Ricordiamo che il lavoro di deformazione elastica (integrale del potenziale elastico locale esteso a tutto il solido) è espresso in generale da:

$$\Phi = \int_V \sqrt{a} \left[\frac{L}{2} \Theta^2 + k\psi \right] dx dy dz.$$

Sostituiamo nel secondo membro al posto della Θ e della ψ i valori fornitici dalla (3) e dalla (7), eseguendo le integrazioni rispetto alle variabili y e z . Si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_x \left\{ \frac{L}{2} \left[I_x \left(\frac{d\lambda^1}{dx} \right)^2 + I_y \left(\frac{d\mu^1}{dx} \right)^2 + \Omega \left(\frac{dv^1}{dx} \right)^2 + \Omega (\lambda^2)^2 + \Omega (\mu^3)^2 - \right. \right. \\ - 2I_x c \lambda^2 \frac{d\lambda^1}{dx} - 2cI_y \mu^2 \frac{d\mu^1}{dx} + 2\lambda^2 \frac{dv^1}{dx} \Omega + 2\mu^3 \frac{dv^1}{dx} \Omega - 2cv^2 \frac{dv^1}{dx} \Omega + \\ + 2\lambda^2 \mu^3 \Omega - 2cv^2 \lambda^2 \Omega - 2cv^2 \mu^3 \Omega - 2I_x c \frac{d\lambda^1}{dx} \frac{dv^1}{dx} - 2I_x c \frac{d\lambda^1}{dx} \lambda^2 - \\ - 2I_x c \mu^3 \frac{d\lambda^1}{dx} \left. \right] + k \left[I_x \left(\frac{d\lambda^1}{dx} \right)^2 + I_y \left(\frac{d\mu^1}{dx} \right)^2 + \Omega \left(\frac{dv^1}{dx} \right)^2 - 2cI_x \lambda^2 \frac{d\lambda^1}{dx} - \right. \\ - 2cI_y \mu^2 \frac{d\mu^1}{dx} - 2cv^2 \frac{dv^1}{dx} \Omega + (\lambda^2)^2 \Omega + (\mu^3)^2 \Omega + \frac{I}{2} (\lambda^1)^2 \Omega + \\ + \frac{I}{2} I_x \left(\frac{d\lambda^2}{dx} \right)^2 + \frac{I}{2} I_y \left(\frac{d\mu^2}{dx} \right)^2 + \frac{I}{2} \left(\frac{dv^2}{dx} \right)^2 \Omega + \lambda^1 \frac{dv^2}{dx} \Omega + \frac{I}{2} (\mu^1)^2 \Omega + \\ + \frac{I}{2} I_x \left(\frac{d\lambda^3}{dx} \right)^2 + \frac{I}{2} I_y \left(\frac{d\mu^3}{dx} \right)^2 + \frac{I}{2} \left(\frac{dv^3}{dx} \right)^2 \Omega + \mu^1 \frac{dv^3}{dx} \Omega + \frac{I}{2} (\mu^2)^2 \Omega + \\ + \frac{I}{2} (\lambda^3)^2 \Omega + \mu^2 \lambda^3 \Omega - 2I_x c \frac{d\lambda^1}{dx} \frac{dv^1}{dx} + I_x c \frac{d\lambda^2}{dx} \frac{dv^2}{dx} - I_x c \lambda^1 \frac{d\lambda^2}{dx} - \\ \left. - I_x c \frac{d\lambda^3}{dx} \frac{dv^3}{dx} - I_x c \mu^1 \frac{d\lambda^3}{dx} \right] \Big\} dx, \end{aligned}$$

dove I_y e I_x designano i momenti principali al posto dei quali faremo tra un momento intervenire i corrispondenti raggi di inerzia $\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{\Omega}}$, $\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{\Omega}}$.

Volendo studiare le deformazioni del nostro sistema, in assenza di forze esterne, dovremo determinare le nove funzioni incognite:

$$\lambda^i, \mu^i, v^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

in modo da rendere minimo il lavoro di deformazione.

Questo dà luogo a nove equazioni differenziali ordinarie, lineari, omogenee atte a determinare le nove funzioni incognite della variabile x . Tali equazioni sono

$$\begin{aligned}
 & k\lambda^1 - (L + 2k)\rho_\zeta^2 \frac{d^2\lambda^1}{dx^2} + (2L + k)\rho_\zeta^2 c \frac{d\lambda^2}{dx} - Lc\rho_\zeta^2 \frac{d\mu^3}{dx} + \\
 & + (L + 2k)\rho_\zeta^2 c \frac{d^2\nu^1}{dx^2} + k \frac{d\nu^2}{dx} = 0 \\
 & - (2L + k)\rho_\zeta^2 c \frac{d\lambda^1}{dx} + (L + 2k)\lambda^2 - k\rho_\zeta^2 \frac{d^2\lambda^2}{dx^2} + L\mu^3 + \\
 & + L \frac{d\nu^1}{dx} - Lc\nu^2 - k\rho_\zeta^2 c \frac{d^2\nu^2}{dx^2} = 0 \\
 & \lambda^3 - \rho_\zeta^2 \frac{d^2\lambda^3}{dx^2} + \rho_\zeta^2 c \frac{d\mu^1}{dx} + \mu^2 = 0 \\
 & - k\rho_\zeta^2 c \frac{d\lambda^3}{dx} + k\mu^1 - (L + 2k)\rho_y^2 \frac{d^2\mu^1}{dx^2} + (L + 2k)\rho_y^2 c \frac{d\mu^2}{dx} + \\
 (8) \quad & + k \frac{d\nu^3}{dx} = 0 \\
 & k\lambda^3 - (L + 2k)\rho_y^2 c \frac{d\mu^1}{dx} + k\mu^2 - k\rho_y^2 \frac{d^2\mu^2}{dx^2} = 0 \\
 & - L\rho_\zeta^2 c \frac{d\lambda^1}{dx} + L\lambda^2 + (L + 2k)\mu^3 - k\rho_y^2 \frac{d^2\mu^3}{dx^2} + L \frac{d\nu^1}{dx} - Lc\nu^2 = 0 \\
 & - (L + 2k)c\rho_\zeta^2 \frac{d^2\lambda^1}{dx^2} + L \frac{d\lambda^2}{dx} + L \frac{d\mu^3}{dx} + (L + 2k) \frac{d^2\nu^1}{dx^2} - \\
 & - (L + 2k)c \frac{d\nu^2}{dx} = 0 \\
 & k \frac{d\lambda^1}{dx} + Lc\lambda^2 + k\rho_\zeta^2 c \frac{d^2\lambda^2}{dx^2} + Lc\mu^3 + (L + 2k)c \frac{d\nu^1}{dx} + k \frac{d^2\nu^2}{dx^2} = 0 \\
 & - \rho_\zeta^2 c \frac{d^2\lambda^3}{dx^2} + \frac{d\mu^1}{dx} + \frac{d^2\nu^3}{dx^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Come si vede, i coefficienti di queste equazioni dipendono dalla forma della sezione, dalla natura elastica del materiale (cioè dalle costanti ρ_y , ρ_ζ , L e k) nonchè dalla curvatura c della direttrice la quale (esclusi i casi rettilineo e circolare) è invece funzione della variabile indipendente x .

Se si volessero studiare le deformazioni del corpo per effetto di forze esterne, agenti su di esso, da supporre (per restare nei casi più comuni) del tipo di forze di massa oppure di sforzi superficiali, si dovrebbe introdurre nel principio variazionale anche il lavoro delle forze esterne suddette.

Si arriva in questo caso ad equazioni differenziali non più omogenee, ma con secondo membro.

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di primo ordine di Tortona nel luglio 1933.* Nota di U. BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

La stazione astronomico-geodetica di Tortona, compiuta nei giorni dal 20 al 28 luglio 1933, si ricollega, per lo scopo cui fu eseguita, alle altre già da me fatte precedentemente, lungo il meridiano di Mondovì.

In essa si osservò la latitudine, un azimut, e, per via radiotelegrafica, la longitudine.

Il vertice è costituito dall'asse della Torre appartenente all'antico Castello posto sull'altura, sovrastante la città, e la stazione fu eseguita ex-centro, sul ripiano del Castello a nord della Torre.

Essendo il luogo aperto al pubblico, fu mestieri isolare lo spiazzo d'operazione, con un'adatta staccionata che lo rendesse inaccessibile, cortesemente costruita dall'Ufficio Tecnico Municipale.

In un sopralluogo fatto prima dell'inizio dei lavori, furono prelevati gli elementi necessari alla riduzione in centro, dopo di che, nell'andata definitiva, le osservazioni poterono susseguirsi senza interruzione, favorite, quasi di continuo, da tempo possibile.

Le modalità osservate nelle operazioni, furono identiche a quelle seguite nelle altre stazioni compiute lungo il meridiano di Mondovì, onde su di esse sorvoliamo: diremo solo che per la determinazione dell'azimut, controllato con l'aiuto della longitudine dall'equazione di Laplace, si approfittò di un punto di quarto ordine (campanile di Spineto) direttamente collegato al vertice di Tortona, benissimo visibile, e da quello distante poco più di sei chilometri.

Si riportano qui di seguito, in tre specchi, i risultati ottenuti nelle determinazioni di latitudine, tempo e azimut.

Latitudine.

DATA	1° gruppo	2° gruppo	3° gruppo	4° gruppo	5° gruppo
20 luglio 1930	—	44° 53' 44".3	44° 53' 49".6	44° 53' 44".0	44° 53' 45".7
21 " "	—	43 .9	46 .8	44 .6	46 .1
22 " "	—	47 .6	47 .9	44 .7	—
Media . . .	—	44 53 45 .3	44 53 48 .1	44 53 44 .4	44 53 45 .9

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

Il primo gruppo non potè essere osservato, perchè troppo prossimo al tramonto.

Dai valori sopra riportati si ottiene, come media della latitudine osservata per la stazione fuori centro di Tortona

$$\varphi_e = 44^{\circ} 53' 45''.9$$

da cui, applicando la riduzione in centro di $-1''.3$, che era stata precedentemente calcolata, ne consegue, per la latitudine astronomica del vertice di 1° ordine di Tortona il valore

$$\varphi = 44^{\circ} 53' 44''.6$$

(epoca 1933, 6)

Tempo.

DATA	Oraria (B. A. J.)	Correzione del Kullberg	Ora siderale corrispondente	Andamento orario
23 luglio 1930	(656) Ophiuci (690) 109 Herculis (703) 110 Herculis	+ 10''.496	17 ^h 43 ^m 02 ^s	0 ^s .0420
24 " "	(641) Herculis (656) Ophiuci (681) Herculis	+ 11 .492	17 25 44	0 .0459
25 " "	(584) Serpentis (609) Herculis	+ 12 .522	15 53 27	

Azimut di Spineto.

DATA	Reiterazione	Azimut	Media
23 Luglio 1930 . . .	0°	177° 59' 38'', 0	177° 59' 39'', 2
24 " " . . .	45°	40 , 5	
24 " " . . .	90°	38 , 9	
25 " " . . .	135°	39 , 2	

In virtù della nota formola

$$\Delta A = \frac{e \operatorname{sen} \varepsilon}{s \operatorname{arc} 1''} + \frac{e \operatorname{sen} \alpha}{N \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} \varphi$$

dove ε è l'angolo fra la direzione al centro e la direzione a Spineto, e l'eccentricità, ed α l'angolo di direzione della visuale al centro, la riduzione al vertice trigonometrico risulta

$$\Delta A = + 0^{\circ} 40' 22'', 5,$$

onde ne consegue in definitiva, quale Azimut astronomico di Spineto sull'orizzonte di Tortona

$$178^{\circ} 40' 01'', 7$$

Attrazione locale.

Mediante i dati forniti dall'Istituto Geografico Militare, e con gli elementi precedentemente riportati, si deduce quanto segue

Latitudine di Tortona	{	astronomica $\varphi_a = 44^{\circ} 53' 44'', 6$ geodetica $\varphi_g = 44 \ 53 \ 35, 2$ $\xi = \varphi_a - \varphi_g = + 9'', 4$
Azimut della direzione a Spineto	{	astronomico $\alpha_a = 178^{\circ} 40' 01'', 7$ geodetico $\alpha_g = 178 \ 40 \ 14, 1$ $\alpha_a - \alpha_g = - 12'', 4$

Con questi valori le componenti dell'attrazione locale e la sua grandezza risultano i seguenti:

$$\xi = + 9'', 4 \quad \eta = - 12'' 4 \quad \theta = 15'', 6$$

mentre l'azimut ellissoidico del piano dell'attrazione stessa diviene

$$A = 307^{\circ} 03' 50'', 9$$

Determinazione della longitudine di Tortona su Greenwich

La determinazione della longitudine di Tortona su Greenwich, mediante la ricezione dei segnali europei di tempo, fu basata sulle due stazioni internazionali di Bordeaux e di Rugby: pur tuttavia qualche interruzione nelle ricezioni per parte della prima di queste due stazioni, ci indusse a tener conto dei soli segnali dati da Rugby, come appare dalla tabella che riportiamo qui sotto, dove in succinto sono trascritti gli elementi principali della determinazione.

Stazione trasmittente di Rugby.

DATA	Ora siderale locale ricezione 1° segnale	Ora Greenwich 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich	Andamento astron.	Andamento R. T.	Andamento medio	Correzione ora ricezione 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich corretta
24 luglio 1933	6 ^h 36 ^m 59 ^s , 325	6 ^h 01 ^m 41 ^s , 505	0 ^h 35 ^m 17 ^s , 820	0 ^s , 0420		0 ^s , 0420	+ 11 ^s , 038	0 ^h 35 ^m 28 ^s , 858
24 »	14 38 17, 817	14 03 00, 348	17, 469	0, 0420	0, 0437	0, 0428	+ 11, 357	28, 826
25 »	6 40 54, 717	6 05 38, 059	16, 658	0, 0459	0, 0505	0, 0482	+ 12, 131	28, 789
25 »	14 42 13, 237	14 06 56, 897	16, 340	0, 0459	0, 0397	0, 0428	+ 12, 471	28, 811
26 »	6 44 49, 997	6 09 34, 616	15, 381		0, 0598	0, 0598	+ 13, 410	28, 791

I valori elencati nell'ultima colonna danno come valor medio della longitudine della stazione, rispetto a Greenwich

$$0^h 35^m 28^s, 815 = 8^{\circ} 52' 12'', 22.$$

Tenuto poi conto della nota formola

$$\Delta \lambda = \frac{r \operatorname{sen} (A' - \gamma)}{N \cos \varphi' \operatorname{sen} i''},$$

la riduzione del risultato precedente al centro trigonometrico, viene ad importare $-4'', 4$; onde ne conseguè per la longitudine astronomica di Tortona rispetto a Greenwich, il valore

$$\omega_a = 8^{\circ} 52' 07'', 825.$$

Pertanto dal raffronto di questo risultato coi dati forniti dall'Istituto Geografico otteniamo

longitudine astronomica di Tortona	$\omega_a = 8^{\circ} 52' 07'', 825$
» geodetica »	$\omega_g = 8^{\circ} 52' 18'', 577$
e quindi . . .	$\omega_a - \omega_g = -10'', 752$

Sostituendo i dati ora e prima calcolati nella nota equazione di Laplace, si ottiene

$$(\alpha_a - \alpha_g) - (\omega_a - \omega_g) \operatorname{sen} \varphi = -4'', 8$$

Ripartendo, infine, questo residuo di chiusura nel valore ottenuto per la differenza $\alpha_a - \alpha_g$ fra i due azimut astronomico e geodetico, e ripetendo i calcoli, si ottengono, come conclusione, i seguenti valori, che riterremo definitivi

$$\begin{aligned} \xi &= +9'', 4 & \eta &= -10'', 0 & \theta &= 13'', 8 \\ A &= 313^{\circ} 07' 28'' \end{aligned}$$

La stazione astronomica di Tortona, di cui nella presente Nota, fu eseguita a corredo della serie di stazioni da me compiute lungo il meridiano di Mondovì, i cui risultati sono tutti esposti in questi Rendiconti, a cominciare dal 1926.

La stazione di Tortona chiude la serie anzidetta.

Geologia. — *Sulla presenza del Cretaceo medio in Cirenaica.*
Nota di M. MARCHETTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. D'ACHIARDI.

Per incarico del Governo della Cirenaica il prof. G. Stefanini ed io, quali membri della Commissione per lo studio agrologico della Colonia, abbiamo eseguite due campagne di rilievo geologico estese alla Cirenaica, Marmarica e Sirtica (maggio-giugno 1933 e febbraio-giugno 1934) compiendo una rete di itinerari (km. 16.000 circa) che servissero di base per una carta geologica sommaria della Colonia.

Nella prima quindicina del giugno 1933, dopo la partenza dalla Colonia del prof. Stefanini, chiamato ad altri incarichi, mi è stato possibile con un itinerario spinto da Barce verso Sud fino a Gerdes el Abid, accertare la presenza del Cretaceo medio; nella campagna del 1934 ho ripreso in esame tale zona con particolare attenzione, trovando una conferma alle osservazioni dell'anno precedente e rinvenendo un altro affioramento cretaceo esteso alla porzione Sud della zona compresa fra Gerdes ul Gerrari e Maraua.

Gebel el Abid. — Seguendo la pista camionabile per la ridotta di Gerdes el Abid si raggiunge il piede del secondo gradino, dopo circa 13 km. da Barce, in corrispondenza dell'Uadi Sidi Selima e da qui il percorso si svolge nel fondo dell'Uadi fino alla testata. I fianchi del solco vallivo risultano costituiti esclusivamente da calcari eocenici compatti, generalmente subcristallini e cristallini, talvolta un po' grossolani, o leggermente marnosi, di colore bianco, grigio o giallastro. Abbondano in questi calcari le nummuliti; a questo proposito va ricordato il livello di calcari giallastri grossolani e compatti saccaroidi, con grosse nummuliti, che si rinviene al 19° km. circa.

Gli strati hanno un andamento generalmente sub-orizzontale con ondulazioni piccole, ma ben distinte in alcuni tratti del percorso. Essi assumono invece una inclinazione molto marcata alla testata dell'Uadi, poco dopo il valico dal quale si scende alle conche di Got Sas, dove si notano calcari bianchi compatti conchigliacei (*Ostrea sp.*, *Holectypus sp.*) che inclinano di 35° circa verso N-NO; questi calcari, in banchi di circa un metro di potenza, si alternano con strati più erodibili (calcari terrosi) così che sporgono solo con le testate i calcari conchigliacei.

Percorsi ancora due km., dal riempimento terroso della prima conca di Got Sas affiora un lembo di calcari compatti, grigi, leggermente marnoso-

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1925.

arenacei fossiliferi (*Trigonia* abbondante, *Pecten*, *Cardium* ecc.); alla base di tale strato si ha un banco di ostriche (*Alectryonia*) e quindi marne giallastre con modelli di *Cyprina*, *Mastra* ed echini mal conservati. Dall'insieme della fauna ho potuto distinguere:

Arca sp.
Pecten curvatus GEINITZ
Neithea cfr. *Dutrugéi* COQ.
Alectryonia dichotoma BAYLE
Ostrea sp.
Trigonia scabra LAMK.
Trigonia limbata D'ORB.
Cyprina Barroisi COQ.
Cyprina Blanckenhorni PER. et FONT.
Roudaireia auressensis COQ.
Cardium Combei LARTET var. n.
Cardium hillanum SOW.
Cardium sp.
Mastra Moevusi (?) COQ.
Mastra cfr. *tripartita* SOW.

Questa piccola fauna denota, malgrado il numero non grande di specie, la presenza del Cretaceo, riferibile con ogni probabilità alla porzione inferiore del Senoniano.

Seguono altri affioramenti di roccia, con facies litologica simile alle precedenti, e generalmente fossiliferi; tali strati hanno una disposizione isoclinale così che si discende nella serie fino a una strettoia che costituisce il passaggio per la seconda conca. A un km. dalla località precedente s'incontra una seconda località fossilifera in terreni calcarei marnoso-arenacei grigi e giallastri compatti. Vi ho raccolto:

Natica sp.
Turritella cfr. *subdifficilis* BASSE
Arca sp.
Neithea Shawi PERV.
Pecten curvatus GEINITZ
Lima aff. *itieriana* PICTET et ROUX
Lima Grenieri COQ.
Picnodonta vesiculosa SOW.
Exogyra columba LMK.
Anomia subtruncata D'ORB.
Trigonia Ethra COQ.
Roudaireia (?) sp.

Crassatella Falconieri (?) LARTET

Crassatella sp.

Cardium hillanum SOW.

Dosinia Delettrei COQ.

Corbula sp. (n. sp.).

Presso questa località fossilifera gli strati hanno una leggera immersione (10°) verso S-O. La fauna nettamente cenomaniana mostra chiaramente come rispetto alla precedente si sia discesi nella serie stratigrafica mentre la diversa immersione degli strati, che si inizia nella strettoia fra le due conche, chiarisce il motivo tettonico ad anticlinale della quale nella strettoia stessa cadrebbe la cerniera.

I valori stratigrafici riportati sopra non sono però esattamente opposti mostrando invece una componente di immersione verso ovest, obliqua rispetto all'asse, che così viene ad abbassarsi procedendo verso occidente, come conferma l'osservazione sul terreno. In tale direzione infatti, poco prima della gola dell'U. Dacchan (km. 5 dalla località precedente), si trova una fauna riferibile al Senoniano inferiore e 500 m. verso ovest appare l'Eocene in contatto anormale per faglia. Ecco pertanto le specie che finora ho riconosciute all'U. Dacchan:

Tissotia sp.

Trigonarca sp.

Trigonarca cfr. *Galdrina* D'ORB.

Avicula sp.

Modiola tipica FORBES.

Pecten curvatus GEINITZ.

Neithea cfr. *Faujasi* PICT ET CAMP.

Pycnodonta vesicularis LMK.

Alectryonia dichotoma BAYLE

Exogira cfr. *Tamalleni* PERV.

Crassatella matercula MAY EYM.

Crassatella macrodonta SOW.

Crassatella sp.

Cardium aff. *Pauli* COQ.

Arcopagia sp.

Pholadomya sp. ind. (an nova).

Tornando all'itinerario in questione, si trovano ancora, dopo Got Sas, calcari con facies simile alle precedenti finchè, a 5 km. dalla ridotta di Gerdes el Abid, si incontrano calcari ceroidi, grigi chiari a frattura liscia, in grossi banchi evidenti che presentano una leggera immersione (8°) verso S-O.; tali calcari compatti si seguono per lungo tratto e si ritrovano a co-

stituire la collina sulla quale è posta la ridotta di Gerdes el Abid. Qui gli strati appaiono sub-orizzontali ed i calcari compatti sovrastano un banco di calcare candido farinoso friabile, ricchissimo di *Ostrea*, ma povero di altri fossili; vi ho raccolto:

Hemiaster cubicus DESOR var. *depressa* FOURTAU
Avellana sp.
Alectryonia cfr. *diluviana* LART.
Plicatula Auressensis COQ.
Picnodonta vesiculosa SOW.
Neithea Shawi PERV.
Pholodomya Vignesi WOODS
Anisocardia aquilina COQ.
Venus cfr. *Reynesi* COQ.
Venus sp.

e malgrado l'esiguo numero di specie determinate credo non vi sia dubbio sull'attribuzione al Cenomaniano anche per questi strati che segnano il limite estremo dell'itinerario descritto.

Resta in conclusione accertato nell'interno del Gebel el Abid un ampio affioramento di Cretaceo nel quale è stata riconosciuta la presenza del Cenomaniano e del Senoniano, ma non avendo ultimato ancora lo studio dei materiali paleontologici raccolti in queste ed altre località della zona, non ritengo opportuno entrare in dettagli stratigrafici per i quali occorre lo studio completo dei fossili e l'elaborazione dei rilievi di campagna. Lo stesso dicasi per la disposizione tettonica; dalle poche misure di strati riportate e da uno sguardo generale appare tuttavia: che la direzione degli strati si mantiene parallela all'orlo del secondo ciglione; che l'immersione più notevole del Cretaceo si ha nella porzione periferica nord occidentale, mentre nell'interno gli strati, divenuti sub-orizzontali, tendono, con ondulazioni secondarie, a declinare dolcemente verso Sud. Lungo l'itinerario descritto quindi, gli strati cretacei sembrano presentare l'andamento di una piega a ginocchio o di una flessura, che ripete il motivo tettonico della piega di Tocra e della faglia di Barce, alle quali risulta parallela.

Zona di Mgiahir. — L'altro affioramento di terreni cretacei è stato da me incontrato nell'aprile 1934, lungo l'itinerario Gerdes ul Gerrari-Mgiahir-Maraua. Proveniendo da Slonta si seguono i noti terreni oligocenici fino alla ridotta di Gerdes ul Gerrari dove, nella scarpata, affiorano potenti banchi di calcari nummulitici bianchi e grigi talora compatti, ma più spesso grossolani, specialmente alla base. Proseguendo lungo la pista per Maraua si comincia a discendere altimetricamente e stratigraficamente; infatti in corrispondenza di Gerdes ul Gerrari il Gebel forma una specie di gradino meridionale che si

continua fino a Sira e oltre e alla cui base corrisponde il limite superiore dei terreni eocenici. L'eocene, prima d'ora non conosciuto nella regione a Sud dello spartiacque cirenaico, si segue per un certo tratto lungo la pista dove si manifesta con affioramenti di calcari, in prevalenza giallastri e compatti, con nummuliti.

Seguono calcari bianchi terrosi e quindi (km. 17 da Gerdes ul Gerrari), in corrispondenza dell'U. el Auagh, si nota, nell'incisione del solco vallivo, una serie di strati sottili costituiti da calcari compatti marnoso-arenacei grigi e giallastri, calcari teneri molto marnosi con straterelli fogliettati e intercalazioni arenacee a modelli, calcari grigi ceroidi ecc. La posizione stratigrafica e i caratteri litologici non lasciano dubbi sull'attribuzione di questi terreni al cretaceo e tale asserzione è confermata dai rari fossili raccolti. Fra questi, malgrado il cattivo stato di conservazione, vi ho potuto riconoscere:

Nerinella sp.
Acteonella sp.
Aporrhais sp.
Arca Thevestensis COQ.
Arca trigona SEG.
Anomia subtruncata D'ORB.
Anisocardia aquilina COQ.
Cardita cfr. *Nicasei* COQ.
Lucina sp.
Cardium Coquandi SEG.
Cardium Pauli COQ.
Cardium cfr. *productum* Sow.
Pholadomya sp.

La fauna mostra la presenza del Cenomaniano che rappresenta probabilmente la parte più antica dei terreni cretacei in questa zona.

Proseguendo lungo l'itinerario si traversa obliquamente la maggiore lunghezza dell'affioramento tagliando l'asse del complesso anticlinale che, analogamente a quanto abbiamo osservato per Gerdes el Abid, costituisce il motivo tettonico determinante l'affioramento di tali terreni. I calcari con *facies* litologica riferibile al cretaceo, continuano per lungo tratto verso O-S-O fin oltre la ridotta di Mgiahir; da qui proseguendo nella pista per Maraua, si taglia - con marcia verso O-N-O - il ciglione che recinge a nord una grande conca, e lungo il corso di un uadi, si risale la serie i cui strati immergono discretamente verso N-O (km. 30 da Gerdes ul Gerrari).

Subito dopo s'incontrano calcari terrosi in strati suborizzontali che si ricollegano senza discontinuità con i livelli oligocenici di Maraua, probabilmente trasgressivi sul Cretaceo.

Chimica. — *Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici* ⁽¹⁾. Nota II di C. SANDONNINI e V. N. BORGHELLO, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

I risultati ottenuti nella dealogenazione elettrolitica dei derivati del metano e dell'etano ci hanno indotti a prendere in esame anche composti alogenati con funzioni ossigenate, per avere un confronto tra la riducibilità di questi e di semplici funzioni alogenate. Per quanto riguarda il grado di ossidazione e per le considerazioni fatte altrove, naturalmente l'esacloroetano potrebbe essere raffrontato all'acido tricloracetico il pentacloroetano all'acido dicloracetico o alla tricloraldeide e così via. Hood ⁽³⁾ aveva già studiato la dealogenazione dell'acido monocloracetico con diversi catodi, trovando che il rendimento aumenta coll'aumentare della sopratensione dell'idrogeno, Brandt ⁽⁴⁾ brevettò un procedimento elettrolitico per la preparazione dell'acido dicloracetico dal tricloracetico Doughty e Derge ⁽⁵⁾ con catodi di rame ridussero l'acido tricloracetico a dicloracetico con un rendimento di circa 80%. Non si ha alcuna notizia sulla dealogenazione elettrolitica di aldeidi e alcoli alogenati.

D'altra parte è ben noto che la riduzione del gruppo carbossilico e gruppo carbonilico è possibile elettroliticamente. Interessanti a questo proposito sono i lavori di Low ⁽⁶⁾, di Scheps ⁽⁷⁾, di Hibbert e Read ⁽⁸⁾ e specialmente, per quanto ci riguarda, quelli di Goro Shima ⁽⁹⁾ il quale ridusse la formaldeide e l'acetaldeide nei corrispondenti alcoli con buoni rendimenti.

Il dispositivo sperimentale era il solito usato per la dealogenazione dei semplici derivati alogenati. Analogamente alla nota precedente nelle tabelle che seguono sono dati i risultati ottenuti: nella prima colonna sono i numeri di riferimento delle singole esperienze, nella seconda le quantità di sostanza disciolta in 200 cc. di liquido catodico, nella terza il cloro totale corrispondente, nella quarta l'idrogeno in cc. necessario per la dealogena-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(3) « J. Chem. Phys. », 36, 927.

(4) « Zbl. », 1912, I, 1742.

(5) « J. Am. Chem. Soc. », 53, 1594.

(6) « J. Chem. Soc. », 101, 1016.

(7) « Ber. », 46, 2564.

(8) « J. Am. Chem. Soc. », 46, 983.

(9) « Mem. Col. Kyoto », 9, 183.

zione completa, nella quinta la durata dell'elettrolisi, nella sesta il materiale che costituiva il catodo, nella settima l'intensità di corrente, nell'ottava la quantità totale di idrogeno prodotto, nella nona l'idrogeno usato e non sviluppato, nella decima la quantità di cloro ionizzato e finalmente nella undicesima la quantità di idrogeno corrispondente a questo.

TABELLA I.
Acido tricloracetico.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.	11
1	3.00	1.954	1235	6.40	Pt	2	5560	900	0.982	620
2	4.88	3.177	2001	1.25	Pb	2	1190	1150	1.710	1080
3	5.00	4.334	2741	0.50	Cu	2	700	700	1.012	639

Per meglio seguire l'andamento della reazione vennero fatte esperienze anche partendo dagli acidi di- e monocloracetico.

TABELLA II.
Acido dicloracetico.

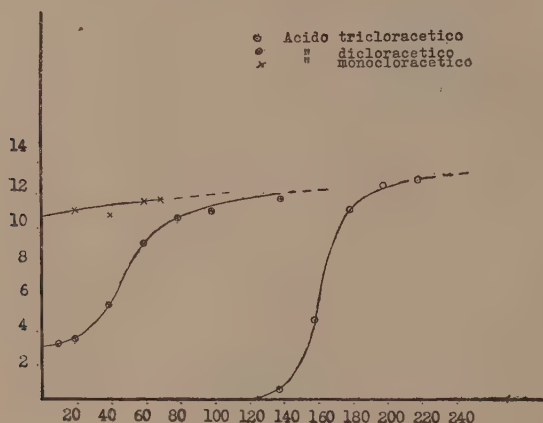
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3.10	1.703	1075	1.15	Pt	2	1050	—	0.361	223
2	4.96	2.728	1724	2.20	Pb	2	1960	1885	1.191	752
3	5.01	2.746	1736	4.15	Cu	2	3570	670	0.997	630

TABELLA III.
Acido monocloracetico.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	5.209	1.955	1235	5.40	Pb	2	4760	900	1.365	862
2	5.000	1.875	1185	6.15	Cu	2	5250	190	0.126	79

In queste condizioni l'acido monocloracetico con catodi di platino non viene praticamente attaccato.

In queste esperienze venne mantenuta un'intensità costante di due ampères; tenuto conto della temperatura (14-16°) e della tensione del vapor d'acqua, si può ritenere che lo sviluppo teorico di idrogeno al catodo, in cifra tonda sia di cc. 14 al minuto. Ad intervalli di dieci minuti veniva misurata la quantità di idrogeno sviluppato e l'elettrolisi veniva sospesa quando questa si avvicinava molto alla quantità teorica. I risultati di queste determinazioni, fatte usando catodi di piombo, sono raccolti nel diagramma I.



L'acido tricloracetico, com'era da attendersi, è quello più facilmente attaccabile. Dal facile computo che si può fare dai valori raccolti nelle tabelle e dai dati riassunti nel diagramma risulta che con l'intensità usata lo sviluppo di idrogeno nella riduzione dell'acido tricloracetico comincia quando un atomo di cloro si è ionizzato, ammettendo, come è lecito ammettere dal fatto che nei primi tempi dell'elettrolisi l'idrogeno consumato corrisponde al cloro ionizzato, che tutto l'idrogeno consumato abbia servito totalmente alla sola dealogenazione; quando cioè l'acido tricloracetico si è trasformato in dicloracetico. Proseguendo l'elettrolisi il rapporto tra l'idrogeno prodotto e quello consumato nella reazione diviene allora praticamente eguale a quello che si ha per la riduzione dell'acido dicloracetico.

Anche con elettrodi di piombo la dealogenazione dell'acido monocloracetico avviene assai lentamente, ma, benchè non si sia mai raggiunta, si può facilmente prevedere che, come altri sperimentatori avevano trovato, si potrebbe ottenere con questi catodi la dealogenazione completa.

Con catodi di rame si hanno buoni rendimenti soltanto coll'acido tricloracetico e dicloracetico, con elettrodi di platino in queste condizioni si hanno discreti rendimenti soltanto col tricloracetico.

Nei prodotti finali non si è mai riscontrato alcun prodotto di riduzione del carbossile. I gas catodici erano costituiti da solo idrogeno.

Da questi risultati si deduce che la dealogenazione degli acidi cloracetici avviene con maggior facilità dei semplici derivati alogenati del metano e dell'etano. Mentre per es. il metilcloroformio in queste condizioni non viene ridotto nemmeno con catodi di piombo l'acido tricloraacetico viene dealogenato rapidamente anche con catodi di platino.

Abbiamo quindi voluto vedere come si comportavano composti alogenati con funzioni meno ossidate di quella carbossilica, sottoponendo all'esperienza soluzioni di cloralio idrato in acido solforico al 10 %.

I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella IV.

TABELLA IV.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	5.00	3.213	2030	1	Pt	2	840	niente	0.00	0.0
2	5.00	3.213	2030	1	Ni	2	840	30	tracce	—
3	5.00	3.213	2030	2.30	Cu	2	2100	445	0.504	318
4	5.00	3.213	2030	0.50	Pb	2	700	583	0.780	505
5	10.0	6.427	4060	1.15	Pb	3	1575	1350	1.778	1123
6	5.0	3.213	2030	4.20	Pb	3	5460	?	1.383	873
7	10.0	6.427	4060	4.30	Pb	3	5670	?	2.118	1528
8	5.0	3.213	2030	5.40	Pb	2	4760	1800	1.803	1139
9	10.0	6.427	4060	8.20	Pb	2	7000	3500	3.082	1895

In questo caso oltre gli elettrodi di platino anche quelli di nichel e di rame si dimostrano inattivi, ponendo in risalto il fatto che il grado di ossidazione della funzione ossigenata è di grande importanza sulla possibilità di dealogenazione della funzione alogenata unita alla prima.

Nell'esperienza n. 4, condotta per breve periodo di tempo, dalla corrispondenza tra cloro ionizzato e idrogeno consumato si deduce anche in questo caso che oltre alla dealogenazione non avviene alcun'altra reazione, come p. es. la riduzione del gruppo aldeidico, che, come si è visto, era già stata ottenuta con catodi di piombo. Per le ragioni considerate nella nota precedente questo controllo non è più attendibile per esperienze di lunga durata ma dai dati ottenuti pare che tale corrispondenza si conservi almeno sino alla trasformazione in dicloraldeide.

La declorurazione ulteriore pare avvenire con rendimenti assai inferiori come risulta specialmente dal confronto tra idrogeno prodotto e idrogeno consumato. Il consumo di idrogeno poi cessa quasi completamente anche prima che si siano ionizzati due atomi di cloro per ogni molecola di clo-

ralio. Perdurando a lungo nei tentativi di dealogenazione, nei gas catodici si riscontrano piccole quantità di metano e di gas alogenati, che non si sono potuti identificare.

Tentativi fatti per riconoscere i prodotti finali anche usando quantità superiori di cloralio a quelle riportate nella tabella IV non hanno portato ad isolare alcun composto allo stato di purezza. D'altra parte è ben noto che nelle condizioni sperimentali seguite tanto la dicloroacetaldeide come la monocloroacetaldeide, che si potevano formare, danno facilmente prodotti di polimerizzazione e di condensazione non facilmente identificabili. Questi inoltre si riducono molto probabilmente con maggior difficoltà delle corrispondenti aldeidi; infatti anche se non avviene la loro dealogenazione completa, dovrebbe subentrare ad essa la riduzione del gruppo aldeidico, poichè in condizioni sperimentali analoghe alle nostre Goro Shima e altri ottennero la riduzione delle aldeidi ad alcoli con buon rendimento anche usando una intensità di corrente superiore a quella usata da noi. Al contrario nel nostro caso anche usando catodi di piombo e proseguendo a lungo l'elettrolisi si ha un consumo assai piccolo di idrogeno anche prima di quando la dealogenazione si può ritenere completa. Soltanto usando catodi di piombo nei prodotti finali si sono potute riscontrare qualitativamente piccole quantità di aldeide acetica, ma dai saggi fatti per riscontrare piccole quantità di alcoli non si è potuto avere nessun dato conclusivo.

Mentre appare certo che la dealogenazione del cloralio è la reazione che per prima avviene e con buoni rendimenti su catodi di piombo, non si può stabilire se avvenga preferenzialmente la dealogenazione tanto della di- come della monocloraldeide o la loro riduzione negli alcoli rispettivi.

Data la loro grande instabilità nelle condizioni sperimentali seguite, non si è ritenuto opportuno fare esperienze separate partendo dalle due sostanze pure.

La monocloridrina del glicole nelle stesse condizioni non viene dealogenata.

Per poterli meglio raffrontare tra loro, riteniamo opportuno raggruppare i risultati esposti in questa Nota e in quella precedente in un solo quadro; le sostanze tra parentesi sono quelle che si sono riscontrate solo in tracce nei prodotti finali.

SOSTANZE USATE	SOSTANZE OTTENUTE
tetracloruro di carbonio	cloroformio, cloruro di metilene (cloruro di metile, metano)
metilcloroformio	metilcloroformio inalterato
esacloroetano	tetracloroetilene
pentacloroetano	tricloretilene
tetracloroetano	dicloretilene
bromuro di etilene	etilene
acido tricloraacetico	acidi dicloro, monocloroacetico e acido acetico
cloralio	di- e monocloraldeide (aldeide acetica)
monocloridrina del glicole	monocloridrina del glicole inalterata.

Pure interessante è un confronto dei risultati ottenuti usando diversi catodi per una stessa sostanza.

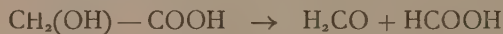
SOSTANZA USATA	CATODO	PRODOTTI DI DEALOGENAZIONE
Tetracloruro	Pt	—
»	Cu	cloroformio (metano)
»	Pb	cloroformio; cloruro di metilene (cloruro di metile, metano)
cloralio	Pt	—
»	Cu	(dicloro e monocloroaldeide)
»	Pb	dicloro e monocloroaldeide (aldeide acetica)
acido tricloraacetico	Pt	acido di- e monocloroacetico
»	Cu	acido di- e monocloroacetico (acido acetico)
»	Pb	acido di-, monocloroacetico, acido acetico.

Dal complesso dei risultati oltre alle conclusioni già esposte nella Nota precedente appare chiaramente che per una data sostanza si ha dealogenazione tanto più profonda quanto più elevata è la sopratensione dell'idrogeno sul catodo usato. Si può inoltre concludere che lo stato di ossidazione di uno degli atomi di carbonio in una concatenazione ha un'evidente influenza sulla reattività dell'altro e ciò corrisponde a una regolarità già nota e trovata per altre vie, così mentre il metilcloroformio non viene dealogenato nemmeno coi catodi a maggior sopratensione, l'acido tricloraacetico viene facilmente attaccato con elettrodi di platino. Inoltre la riduzione delle funzioni ossidate appare assai più difficile della sostituzione di atomi di alogeno con atomi di idrogeno nel radicale unito alle prime e forse per questa stabilità della funzione ossigenata la dealogenazione di queste sostanze avviene non come per i derivati dell'etano ma come per i derivati del metano.

Chimica. — *Sulla costituzione del monoclورو di zolfo e sui derivati dell'ipotetico acido $(S\cdot OH)_2$* ⁽¹⁾. Nota di G. GIACOMELLO, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Diverse sono le ipotesi fatte sulla costituzione del monoclورو di zolfo ed alcune sono anche suffragate da dati sperimentali. Matossi e Aderhold⁽³⁾ e Mayer⁽⁴⁾ basandosi sull'effetto Raman, gli attribuiscono la formola analoga al cloruro di tionile, altri⁽⁵⁾, basandosi su misure di paracoro e di costante dielettrica, sono incerti nell'attribuirgli o la formola a legame semipolare del tipo $\bar{S} - \overset{+}{S} : \overset{Cl}{Cl}$ o quella simmetrica $ClS - SCl$. I dati fisici da soli non sembrano sufficienti a decidere la questione. Ritenni perciò necessario riprendere gli studi sul comportamento chimico di questa sostanza cercando di sottoporla a reazioni più blande di quelle cui fu sottoposta finora.

Noack⁽⁶⁾ facendo reagire l'acqua sul monoclورو di zolfo ottenne dei prodotti che, sia dal lato qualitativo che dal lato quantitativo, corrispondevano ai composti che si ottengono nel liquido di Wackenroder allorchè si fanno reagire l'idrogeno solforato e l'anidride solforosa nei rapporti molecolari 1:1. Questo fatto, confermato da Neumann e Fuchs⁽⁷⁾, è di somma importanza poichè dice che per idrolisi del cloruro di zolfo si ottengono gli stessi prodotti che originano il liquido di Wackenroder e cioè quantità equimolecolari di anidride solforosa e di idrogeno solforato, che probabilmente derivano dalla decomposizione del composto intermedio $(SOH)_2$, molto instabile. Tale decomposizione non deve stupire, poichè di analoghe se ne conoscono moltissime sia in chimica organica che in chimica inorganica: così l'acido glicolico si scinde in acido formico ed aldeide formica:



ed i composti rameosi in rame metallico e rame rameico:



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(3) MATOSSÌ e ADERHOLD, «Z. Physik», 68, 683 (1931).

(4) MAYER, «Z. Anorg. Chem.», 203, 146 (1931).

(5) H. SPONG, «J. of the chem. Soc.», 490 (1934).

(6) NOACK, «Z. Anorg. Chem.», 146, 239 (1925).

(7) NEUMANN e FUCHS, «Z. angew. Chem.», 38, 277 (1925).

Della esistenza del composto $H_2S_2O_2$ è fatta menzione in un recentissimo lavoro di Deines e Grassmann ⁽¹⁾ che ne avrebbero preparato la soluzione di un formaldeido-derivato facendo agire in ambiente acquoso-alcalino idrogeno solforato e anidride solforosa nei rapporti molecolari 1 : 1. L'acido libero, però data la sua instabilità non fu mai isolato.

Scopo delle ricerche che seguono è quello di dimostrare se non la sua esistenza, l'esistenza di sostanze che si possono considerare suoi derivati. Visto che l'acqua reagiva in modo troppo violento, tanto che i prodotti di idrolisi primaria si decompongono subito in una serie di altre sostanze, si cercò di escludere questo reagente preparando gli esteri dell'ipotetico acido $(SOH)_2$. All'uopo fu fatto reagire in ambiente benzenico ed a bassa temperatura, il monocloruro di zolfo su delle sostanze organiche ossidrilate. Anche Lengfeld ⁽²⁾ si era messo su questa via preparando i derivati metilico ed etilico per azione dei rispettivi alcoli sul monocloruro, ma le sostanze che ottenne erano così labili e di così difficile purificazione, che le ricerche non proseguirono più oltre.

Dopo alcuni tentativi, non riusciti, con gli alcoli superiori grassi, provai a far reagire il fenolo e fortunatamente riuscii nell'intento. Come il fenolo, salvo qualche eccezione, si comportano anche altre sostanze aromatiche a carattere fenolico.

Prima di passare alla parte sperimentale sarà bene citare una reazione del monocloruro di zolfo studiata da Matignon e Bourion ⁽³⁾ e che sarà di ottima guida nell'indirizzarci a scegliere la valenza dello zolfo in questo composto. La reazione decorre quantitativamente secondo lo schema seguente



e spogliata dalle parti accessorie potrebbe rappresentarsi come una comune reazione di dismutazione in cui lo zolfo si ossida a spese di una quantità equivalente che si riduce



da cui si vede chiaramente che lo zolfo nel monocloruro non può essere che monovalente positivo, e di questo si parlerà più avanti.

PARTE SPERIMENTALE.

Reazione del monocloruro di zolfo col fenolo. — Ad una soluzione benzenica di fenolo assolutamente anidra, fu aggiunta, o poco a poco, agitando

(1) DEINES e GRASSMANN. « Zeitsch. anorg. u. allg. Chemie », 220, 337 (1934).

(2) LENGFELD, « Ber. », 28, 450 (1895).

(3) MATIGNON e BOURION, « C. R. », 138, 671, 760 (1904); « Ann. Chim. Phys. »

(8), 20, 547, 21, 49.

energicamente e raffreddando con neve, una soluzione pure benzenica di S_2Cl_2 . Allorchè le due soluzioni vengono a contatto il liquido diventa rosso bruno; la colorazione scompare tosto ed al fondo del recipiente si deposita una sostanza biancastra. L'acido cloridrico che si mette in libertà viene scacciato con una corrente di azoto.

Quando le quantità di fenolo e di monocloruro di zolfo raggiungono i rapporti molecolari 2 : 1 la reazione viene sospesa.

Si raccoglie il precipitato filtrandolo dalla soluzione benzenica soprastante, lo si lava con benzolo per tre volte e si secca nel vuoto.

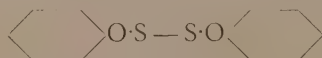
La sostanza è insolubile in acqua, poco solubile nel benzolo, freddo, solubile in quello caldo e solubilissima in alcool e diossano. Punto di fusione: 125° .

Determinazione dello zolfo. — Decomposi la sostanza col metodo Gasparini⁽¹⁾ e ne determinai la percentuale di zolfo. Due determinazioni mi diedero i seguenti risultati: 24.8 %, 25.1 %.

Determinazione del peso molecolare. — Questa fu fatta crioscopicamente in diossano; si ottenne il valore di 243.

Reazioni. — La sostanza si scioglie, lentamente a freddo, più rapidamente a caldo, negli alcali; dalla soluzione, trattata con acido cloridrico o con anidride carbonica, precipita una sostanza che fonde a 148° e che contiene la stessa percentuale di zolfo del composto di partenza. Riscaldando per alcun tempo la soluzione alcalina della sostanza fino all'ebollizione, si ottiene un liquido che per acidificazione manda un forte odore di idrogeno solforato. Facendo bollire a ricadere una soluzione benzenica satura a caldo, per raffreddamento cristallizza una sostanza che fonde verso i 150° .

Questi fatti sono alquanto interessanti poichè ci dicono che tanto per ebollizione con alcali, quanto per ebollizione con benzolo, ha luogo la formazione del p, p diossi-difenil-disolfuro studiato da Leuckart⁽²⁾ e che fonde a 150° ; in più, le costanti fisiche del composto preparato si scostano molto da quelle dei suoi isomeri finora conosciuti, per cui si è indotti ad attribuirgli una formola di struttura differente e precisamente quella che corrisponde ai derivati eterei dell'ipotetico acido $HO\cdot S - S\cdot OH$



Questa sostanza teoricamente avrebbe un peso molecolare di 250.2; ed un contenuto in zolfo del 25.6 %, valori che stanno in buon accordo con quelli trovati.

Dal liquido benzenico di reazione fu allontanato il benzolo per evaporazione a pressione ridotta e si ottenne una sostanza resinosa a composizione poco costante.

(1) GASPARINI, « Gazz. Chim. It. », 37, II, 437 (1907).

(2) LEUCKART, « J. pr. Chem. » (2), 41, 196.

REAZIONE FRA α -NAFTOLO E MONOCLORURO DI ZOLFO. — Nel solito modo furono fatte reagire le due sostanze e si ottenne un precipitato che fondeva a 173° , aveva un contenuto in zolfo del 18.1% ed un peso molecolare di 359.6 in diossano. La sostanza che dovrebbe derivare dal monocloruro di zolfo e α -naftolo per eliminazione di acido cloridrico dovrebbe avere un contenuto in zolfo del 18.3% ed un peso molecolare di 350.1, valori che concordano coi trovati.

Dal liquido benzenico, per evaporazione a pressione ridotta, si ottiene una massa resinosa che si può purificare abbastanza bene lavandola ripetutamente con solfuro di carbonio. Rimane come residuo poco solubile in questo solvente un composto cristallino, avente le stesse costanti chimiche e fisiche di quello precedente. La prova di miscuglio mi portò alla conclusione che si tratta della stessa sostanza.

Osservazione. — Trattando la sostanza con idrato sodico, a poco a poco passa in soluzione; ad un certo momento però la soluzione si intorbidisce e ridiventa limpida per riscaldamento. Per precipitazione con acido cloridrico e con anidride carbonica si ottiene una massa resinosa, molle a composizione incostante di cui non fu possibile uno studio ulteriore.

REAZIONE FRA β -NAFTOLO E MONOCLORURO DI ZOLFO. — La reazione fu eseguita colle solite modalità; solamente per la poca solubilità del β -naftolo si dovette lavorare con una sospensione di questa sostanza in benzolo. Dopo alcune ore si separò, per filtrazione, il solvente ed il residuo fu trattato con alcool, il quale portò in soluzione soltanto una parte: questa aveva un contenuto in zolfo del 10.8% . Il residuo invece aveva un contenuto superiore, ma non costante.

La parte solubile in alcool si scioglie lentamente negli alcali ed il prodotto che precipita per acidificazione ha un punto di fusione di 184° . Lo zolfo calcolato pel composto $C_{10}H_7O \cdot S \cdot OC_{10}H_7$ è del 10.06% .

La sostanza rimasta in soluzione benzenica, dopo evaporato il solvente a pressione ridotta ha l'aspetto di un olio denso, colorato in bruno che in essiccatore dopo alcune ore comincia a cristallizzare dando una massa bruna scura. Per ottenere un prodotto più puro asportai ripetutamente con alcool la parte resinosa (più solubile) ed ottenni una sostanza contenente il 16.65% di zolfo, ma non avente un punto di fusione netto, poichè verso i 200° rammoliva solamente. Per il composto $C_{10}H_7O \cdot S - S \cdot OC_{10}H_7$, lo zolfo calcolato è del 18.31% . La sostanza esaminata non doveva essere che un miscuglio di più composti e data la difficoltà della loro separazione lo studio non proseguì più oltre.

REAZIONE DEL MONOCLORURO DI ZOLFO SUL TRIBROMOFENOLO E SUL GUAIACOLO. — Furono fatte le esperienze colle solite modalità, però il cloruro di zolfo non reagisce affatto col tribromofenolo e molto male col guaiacolo dal quale si ottiene una sostanza intensamente colorata in azzurro e la cui composizione, dato il rendimento molto scarso non è determinabile.

REAZIONE FRA IL P-CLOROFENOLO ED IL CLORURO DI ZOLFO. — Le due sostanze furono fatte reagire in soluzione benzenica molto diluita per evitare una reazione molto violenta. Si ottennero due prodotti di reazione, uno poco solubile in benzolo freddo, l'altro solubile. Il primo purificato fondeva a 122°, era solubile in soda e riprecipitava inalterato con acido cloridrico. Zolfo trovato: 12 %; Cloro: 25.5 %.

La sostanza cui corrisponde la formula seguente: $(\text{ClC}_6\text{H}_4\text{O})_2\text{S}$ avrebbe un contenuto in zolfo dell'11.17 % ed un contenuto in cloro del 24.7 %. La parte solubile in benzolo fu separata dal solvente per evaporazione a pressione ridotta. Si ottenne così un olio denso, giallo che col tempo cristallizzò parzialmente. I cristalli furono isolati, sciolti in alcool e precipitati frazionatamente con acqua. Si ottenne una sostanza bianca-giallognola che fondeva a 69°.

Fu fatta l'analisi quantitativa e fu trovato il 20.66 % in zolfo ed il 21.7 in cloro; dati che sarebbero per la formula seguente:



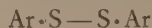
cui corrisponderebbe un contenuto in zolfo del 20.09 % ed un contenuto in cloro del 22.2 %.

REAZIONE FRA O-CRESOLO E MONOCLORURO DI ZOLFO. — Seguendo le solite modalità si ottenne un olio denso, giallo, di composizione incostante, facilmente decomponibile e non atto ad ulteriori ricerche.

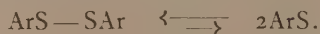
DISCUSSIONE DEI RISULTATI E CONCLUSIONE.

Come fu detto sin da principio, visto che i dati fisici potevano dar luogo a diverse interpretazioni, intrapresi lo studio dal punto di vista puramente chimico esaminando i composti che derivavano dal monocloruro di zolfo per azione di sostanze ossidrilate della serie aromatica. Si ottennero così dei composti che differivano profondamente da quelli già noti ed aventi la stessa formula bruta e che si dovrebbero considerare come i derivati dell'ipotetico acido $(\text{SOH})_2$, derivati che, opportunamente trattati, si isomerizzano coi disolfuri aventi costituzione analoga a quelli studiati da Schoenberg⁽¹⁾.

Questi composti hanno una formola simmetrica del tipo:



poichè in determinate circostanze possono esistere nella forma monomera ArS in equilibrio colla precedente:



(1) SCHOENBERG, « Ber. », 65, 1864 (1932); 66, 1932 (1933).

Non si farebbe nessuna affermazione azzardata se anche per i derivati del monocloruro di zolfo si ammettesse una formola simmetrica in cui il legame fra i due zolfi monovalenti positivi non sarebbe altro che un legame di polimerizzazione analogo a quello che esisterebbe fra i due atomi di mercurio monovalente del calomelano, legame che non influenzerebbe menomamente l'elemento dal punto di vista della valenza faradica e della cui natura, per ora, non si possono fare che ipotesi più o meno fondate.

Resta ancora da spiegarsi la formazione dei derivati monosolforati accanto ai derivati polisolforati che si ottengono facendo reagire il monocloruro di zolfo sul β -naftolo e sul p-clorofenolo.

È notorio che molte sostanze, specialmente in chimica organica, possono esistere in diverse forme fra loro in equilibrio questo fatto sembra abbia un'estensione maggiore di quello che comunemente si crede: a proposito è interessante riportare gli studi di Geib e Hardeck (1) sul perossido di idrogeno.

Per azione dell'idrogeno sull'ossigeno a bassissima temperatura questi autori hanno ottenuto una sostanza isomera all'acqua ossigenata nella quale si trasforma con buon rendimento a temperatura più elevata. Questo ci indicherebbe che anche per l'acqua ossigenata è possibile l'esistenza di più forme, il prevalere di una delle quali dipende dalle condizioni di ambiente. Va da sé che a seconda del prevalere di una o dell'altra di queste forme, muterà anche l'andamento delle reazioni che possono avvenire. Analogamente può accadere pel monocloruro di zolfo il quale potrebbe essere un miscuglio di due forme fra loro in equilibrio:



di cui la prima sarebbe un composto « di associazione » fra il bichloruro di zolfo e lo zolfo, la seconda invece il dimero del composto



Dai prodotti ottenuti è logico ammettere che delle due forme la II sia la più stabile e la preponderante; infatti nel caso del fenolo si ha di preferenza il derivato della forma II poichè la reazione è tanto veloce da potersi trascurare la trasformazione $\text{II} \rightarrow \text{I}$. Invece nel caso del β -naftolo, poco solubile in benzolo, e nel caso del p-clorofenolo, col quale si lavorò in soluzione molto diluita per evitare reazioni violente, la suddetta trasformazione non si può più trascurare per cui si avranno tanto derivati della forma I (che dovrebbe essere la più attiva) quanto quelli della forma II. Il composto « molecolare » I sarà quello che più facilmente potrà perdere dello zolfo e trasformarsi in bichloruro, che a sua volta darebbe i derivati mono-

(1) GEIB e HARTECK, « Ber. », 65, 1551 (1932).

solforati. D'altra parte lo zolfo libero, secondo gli studi di Bruni e Amadori è facilmente sommato dal monocloruro ⁽¹⁾: si otterrebbero così i derivati studiati da Angeli e Magnani ⁽²⁾ e da Henriques ⁽³⁾ che nel caso nostro corrispondono a quei composti resinosi di cui non si potè stabilire con sicurezza la costituzione.

Geologia. — *Linee tettoniche trasversali nell'Appennino Settentrionale.* Nota di R. SIGNORINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

L'andamento delle pieghe longitudinali che costituiscono l'Appennino Settentrionale con direzione fondamentale N-O S-E, subisce una serie di caratteristiche dislocazioni le quali si possono raggruppare in quattro ordini di fatti in relazione fra loro: 1° un progressivo sorgere di pieghe più esterne man mano che si procede da N-O a S-E; 2° flessioni delle direttrici tettoniche con spostamento verso N-E; 3° frequente immersione degli assi delle pieghe verso N-O; 4° direttrici tettoniche con andamento trasversale rispetto a quelle fondamentali, interessanti non già piccole aree locali ma gran parte della larghezza appenninica, in rapporto con zone trasversali di sollevamento e di depressione.

Scopo della presente Nota è di mettere in evidenza alcune principali di queste ultime zone trasversali e i loro caratteri, specialmente in rapporto con la formazione delle argille scagliose.

Nell'Appennino Parmense tra la Val Parma e la Val di Taro si osserva una generale immersione delle formazioni verso N-O.

Così le pieghe dei calcari nummulitici del gruppo del M. Sporno van sotto alle argille scagliose: a quelle tipiche argille scagliose tanto estese nelle colline emiliane, piene di frammenti di rocce varie anche con fossili mesozoici, di blocchi ofiolitici e talora granitici più o meno milonitizzati, e sulle quali poggiano direttamente terreni ora miocenici, ora oligocenici, ora anche dell'eocene superiore (calcari a Helminthoidi), in placche, sinclinali o conche.

La grande sinclinale dei calcari a Helminthoidi di Ravarano (da M. Montagnana a Solignano) ha il suo asse inclinato a N-O; e più a monte (Val Baganza e Val di Taro) le direttrici tettoniche sono nettamente S-O N-E con generale pendenza delle stratificazioni verso N-O. Il bacino del Taro si presenta quindi come una zona trasversale di abbassamento rispetto alla

(1) BRUNI e AMADORI, «Gazzetta Chim. It.», 50 (1), 97 (1920).

(2) ANGELI e MAGNANI, «Gazzetta Chim. It.», 23 (11), 415 (1893).

(3) HENRIQUES, «Ber.», 27, 2993 (1894).

(4) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

zona trasversale di sopraelevazione corrispondente alla Val Parmà (ellissoide di Corniglio-gruppo di M. Sporno). Tutto il paesaggio ha marcatissime le linee morfologiche a direzione trasversale (normalmente alla cresta appenninica e al margine della pianura). Vi si osservano anche piegamenti secondari con assi diretti pure S-O N-E, come, p. es., la sinclinale della formazione arenacea sugli argilloscisti ofiolitiferi nell'alta Val Manebiola.

Sul lato abbassato prendono grande sviluppo le argille scagliose e soprastanti sedimenti oligocenici. Masse ofiolitiche anche grandiose vi affiorano, inglobate nelle argille scagliose; specialmente sul fianco destro della Val di Taro, come lenti adagate secondo la generale pendenza a N-O.

Procedendo verso la Liguria si osserva che quest'area depressa trasversale si prolunga a S-O oltre lo spartiacque appenninico per il Passo delle Cento Croci con una striscia di argilloscisti superiori al macigno senza che questo giunga ad affiorare, mentre a S-E dell'alta Val di Magra esso si erge a formare la grandiosa dorsale appenninica del M. Orsaro-M. Sillara.

Nell'Appennino Reggiano: la grande sinclinale sopracitata di Ravarano che dalla Val di Taro si solleva fino alla Val Parma dove una flessura, in corrispondenza di quella zona trasversale sopraelevata, la sposta lievemente verso la pianura, torna ad abbassarsi, inclinando il suo asse a S-E, verso la Val d'Enza dove scende ad abbracciare sedimenti oligocenici e miocenici nella grande conca di Vetto e Carpineti. Questo abbassamento dell'asse sinclinale longitudinale avviene in corrispondenza di tutta una nuova zona trasversale di depressione in cui tornano ad estendersi gli affioramenti di argille scagliose ofiolitifere.

Di questa complessa zona merita particolare considerazione l'alta Val di Secchia ove nettamente si osserva il motivo trasversale sia nella direzione delle stratificazioni (p. es. al M. Ventasso), sia nell'allinearsi degli affioramenti di masse rocciose incluse nelle argille scagliose. Troviamo qui infatti la striscia dei singolari noti affioramenti di « trias », la quale con direzione S-O N-E attraversa dapprima, interrompendone la continuità, tutta la dorsale appenninica di macigno in corrispondenza della sella o sinclinale trasversale del Passo del Cerreto, e poi discende fin sotto alle sorgenti salse di Poiano con direzione sempre trasversale e con una lunghezza complessiva di 25 Km. In quella depressione del macigno dello spartiacque rimane incassata la striscia della formazione argilloscistosa accompagnata da masse di quarziti, calcari e gessi nonchè dal noto lembo di micascisti al Passo dell'Ospedalaccio (descritti principalmente da Zaccagna: *Nuove osservazioni* ecc. « Boll. R. Comitato Geol. », 1898).

Protendendosi verso N-E quest'insieme eteroclitico passa sopra all'anticlinale di macigno incisa profondamente dalla Secchia tra Cerreto dell'Alpe e il Ponte di Biola, e poi declina, estendendosi, a valle. Il sottostante macigno invece si vede in molte località della regione, anche in prossimità, poggiare

costantemente sulla scaglia rosata e questa sulla serie calcarea mesozoica fino a un trias (nelle Alpi Apuane) di facies diversa da quella della Val Secchia.

Qui le masse di « trias » risultano inglobate, coinvolte nelle argille scagliose che le attorniano da ogni parte e nelle quali terminano bruscamente i loro affioramenti. Si trovano frammisti gessi in masse brecciate e calcari pure brecciati ed in blocchi avvolti da gesso zonato: è una vera milonitizzazione seguita da ricristallizzazione del gesso.

La giacitura, la struttura e il comportamento di queste masse sono del tutto analoghi a quelli delle masse ofiolitiche convogliate e inglobate nelle argille scagliose in tanta parte dell'Appennino Emiliano, insieme con frammenti vari di rocce sedimentarie, come è noto, anche con fossili mesozoici.

Gli affioramenti di « trias » nella Val Secchia si possono considerare, non più come finestre di un substrato o nucleo antico, bensì come masse convogliate e inglobate nelle argille scagliose con andamento trasversale rispetto all'Appennino.

Nell'Appennino Bolognese: l'anticlinale della formazione arenacea che presso Castiglion dei Pepoli si immerge a N-O sotto alle argille scagliose della Val di Reno, termina pure periclinalmente verso S-E immergendosi sotto alla formazione argilloscistosa del Passo della Futa. Da questa depressione del crinale appenninico le argille scagliose scendono verso N-E, in striscia nettamente trasversale e nettamente estranea alle formazioni fiancheggianti, fin presso Castel S. Pietro.

Sul suo fianco orientale si ha la grande formazione marnosoarenacea della Romagna, a pieghe longitudinali che hanno generale tendenza a inclinare il loro asse verso N-O e che, presso Firenzuola e lungo la Valle del Sillaro, si immergono sotto alle argille scagliose della striscia trasversale.

Sul fianco occidentale domina la pendenza delle formazioni verso N-O, e così pure nell'alta Val Savena, con generale direzione trasversale.

Masse calcaree e masse ofiolitiche sono incluse al solito nelle argille scagliose, allungandosi e spesso allineandosi da S-O a N-E.

La striscia della formazione argilloscistosa con ofioliti si prolunga, con costante direzione, anche al di là del crinale appenninico: masse ofiolitiche del Mugello occidentale fino a quella del M. Ferrato presso Prato in Toscana. E in questa zona pure le singole formazioni tendono generalmente a immergersi verso N-O.

Dunque la linea retta Prato-Castel S. Pietro che attraversa tutta quanta la larghezza dell'Appennino della pianura Fiorentina alla pianura Padana segna un'importante linea tettonica trasversale.

Nella Regione Feltresca: l'ampia zona di innalzamento dell'Appennino Romagnolo, che abbiamo detto sorge di sotto alle argille scagliose della zona

trasversale Valle del Sillaro-Firenzuola, si estende per una lunghezza di 70 Km. senza presentare nè argille scagliose nè ofioliti, fino a riabbassarsi nella zona trasversale depressa dalla Valle della Marecchia in cui riappaiono le argille scagliose, con il loro corteggio di masse di rocce varie, in striscia decorrente da S-O a N-E, brusca interruzione nell'uniformità delle formazioni mioceniche.

In corrispondenza di questa zona di depressione si osserva, in pianta, una rientranza delle affioranti striscie longitudinali dei terreni più recenti, e lungo il bordo occidentale i nuclei mesomiocenici delle pieghe si immergono sotto alla serie gessifera che pende ad est immergendosi sotto alle argille scagliose.

A S-E si rilevano le pieghe longitudinali mioceniche, finchè nell'Urbinate ne sottescono i terreni calcarei eocenici e mesozoici: e siamo all'Appennino Centrale.

Nell'area di affossamento trasversale, le argille scagliose (Bonarelli: *Interpretazioni strutturali della Regione Feltresca*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1929) presentano finestre del miocene sottostante uguale a quello laterale, mentre sopportano lembi miocenici di *facies* diversa.

Altri affioramenti della formazione argilloscistosa con masse esotiche ed anche con ofioliti, segnano la continuazione della zona verso S-O nel gruppo di M. Fumaiolo, presso Pieve S. Stefano e a est dell'Alpe di Cateinaia, mostrando che anche qui la striscia trasversale attraversa completamente l'Appennino dalla conca di Arezzo in Toscana fino presso Rimini sul litorale Adriatico.

Questa striscia della Valle Marecchia rappresenta l'ultima (verso S-E) area di sviluppo delle argille scagliose, già distanziata e ridotta rispetto alle precedenti emiliane.

Si ha quindi l'impressione nell'insieme che almeno un orizzonte di argille scagliose, con rocce e fossili mesozoici, abbia una posizione assai alta nell'ordine di sovrapposizione delle formazioni dell'Appennino Settentrionale, e che perciò si trovano argille scagliose affioranti nelle aree di depressione, dove si possono interpretare come residui di erosione di una coltre estesa, e anche come colate secondo preesistenti linee di depressioni trasversali.

Biologia. — *Azione di alcuni alcaloidi sulla saccarasi prodotta dall'« Aspergillus Niger »* ⁽¹⁾. Nota di G. MEZZADROLI e A. AMATI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

In Note precedenti abbiamo dato relazione sulla azione di alcuni alcaloidi sullo sviluppo dell'*Aspergillus Niger* ⁽³⁾ e sul metabolismo dei glucidi ⁽⁴⁾.

Mentre nelle predette esperienze veniva preso in considerazione esclusivamente lo sviluppo miceliare del fungo e la distruzione dei glucidi, in questa Nota viene controllata invece l'attività enzimatica (saccarasi) del liquido che servi di sviluppo all'*Aspergillus Niger*.

Perciò sul liquido di cultura fu determinato il potere invertente rispetto ad una soluzione di saccarosio per controllare in che modo fosse favorita od ostacolata la secrezione della saccarasi, che sempre trovasi presente nei liquidi in cui vive e si sviluppa l'*Aspergillus Niger*.

Sulla produzione degli enzimi da parte dei microrganismi hanno influenza le condizioni nutritive del terreno; l'*Aspergillus Niger*, qualunque sia la natura degli idrati di carbonio presenti nel mezzo culturale, produce sempre gli stessi enzimi, solo varia la loro quantità. Infatti, se si sostituisce nel mezzo culturale il saccarosio con zucchero invertito, si produce ugualmente saccarasi, però con ritardo ed in minore quantità.

Alcune nostre esperienze precedenti ⁽⁵⁾ sullo sviluppo dell'*Aspergillus Niger* hanno dimostrato che esiste azione stimolante da parte della chinina e della stricnina, mentre invece la caffeina manifesta azione inibente già alla dose del 0.05 %. La composizione del liquido nutritizio, la temperatura di sviluppo, la qualità dell'idrato di carbonio non influenzano sensibilmente l'azione degli alcaloidi sperimentati, mentre il consumo dei glucidi è in rapporto con lo sviluppo del fungo ⁽⁴⁾. Sull'azione degli alcaloidi sugli enzimi già formati richiamiamo un nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾, al quale si rimanda anche per la bibliografia. Nelle citate prove preliminari si sperimentò l'azione

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di Tecnologia dello zucchero e delle fermentazioni industriali in Bologna.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(3) G. MEZZADROLI e A. AMATI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XVII, fasc. 7-8 (ottobre 1932) e « Giornale di Biologia appl. alla ind. chim. », vol. II, n. 6 (1932).

(4) G. MEZZADROLI e A. AMATI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XVIII, fasc. 3-4 (agosto 1933) e « Giornale di Biologia appl. alla ind. chim. », vol. III, n. 3 (1933).

(5) G. MEZZADROLI e A. AMATI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XVIII, fasc. 5-6 (settembre 1933).

di alcuni alcaloidi su soluzioni pure di saccarasi e fu riscontrato che a dosi crescenti di nitrato di stricnina, caffeina e solfato di chinina (da 0.5 a 3‰) vi corrisponde una diminuzione del coefficiente di velocità di inversione del saccarosio, misurato comparativamente. L'azione ostacolante è molto forte per la stricnina; alle dosi sopra indicate l'attività della saccarasi è ridotta dalla stricnina del 70.13‰-87.02‰, con la chinina del 3.90‰-20.13‰ e con la caffeina del 2.72‰-4.76‰.

Premesso questo, era interessante studiare quale azione avessero gli alcaloidi sul quantitativo di enzima prodotto e passato in soluzione nel liquido di cultura dell'*Aspergillus Niger* o se vi è solo un'azione sull'enzima presente. A tale scopo si istituirono prove di confronto facendo sviluppare l'aspergillo in presenza dell'alcaloide e senza, e poi aggiungendo gli alcaloidi in una porzione dei liquidi dove l'Aspergillo aveva già cresciuto in assenza, per il dosaggio della saccarasi.

MODO OPERATORIO.

I liquidi di cultura furono posti in tanti palloni: a 12 di essi si aggiunsero gli alcaloidi nelle quantità di 0.5-1-2-3‰, mentre due furono adoperati come prova in bianco. I liquidi ben sterilizzati furono seminati con la stessa quantità di spore di *Aspergillus Niger*, osservando sempre la più completa asepsi. Poi si tennero i palloni in termostato alla temperatura di 30° per 10 giorni.

Gli alcaloidi studiati sono i seguenti: caffeina, nitrato di stricnina e solfato di chinina, questi ultimi due sotto forma di sali solubili.

Dopo il tempo prestabilito il tappeto miceliare, sovrastante il liquido, veniva raccolto su filtro asciutto ed il liquido separato per filtrazione era messo in refrigerante per essere analizzato il più presto possibile. Il dosaggio degli zuccheri riduttori ancora presenti nei liquidi di cultura fu fatto col reattivo di Fehling seguendo il metodo di Bertrand.

La saccarasi si dosò facendo agire 1 cc., o frazione, del liquido di cultura su una soluzione di saccarosio al 5‰, acidificata con 1‰ di acido acetico, previa aggiunta di soluzione tampone e di una goccia di toluolo. Le soluzioni così preparate si tenevano in termostato alla temperatura di sviluppo dell'*Aspergillus* per 5 ore consecutive, dopo di che veniva determinato immediatamente lo zucchero invertito formatosi.

Il liquido di cultura adoperato era quello di Raulin.

PARTE TECNICA.

Liquido nutritizio di Raulin con saccarosio, cc. 250 per campione, temperatura di cultura 30° C, durata della cultura giorni 10, pH iniziale del liquido di cultura = 4,2.

Riportiamo nella tabella che segue la modalità delle esperienze e i risultati ottenuti nelle singole prove.

TABELLA I. — *Liquido nutritizio di Raulin, cc. 250, t. 30°, durata 10 giorni, pH 4,2.*

Num. del campione	Alcaloide	Gr. di alcaloide in 1000 cc.	Percentuale di zucchero nel liquido (calcolato come invertito)		Totale di zucchero consumato (calcolato come invertito)		Determinazione della saccarasi alla fine della cultura		Influenza degli alcaloidi presenti nelle stesse proporzioni delle singole prove, sulla saccarasi del liquido della prova di controllo n. 1	
			all' inizio della cultura gr. in 100 cc.	al 10° giorno della cultura gr. in 100 cc.	Gr.	Percentuale gr.	Zucchero invertito formato dopo 5 ore a 30° da 1 cc. del liquido di cultura (1)	Zucchero invertito in gr. per 100 di zucchero invertito formato dalla soluzione campione	Zucchero invertito dopo 5 ore a 30° da 1 cc. del liquido di cultura n. 1 (1)	Zucchero invertito in gr. per 100 di zucchero invertito formato dalla soluzione campione
1	Prova di controllo	0.0	5.00	0.00	5.00	100	71.00	100	72.00	100
2	»	0.0	5.00	0.00	5.00	100	69.50	70.25		
3	Stricnina nitrato	0.5	5.00	0.00	5.00	100	63.00	89.67	31.00	43.05
4	»	1.0	5.00	0.00	5.00	100	108.00	153.73	31.00	43.05
5	»	2.0	5.00	0.00	5.00	100	64.00	91.10	26.10	36.25
6	»	3.0	5.00	0.00	5.00	100	42.50	60.50	19.00	26.39
7	Caffeina	0.5	5.00	0.00	5.00	100	47.00	66.90	70.10	97.36
8	»	1.0	5.00	0.00	5.00	100	33.00	47.11	65.50	90.97
9	»	2.0	5.00	0.96	4.04	80.80	40.50	57.65	66.00	91.66
10	»	3.0	5.00	2.30	2.70	54.00	41.10	58.50	61.50	85.41
11	Chinina solfato . .	0.5	5.00	0.00	5.00	100	71.00	101.06	59.60	82.77
12	»	1.0	5.00	0.00	5.00	100	75.00	106.76	59.00	81.94
13	»	2.0	5.00	0.00	5.00	100	78.50	111.03	51.00	70.97
14	»	3.0	5.00	0.00	5.00	100	90.00	128.11	43.20	60.00

(1) Espresso in cc. di K_2MnO_4 N/10 di cui 1 cc. = 0.0031 di zucchero invertito; già diminuito della quantità eventualmente presente nel quantitativo di liquido di cultura aggiunto.

Dai dati sopra esposti si possono trarre soddisfacenti conclusioni che confermano, in via di massima, quanto fu già notato nel nostro precedente lavoro (1).

Allo scopo di meglio dimostrare l'influenza degli alcaloidi sulla quantità di saccarasi passata in soluzione nei liquidi di cultura e sulla sua attività, si sono riportate in una tabella le quantità di invertito ottenibile da 1 cc. di liquido di cultura, in 5 ore a 30°, riportando il valore delle prove campione uguale a 100 di zucchero invertito. Gli stessi dati vengono riportati in grafici (figg. 1 e 2).

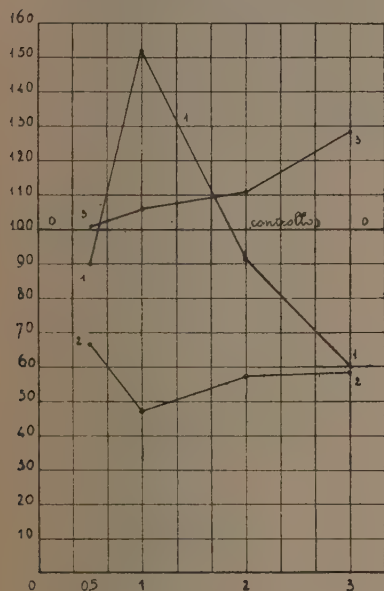


Fig. 1.

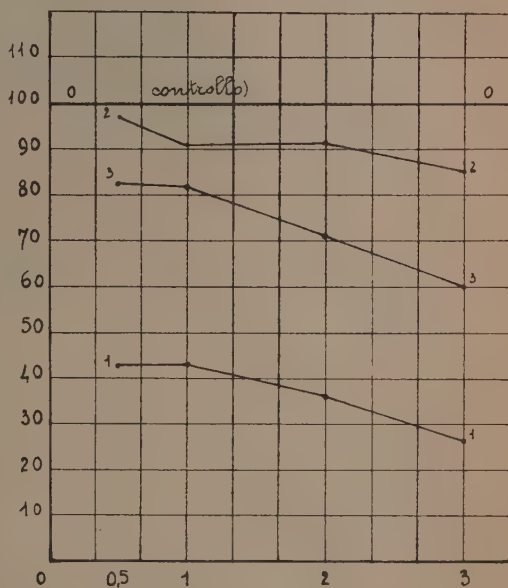


Fig. 2.

Dall'esame dei valori trovati si osserva quanto segue:

la stricnina nelle due dosi impiegate ostacola l'attività della saccarasi; mentre invece la secrezione della saccarasi da parte dell'*Aspergillus*, nel campione contenente 0,10 % di stricnina, risulta maggiore della prova in bianco;

in presenza di chinina l'attività della saccarasi è debolmente ostacolata, mentre viene eccitata la sua secrezione durante il ciclo vitale del fungo;

la caffeina ostacola l'attività della saccarasi in quantità minore della chinina e porta ad una diminuzione della secrezione dell'enzima.

(1) G. MEZZADROLI e A. AMATI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XVIII, fasc. 5-6 (settembre 1933).

RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

Nel presente lavoro vengono esposti i risultati ottenuti dallo studio dell'azione di alcaloidi sulla saccarasi prodotta dall'*Aspergillus Niger* e si traggono le seguenti conclusioni:

- 1) gli alcaloidi: stricnina, caffeina, chinina agiscono sulla saccarasi prodotta dall'*Aspergillus Niger*, coltivato in liquido di Raulin al saccarosio, influenzando la secrezione della saccarasi; dalle esperienze risulta che la chinina ne eccita la secrezione, la stricnina, in dose opportuna, può anche essa eccitarla, mentre invece risulta una diminuzione in presenza di caffeina;
- 2) gli stessi alcaloidi agiscono verso la saccarasi già formata in modo deprimente, quest'azione è forte per la stricnina, minore per la chinina e per la caffeina.

Botanica. — *Movimenti igroscopici delle brattee di « Carlina acaulis »*⁽¹⁾. Nota di V. POCHETTINO, presentata⁽²⁾ dal Socio G. GOLLA.

È questione ben nota e rievocata in tutti i trattati di fisiologia vegetale⁽³⁾ che le brattee di *Carlina acaulis* assumono nell'infiorescenza delle posizioni che sono in relazione con l'umidità dell'ambiente. Se questo è saturo, le brattee sono in posizione quasi verticale, leggermente ricurve in dentro in modo da proteggere il ricettacolo; se invece l'atmosfera che le circonda è secca, le singole brattee sono fortemente ricurve in fuori cosicchè l'infiorescenza risulta aperta.

Il movimento dipende dalla diversità di struttura del tessuto sottostante all'epidermide della pagina superiore della brattea, rispetto a quello contiguo alla superficie della pagina inferiore. In realtà il tessuto parenchimatico della pagina superiore è formato da cellule poliedriche a pareti sottili, quello della pagina inferiore è un parenchima sclerenchimatoso formato da cellule rotondeggianti a pareti spesse. Queste ultime non compongono il tessuto della pagina inferiore su tutta la lunghezza della brattea, ma sono specialmente sviluppate nel tratto mediano (vera sede del movimento) e diminuiscono di numero e di spessore verso la base e verso l'apice. Tale struttura, descritta

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Torino.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

(3) W. BENECKE e L. JOST, *Pflanzenphysiologie*. Bd. II, 1923; *Hygroskopische Bewegungen*; F. A. E. C. KOSTYTSCHEW e WENT, *Lehrbuch der Pflanzenphysiologie*. Bd. II, 1931.

dal Kleiner⁽¹⁾, corrisponde a quella osservata dal Uphof⁽²⁾ nelle brattee di *Ammobium alatum*, *Acrolinium roseum*, *Helicrysum bracteatum* e *Rhodanthe manglesii*, le quali eseguono movimenti analoghi. Entrambi questi autori attribuiscono il movimento al fatto che le cellule a parete spessa, che occupano la pagina inferiore, possono assorbire una quantità d'acqua maggiore di quelle sovrastanti e, dilatandosi conseguentemente di più (l'allungamento dello sclerenchima è del 7 %, mentre quello del parenchima sottile è del 2 %) determinano il ricurvarsi delle brattee. Giustamente quindi le cellule degli strati inferiori potranno essere denominate *dinamiche*, quelle degli strati superiori *dinamostatiche*. Secondo il Guttemberg⁽³⁾ invece, la causa del movimento risiederebbe principalmente in una differenza di orientazione dei pori della membrana i quali avrebbero direzione trasversale nel tessuto della pagina superiore e direzione obliquo-longitudinale nel tessuto della pagina inferiore⁽⁴⁾. Dalle mie osservazioni ritengo che, piuttosto che la differenza tra la fine struttura delle pareti cellulari, abbia importanza, per quanto concerne il movimento igroscopico, la suaccennata differenza di costituzione dei due tessuti; il movimento igroscopico sarebbe quindi unicamente dovuto a una diversa assorbibilità per l'acqua tra i due tipi di cellule che li compongono.

Poichè mancavano alcuni dettagli sulle modalità dei movimenti igroscopici delle brattee di *Carlina acaulis* e sui fattori che possono influenzare questi movimenti, mi sono proposta uno studio particolareggiato su questo argomento e riferisco i risultati principali a cui sono arrivata.

Oltre alle due posizioni sopra descritte, corrispondenti ai due stadi di saturazione e di assenza di vapor acqueo, a umidità intermedie la parte terminale delle brattee assume, rispetto alla verticale, delle posizioni intermedie tra le estreme. Complessivamente per passare (cambiando le condizioni dell'ambiente), dallo stadio di apertura massima a quello di chiusura, occorrono da un'ora e mezza a due ore e mezza a seconda dello stadio di maturazione dei capolini e della loro grossezza. Le infiorescenze che più prontamente e sicuramente reagiscono sono quelle più rigogliose e che già hanno raggiunto la completa maturità sessuale; di queste mi sono servita nelle mie osservazioni.

Per rendermi esattamente conto della permeabilità generale e selettiva della superficie delle brattee e per determinare l'importanza (rispetto al moto) dell'assorbimento del tessuto parenchimatico in confronto a quello scleren-

(1) O. KLEINER, *Ueber Hygroscopische Krümmungsbewegungen bei Compositen* Oester. « Bot. Ztsch. », Bd. 57, 1907.

(2) G. C. TH. UPHOF, *Hygrochastic movements in floral bracts of Ammobium Acrolinium rhodanthe and Helicrysum*. « Am. Journ. of Bot. », 1934, 11, 154, 163.

(3) H. GUTTEMBERG, *Die Bewegungsgewebe*. Bd. V., Linsbauer, 1926.

(4) Esaminando una sezione tra Nicols incrociati, ho rilevato la differenza di fine struttura tra le membrane dei due tessuti. Tanto il tessuto parenchimatico sottile quanto quello sclerenchimatico, presentano una debole birifrangenza strutturale, che è positiva per l'uno e negativa per l'altro.

chimatico, ho fatto i seguenti esperimenti. Spalmando di paraffina la pagina superiore di una brattea in posizione di secchezza, perciò ricurva, e poi immergendola in acqua, il movimento igroscopico avviene con un piccolo ritardo rispetto a quello che si effettua nelle condizioni ordinarie. Se invece la paraffina impermeabilizza la pagina inferiore, il movimento viene ritardato di circa due ore, ma quando l'acqua, dopo aver attraversato lo strato epidermico e il parenchima, arriva agli strati inferiori, genera una tensione tale da riuscire a far screpolare lo strato di paraffina e a far distendere la brattea. Gli esperimenti di controllo fatti spalmando di paraffina alternativamente le due superfici delle brattee in posizione corrispondente alla saturazione dell'ambiente e quindi essiccandole, confermano, come le precedenti esperienze, che il tessuto dell'azione dinamica è quello della pagina inferiore.

Esistono però altri fattori che, sempre in relazione alle variazioni d'umidità, influenzano il movimento delle brattee di *Carlina*. Quelli da me presi in speciale considerazione furono la temperatura e la luce.

Riscaldando uniformemente l'ambiente a umidità ordinaria, le brattee s'incurvano ancora più accentuatamente in fuori di quanto non lo siano se l'ambiente è a 18°; ciò è naturale perchè aumentando la temperatura, l'umidità relativa diminuisce. Se invece l'infiorescenza è in camera umida, e questa viene riscaldata, le brattee già in posizione di chiusura non si schiudono. Ma se si porta bruscamente una *Carlina* aperta in camera umida a temperatura superiore ai 40°, essa si chiude con una velocità assai maggiore che se la si portasse in camera umida a temperatura ordinaria. Il movimento di chiusura completa, che a 20° avviene in circa 2 h., si effettua invece in 10' a 65°. Il fenomeno dell'imbibizione, che provoca il movimento, viene accelerato perchè esotermico. Anche l'apertura del capolino si compie in più breve tempo a temperature elevate, perchè queste favoriscono l'evaporazione.

In complesso i movimenti igroscopici vengono esaltati da temperature più alte dell'ordinario; qualunque valore queste assumano tra i 35° e i 100°, purchè uniformemente distribuite nell'ambiente in cui è posta la *Carlina*, accelerano sempre la chiusura del capolino in ambiente saturo e la sua apertura quando venga portato in ambiente secco.

Al buio e a luce diffusa i movimenti che le brattee compiono sono soltanto dipendenti dall'umidità dell'ambiente. Al sole invece, qualunque sia l'umidità dell'atmosfera circostante, e persino se essa è satura, l'infiorescenza si mantiene costantemente aperta. Facendo passare la luce solare attraverso diversi filtri colorati Wratten, il movimento di apertura delle brattee, a parità di tempo di esposizione ed in ambiente saturo, è di maggiore ampiezza alla luce rossa che alla azzurra. L'escursione maggiore si ha quando la lunghezza d'onda delle radiazioni incidenti è all'incirca di $m\mu$. 665 e decresce per radiazioni a λ più breve. Quando tutte le radiazioni, comprese le termiche, vengono eliminate e l'ultra violetto contenuto nella luce solare agisce da solo, il movimento non è percettibile. Anche l'illuminazione con una lam-

pada ad arco è sufficiente per far aprire la *Carlina* in ambiente saturo; se però sul cammino dei raggi della lampada, s'interpone un filtro che trattienga le radiazioni rosse e tutta la gamma delle ultra rosse, la *Carlina* si chiude. È dunque naturale pensare che sia l'energia radiante assorbita e trasformantesi in termica quella che ha influenza sul movimento. E infatti se si espone una brattea anche alla radiazione emessa da un corpo semplicemente portato a 100° in modo che essa incida normalmente alla superficie della brattea stessa, il suo comportamento dimostra la fondatezza dell'ipotesi. Se si sospende la brattea in esame in una camera umida debolissimamente illuminata, una parete della quale sia a contatto con un recipiente contenente acqua in ebollizione, l'altra con un recipiente contenente acqua alla temperatura di 19° mantenuta rigorosamente costante, si osserva che, se le radiazioni calorifere investono la pagina inferiore, ossia quella lignificata, la posizione non cambia, resta cioè corrispondente alla saturazione dell'ambiente; se invece le radiazioni incidono sulla pagina superiore, con piccoli movimenti a scatto, la brattea s'incurva, assumendo la stessa posizione che assumerebbe al secco.

In definitiva non è la temperatura per sè stessa che ha influenza, ma la *differenza di temperatura tra la pagina superiore e l'inferiore*; differenza che si stabilisce quando dell'energia raggiante incide sulla pagina superiore e vi si trasforma in energia termica. Conseguentemente si spiega come le *Carlinae* possano aprirsi anche in ambiente umido e risulta chiarito l'esito negativo dell'esperienza in cui i raggi rossi, gl'infrarossi e i termici venivano eliminati.

Poichè il fenomeno dell'incurvamento delle brattee, sotto lo stimolo delle radiazioni termiche, avviene in senso contrario a quello provocato dall'umidità, non si può pensare a un'eventuale perdita d'acqua da parte del tessuto sclerenchimatico, poichè si opera in ambiente saturo. Perciò la spiegazione del fenomeno non si può ricercare che nelle due seguenti ipotesi: la dilatazione provocata dal calore sulla pagina superiore è maggiore di quella provocata dall'assorbimento d'acqua negli strati inferiori, cioè il coefficiente di dilatazione termica è maggiore del coefficiente di dilatazione igroscopica, oppure, il calore influisce indirettamente aumentando l'igroscopicità del tessuto parenchimatico il quale si rigonfierebbe tanto più dello sclerenchimatico da far assumere la posizione ricurva alla brattea.

Dalle osservazioni esposte risulta che i movimenti delle brattee di *Carlina acaulis*, che si credevano condizionati dalle sole variazioni di umidità, subiscono anche l'influenza delle radiazioni termiche. I movimenti di chiusura mantengono un carattere puramente igroscopico, in quanto non si possono in nessun caso verificare in assenza di umidità e dal calore vengono solo accelerati. *I movimenti di apertura invece si rendono indipendenti dall'azione dell'umidità, sotto l'irraggiamento termico.*

La chiusura delle brattee in ambiente umido, al buio o in luce diffusa, ha sicuramente un significato ecologico. Le brattee, organi di protezione per

le antere e per gli stimmi, servono a proteggerli dall'acqua allo stato liquido che farebbe scoppiare il polline e danneggerebbe il tessuto degli stimmi; quindi esse si chiudono contro al ricettacolo al calar della notte, per evitare che si formi della rugiada a contatto degli organi sessuali, o quando la luce solare viene intercettata dalle nuvole, precorritrici spesso della pioggia. Viceversa l'apertura delle brattee sotto l'azione della luce, anche in ambiente umido, è evidentemente necessaria per rendere possibile l'esposizione degli organi sessuali alle radiazioni solari che ne favoriscono la maturazione, facilitando altresì la visita dei pronubi.

Biologia (Zoologia). — La « *Trutta genivittata* » (Heckel-Kner, 1858) nell'Adige⁽¹⁾. Nota di I. DELPINO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Per la gentilezza del comm. Catoni, furono inviati in esame a questo Laboratorio, diciotto trote pescate nell'Adige, allo scopo di studiarne le ovaie, molto poco sviluppate malgrado la stagione assai prossima alla riproduzione nella quale esse erano state catturate (1-28 novembre), e il loro vario peso, talora anche notevole (da gr. 420 a 2025).

I risultati di tale studio saranno lo scopo di una susseguente Nota; la presente tende invece alla classificazione del salmonide in osservazione.

Un superficiale esame dimostrò subito che questi esemplari non appartenevano nè al *Salmo lacustris*, per la notevole differenza di pigmentazione, nè alla fario, per la completa assenza di macchie rosse, e tanto meno alla iridea. Un esame più accurato dimostrò che tale divergenza si poteva riscontrare anche per i caratteri anatomici più importanti per la classificazione, quali il numero dei raggi delle pinne, la dentatura, le varie misurazioni somatiche ecc.

Converrà quindi dare una completa descrizione della specie in esame per confrontare in seguito i caratteri riscontrati con quelli delle specie note.

Il corpo è fusiforme, coperto di piccole squame cicloidali, elittiche; su di esso è abbastanza evidente la linea laterale, alla metà del corpo, per la sua sporgenza e intensità di pigmentazione. Colorazione del dorso più oscura, tendente al verde-bruno nel maschio e al nocciola nella femmina; ventre bianco argenteo, con riflessi madreperlacei in rosa e celeste.

Sul corpo assenza delle caratteristiche macchie nere tonde o a forma di X e presenza invece di una marmorizzazione formata dall'opposizione delle due tonalità, più chiara e più scura, del colore del salmonide.

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio di Idrobiologia.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1935.

Sul dorso del muso seguita in alcuni esemplari la screziatura del tronco; sulle parti laterali del capo si notano macchie nere variamente conformate e in modo caratteristico sugli opercoli, ove le varie macchie rondendosi fra di loro formano uno speciale reticolo di striscie bianche alternate con striscie nere.

Il bordo esterno delle singole squame è chiaro, iridescente, mentre nella parte più interna — di inserzione — si nota una pigmentazione nera; cosicchè dalla riunione delle varie squame si viene a formare un esile reticolo scuro, su tutto il corpo della trota.

Le squame sono persistenti.

Sui bordi della mascella inferiore non ho riscontrato la presenza delle due serie simmetriche di pori, in relazione con la linea laterale, che sono elencati fra i caratteri di classificazione nell'Heckel; ho osservato invece un'accentuata pigmentazione che man mano decresce, essendo bianca argentea tutta la parte inferiore della trota.

Il capo è grosso e la sua lunghezza (dall'apice del muso alla fine dell'opercolo) è contenuta 4 $1/2$ –5 volte nella lunghezza totale (dall'apice del muso alla parte più estrema della pinna caudale).

La bocca è molto ampia; si scorge la divisione fra l'intermassellare e i due massellari superiori, i quali sono alquanto allungati così che terminano più caudalmente del raggio orizzontale dell'occhio. Sebbene molto leggermente, si nota che la mascella inferiore è più sporgente dell'intermassellare.

L'occhio è abbastanza piccolo, il suo diametro è contenuto circa 6 volte nella lunghezza laterale del muso e 4 volte invece nella lunghezza dorsale del muso.

Dall'osservazione dell'insieme del tronco risulta che il capo è piuttosto depresso; subito dopo il profilo dorsale si innalza raggiungendo in breve la massima altezza del corpo, indi la linea prosegue dritta fino al principio della prima pinna dorsale, la quale è inserita ad una distanza pari a tre volte la lunghezza dorsale del capo, per poi decrescere lentamente fino alla attaccatura della pinna caudale.

L'inizio della dorsale rappresenta il punto mediano fra l'apice del muso e la fine dell'adiposa. La più piccola altezza della coda è contenuta 2 $1/2$ volte nella massima altezza del corpo.

Il profilo del ventre è leggermente arcuato.

Le pinne presentano il seguente aspetto:

1° *Dorsale*: Maggiore delle altre pinne per altezza e per lunghezza. I primi due raggi sono ossei, gli altri sono più flessibili, l'ultimo raggio si divide in due subito dopo la sua emergenza. Fra di esse si estende la lamina della pinna che conserva il colore oscuro del dorso, priva di macchie nere, nella quale — solo per trasparenza — si osserva l'alternanza di zone pigmentate con varia intensità. La sua base è lunga il doppio della base dalla pinna adiposa.

Il numero dei raggi riscontrato è:

$$D = 12 \text{ --- (estremi di variabilità: } D = 12-13 \text{).}$$

II° Dorsale: Carnosa, abbastanza sviluppata e priva delle caratteristiche macchie nere; presenta solo una variabile pigmentazione. Ha posizione opposta alla anale; si inizia avanti alla fine di questa, terminando più caudalmente.

Pettorali: Pari, lunghe e strette, per lo più chiare, specie nella pagina inferiore, mentre la pigmentazione diviene più intensa lungo il bordo esterno. Presentano un netto aspetto triangolare

$$P = 14 \text{ (estremi: } P = 13 - 14 \text{).}$$

Ventrali: Pari, inserite sotto l'ultimo terzo della dorsale. Immediatamente sopra questa pinna, si nota una piccola pinna rudimentale, triangolare, costituita da un unico raggio osseo

$$V = 9 \text{ (estremi: } V = 9 \text{).}$$

Anale: Fornita di robusti raggi, dei quali i più lunghi possono paragonarsi con quelli più corti della pinna dorsale

$$A = 10 \text{ (estremi: } A = 9 - 10 \text{).}$$

Caudale: molto sviluppata e incavata nel margine esterno, più o meno a seconda dei vari esemplari

$$C = 26 \text{ (estremi: } C = 23 - 29 \text{).}$$

Dentatura: Bocca molto ampia, munita di denti forti e ricurvi sia sulla mascella inferiore che sulla mascella superiore, sull'intermascellare, sulla lingua, palato, vomere, e parte allungato di questo, lo stilo, sul quale i denti hanno disposizione tale che i primi sono allineati su una sola fila, mentre gli ultimi sono alternati l'un l'altro, su due file. Talora alla base dei grossi denti saldamente impiantati nelle mascelle, si trovano, nella stessa linea, dei denti molto piccoli, appena visibili, essendo approfonditi nell'epitelio buccale. Il numero dei denti riscontrato negli esemplari in esame, malgrado alcuni inevitabili scarti, conserva una notevole uniformità e corrispondenza fra il lato destro e il sinistro.

mascella inferiore	19 + 19	(oscillazioni da 18-23)
» superiore.	25 + 25	(» » 24-26)
intermascellare	7 + 7	(» » 7-9)
lingua	6 + 6	(» » 5-8)
arcata del palato	18 + 18	(» » 17-19)
vomere	6	(» » 4-7)
stilo	12	(» » 8-15)

Dai caratteri che ho ora elencati, e in particolare per la mascella superiore oltrepassante il diametro verticale e orizzontale dell'occhio, e per il vomere munito di denti anche nella sua parte allungata, risulta senza alcun dubbio, che gli esemplari in esame appartengono al genere *Trutta* e posso specificare alla *Trutta genivittata*, come risulta chiaramente dal confronto che ho operato con vari esemplari — ugualmente classificati — conservati nel Museo di Trieste, i quali hanno gli stessi caratteri anatomici e presentano anche la caratteristica screziatura nel corpo e le fascie alternate bianche e nere sugli opercoli.

I dati riportati si accordano poi con la descrizione che ne ha data l'Heckel nel 1858, con il nome di *Salar genivittatus*, descrizione per taluni punti non completa, mancando i dati relativi alla dentatura e al numero dei raggi della pinne, di cui è ovvia l'importanza.

A questa prima descrizione non ne sono seguite altre, nello svolgersi degli anni, perchè tale specie era ritenuta esclusiva dell'Isonzo (Heckel) e quindi di scarsa importanza; perciò ho ritenuto utile una nuova descrizione aggiungendo i caratteri mancanti e volendo mettere in rilievo che anzichè essere una specie rara, come risulterebbe secondo vari autori (il Günther nel catalogo dei pesci del British Museum, accenna ad un unico esemplare ivi conservato) la *Trutta genivittata* oltre ad occupare un posto considerevole anche nella fauna ittologica della Dalmazia (Karaman), è notevolmente diffusa anche da noi.

Come spiegare che nel secolo scorso tale specie sembrasse rara, mentre ai giorni nostri si ritrova comunemente?

Forse si può ammettere che realmente la genivittata abbia potuto affermarsi e diffondere meglio di altre specie, ma la ragione principale è che molte volte è stata fatta confusione fra la genivittata e la lacustre, come ho osservato in alcuni libri, e molte volte essa è stata descritta anche con altre denominazioni pure in una vecchia collezione di trote che si trova nel Museo di questo Laboratorio, sono conservati degli esemplari di genivittata, pescati nel Macra (circondario di Cuneo) nel 1898, non classificati, ritenuti forse come casi di difficile determinazione. Il più antico accenno a una trota così caratteristica risale al Cuvier (1828), il quale ha soltanto affermato la presenza, nei laghi della Lombardia, di un Salmonide che egli ha definito *Salmo marmoratus*, senza per altro darne la descrizione. Inutile dire che il *Salmo marmoratus* Cuvier è sinonimo del *Salar genivittatus* dell'Heckel, il quale — la cosa resta incomprensibile in uno studioso tanto accurato — forse ignorando quanto aveva scritto il Cuvier, ha creduto bene di farne una specie a parte e ritenerla propria dell'Isonzo.

Malgrado che la prima denominazione data a questa trota dal Cuvier sia la più rispondente morfologicamente, ho creduto giusto però di conservare l'appellativo dell'Heckel, essendo di questo Autore la più antica descrizione.

In seguito anche il Siebold e il Fatio hanno menzionato il *Salmo marmoratus*, riferendosi alle prime indicazioni del Cuvier e dandone parziali descrizioni. Quindi, la genivittata era diffusa in Italia almeno fin dal secolo scorso; cercherò ora di compiere delle indagini per vedere se ai nostri giorni la *Trutta genivittata* si ritrova ancora nel Macra e in quali altri fiumi d'Italia.

Potrebbe darsi che oltrechè d'acqua dolce, la genivittata fosse una specie anche marina; malgrado io abbia letto diverse pubblicazioni non ho trovato alcuna indicazione su ciò, ma così si spiegherebbe la diffusione di tale specie sia nei fiumi dalmati, le cui foci sono vicine alle foci dell'Isonzo (che forse deve ritenersi come la località di provenienza della genivittata), sia in quei fiumi che sfociano nell'Adriatico, attraverso il quale sarebbe avvenuta la migrazione delle trote. Così gli esemplari in esame avrebbero risalito il corso dell'Adige fino a Mori, ove furono catturati, e le trote conservate nel Museo di questo Laboratorio, avrebbero risalito il Po dalle sue foci raggiungendo infine il Macra, che è un suo affluente. Ugualmente gli esemplari indicati dal Cuvier, Fatio ecc. avrebbero una distribuzione legata alle acque che si riversano nell'alto Adriatico.

Ritengo poi che sia errato il ritenere — come taluni sostengono — che la genivittata sia un ibrido prodotto dall'incrocio: fario per lacustris, poichè ibridi simili, ottenuti sperimentalmente, mantengono sul corpo le caratteristiche macchie rosse della fario, o almeno una accentuata pigmentazione rossa, che non si riscontra invece negli esemplari in questione.

Dal confronto dei caratteri della *Trutta genivittata* con quelli delle altre trote riportati in vari testi (Heckel & Kner, Günther, Bettoni, Canestrini, Scotti, Supino, Malfer, Largaiolli, Smolian ecc.), risulta che essa presenta la maggior corrispondenza con i dati riferiti per il *Salmo lacustris*, ma tuttavia ne differisce sia per il numero dei raggi delle pinne, sia, e maggiormente, rispetto alla dentatura. Carattere principale di distinzione sono poi i forti denti che la genivittata ha impiantati sul vomere, anche nella sua parte allungata. Questo prova che la genivittata non è una varietà della lacustris, determinata dalle diverse condizioni ambientali — abito fluviale quella e lacustre questa — dato che troppo lungo sarebbe dovuto essere il tempo necessario per attuare così notevoli modificazioni non solo nell'abito esterno ma anche nei caratteri anatomici.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà comunicazione di un telegramma di rallegramento del R. Commissario inviato, a nome dell'Accademia, al Socio A. DI LEGGE per l'alta onorificenza che gli è stata testè concessa.

Il Socio G. ARMELLINI, sicuro d'interpretare i sentimenti del suo maestro, ringrazia l'Accademia e coglie l'occasione per informare la Classe delle condizioni di salute dell'Illustre Collega, presentemente infermo.

Il PRESIDENTE propone di inviare al Socio DI LEGGE un telegramma d'augurio a nome della Classe.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario N. PARRAVANO presenta le opere, giunte in dono all'Accademia segnalando la « Commemorazione di A. Martelli », fatta dal Socio E. MILLOSEVICH; la « Campagna geo-fisica nella regione carsica di Postumia (1931-1932) » a cura di E. Soler; una serie di opuscoli del Socio Straniero CESÀRO; il volume « Molecular Hydrogen and its spectrum » di O. W. Richardson.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il PRESIDENTE presenta un plico suggellato inviato dal sig. P. Barreca perchè venga conservato negli archivi dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti », i Soci T. LEVI-CIVITA e F. SEVERI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 gennaio 1935

- BATTAGLIA M. — Le fistole anali ed il vac-
cino tubercolare selezionato e stabiliz-
zato. (Estr. dagli «Annali Italiani di
Chirurgia». Anno XIII). Napoli, 1934.
8°, pp. 1-6.
- BELL ALFRED H. — Oil and Gas develop-
ment in Illinois in 1933. («Bulletin of
the Illinois Petroleum», n. 25, July 21,
1934). Urbana, 1934. 8°, pp. 1-15.
- CASABURI VITTORIO. — Sostanze concianti
delle pelli per la battaglia del grano.
Aumento del valore nutritivo dei ce-
reali. Napoli, 1934. 8°, pp. 1-52.
- CESÀRO G. — Sur l'ellipse circonscrite à un
triangle et ayant pour centre le centre
du cercle inscrit. (Extr. des «Bulletins
de l'Académie Royale de Belgique». Classe des Sciences, serie 5^a, t. XVI,
pp. 15-25). Bruxelles, 1930. 8°.
- CESÀRO G. — Orientation et grandeur des
axes de l'ellipse Ω . Son quatrième point
commun avec la circonférence circon-
scrite. Groupe de triangles ayant leur
ellipse Ω commune. (Extr. des «Bulletins
de l'Académie Royale de Belgique». Classe des Sciences, 5^e serie, t. XVII,
pp. 1126-1130). Bruxelles, 1931. 8°.
- CESÀRO G. — Lieu des centres des ellipses
circonscrites a un triangle et avant une
surface donnée. (Extr. des «Bulletins de
l'Académie Royale de Belgique». Classe
des Sciences, 5^e serie, t. XVII, pp. 94-
136). Bruxelles, 1934. 8°.
- CESÀRO G. — I. — Sur une propriété du dé-
cagone régulier. — II. Sur une équation
à coefficients entiers dont est très ap-
proximativement la racine. — III. Seg-
ments déterminés sur les médianes d'un
triangle sphérique par leur point d'inter-
section. — IV. Relation entre le péri-
mètre, $2p$, et les rayons, Y et R , des
cercles inscrit et circonscrit, dans un
triangle rectiligne isoscèle. (Extr. des
«Mémoires de la Société Royale des
Sciences de Liège». 3^e serie, t. XVII).
Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-30.
- CESÀRO G. — Sur les formules qui, dans un
triangle, donnent la distance du centre
du cercle circonscrit au centre d'un cer-
cle tritangent (inscrit ou ex-inscrit) en
fonction des rayons des deux cercles.
— Problèmes. (Extr. du «Bulletin de la
Société Royale des Sciences de Liège»,
N.º 7-10, 1932, pp. 149-157). Bruxelles,
1932. 8°.
- CESÀRO G. — Surface qui remplace l'ellip-
soïde inverse lorsqu'à la formule de
Fresnel on substitue la formule approxi-
mative des biréfringences. (Extr. des
«Bulletins de l'Académie Royale de Bel-
gique». Classe des Sciences, 5^e serie,
t. XVIII, pp. 8-25). Bruxelles, 1932. 8°.
- CESÀRO G. — Sur la guarinite. Formules à
attribuer à ce minéral, à la hiortdaklité
et à la wöhlérite. Relation entre les
compositions chimiques de ces trois mi-
néraux, ainsi qu'entre leurs formes cri-
stallines et entre l'orientation des plans
de leurs axes optiques. (Extr. des «Me-
moires publiés par l'Académie Royale
de Belgique». Classe des Sciences. Col-
lection in 8°, t. XII). Bruxelles, 1932.
8°, pp. 1-29.
- CESÀRO G. — Sur une construction simple
des axes de l'ellipse centrale d'inertie
du triangle. (Extr. du «Bulletin scien-
tifiques de l'Association des Elèves des
Écoles spéciales». N.º 3, 1933, pp. 73-
79). Liège, 1933. 8°.
- CESÀRO G. — Sur les points d'égale inertie
du triangle. (Extr. du «Bulletin de l'A-
cadémie Royale de Belgique». Classe des

- Sciences, 5^e serie, t. XX, pp. 87-102). Bruxelles, 1934. 8°.
- CESÀRO G. — Variation de la somme des lignes trigonométriques d'un arc lorsque celui-ci se meut de 0° à 360°. (Extr. des « Bulletins de l'Académie Royale de Belgique ». Classe des Sciences, 8 mai 1934, pp. 415-432). Bruxelles, 1934. 8°.
- CESÀRO G. — Contribution à l'étude des minéraux. (Extr. des « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique ». Classe des Sciences. 5^e série, t. XX, pp. 674-685). Bruxelles, 1934. 8°.
- CESÀRO G. — Sur les ellipses circonscrites à un triangle et ayant un point donné pour centre. Quatrième point d'intersection de deux de ces courbes. (Extr. des « Mémoires publiées par l'Académie Royale de Belgique ». Classe des Sciences. Collection in 8°. to. XI). Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-99.
- Crociera d'istruzione e propaganda lungo il Tartaro-Canalbiano-Po di Levante. 14-16 settembre 1934-XII. Milano, 1934. 8°, pp. 1-32.
- DE FRANCHIS MICHELE. — A proposito della precedente Nota del prof. Bruno De Finetti e in risposta ad un libello del sig. Insolera. (Estr. dai « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». Tomo LVIII). Palermo, 1934. 8°, pp. 1-3.
- DE TONI NANDO. — Frammenti Vinciani. II - Repertorio dei passi Leonardeschi ai quali attinse frate Luigi Maria Arcanati per la compilazione del trattato *Del moto e misura dell'acqua*. Brescia, 1934. 8°, pp. 1-15.
- DA TONI NANDO. — L'idraulica in Leonardo da Vinci. Brescia, 1934. 8°, pp. 1-43.
- EDWARDS THOMAS I. — Vedi PEARL RAYMOND.
- Ente Nazionale Serico. — Annuario serico 1933. Notizie statistiche su la produzione e il commercio dei bozzoli e della seta in Italia e all'estero. Milano, 1934. 4°, pp. 1-110.
- EYRAUD HENRY. — Sur la valeur la plus précise d'une distribution. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 199, pp. 817-819). Paris, 1934. 4°.
- EYRAUD HENRY. — Sur quelques lois d'erreurs analogues aux erreurs systématiques. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 199, pp. 763-764). Paris, 1934. 4°.
- GUMBEL E. J. — La distribution finale des valeurs voisines de la médiane. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 199, page 1174-1176). Paris, 1934. 4°.
- GUMBEL E. J. — Le paradoxe de l'âge limite. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 199). Paris, 1934. 8°, pp. 1-2.
- ICARD SÉVERIN. — La méthode des nombres signalétique. Nouvelles méthode d'identification en histoire naturelle. (Extr. de la « Revue de Pathologie comparée et d'Hygiène générale ». N° 458 novembre 1934). Paris, 1934. 8°, pp. 1-23.
- JULIA GASTON. — Leçons sur la représentation conforme des aires multiples connexes. (Cahier Scientifiques. Fasc. XIV). Paris, Editeur Gauthie-Villars, 1934. 8°, pp. I-VI, 1-93.
- MILLOSEVICH FEDERICO. — Alessandro Martelli. (Estr. da « La Ricerca Scientifica ». Vol. II, n. 11-12). Roma, 1934. 8°, pp. 1-10.
- MILLOSEVICH F. e SCHERILLO A. — Il berillio. Geochimica, mineralogia e giacimenti con speciale riguardo a quelli italiani. (Estr. da « La Ricerca Scientifica ». Vol. II, n. 9-10). Roma, 1934. 8°, pp. 1-15.
- PEARL RAYMOND. — Constitutional factors in longevity. (Reprint from « Eugen Fischer-Festband ». Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie ». Band XXXIV, 1934, pp. 314-320). Stuttgart, 1934. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Contraception and fertility in 4945 married women. A second report on a study of family limitation. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. VI, pp. 355-401). Baltimore, 1934. 8°.
- PEARL RAYMOND. — On the effects of partial removal of the Cotyledons upon the growth and duration of life of canteloup seedlings without exogenous

food. (Reprinted from the «Annals of Botany». Vol. XLVIII, pp. 575-599). Oxford, 1934. 8°.

PEARL RAYMOND and EDWARDS THOMAS I.
— Aeration and growth of canteloup seedlings (*Cucumis Melo*). (Reprinted from the «American Journal of Botany». Vol. XXI, pp. 242-250). Lancaster, 1934. 8°.

PEARL RAYMOND and EDWARDS THOMAS I.
— The growth of *Cucumis melo* seedlings at different temperatures. (Reprinted from the «Journal of general Physiology». Vol. 17, pp. 687-700). Baltimore, 1934. 8°.

PEARL RAYMOND and EDWARDS THOMAS I.

— The growth and duration of life of *Celosia cristata* seedlings at different temperatures. (Reprinted from the «Journal of general Physiology». Vol. 17, pp. 763-781). Baltimore, 1934. 8°.

RICHARDSON OWEN WILLANS. — Molecular hydrogen and its spectrum. New Haven, 1934. 8°, pp. I-XV, 1-343.

SOLER EMANUELE. — Campagna geo-fisica nella regione carsica di Postumia eseguita dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nel 1931-1932 con il concorso delle RR. Grotte Demaniali («Memorie dell'Istituto Italiano di Speleologia»; N. 1). Trieste, 1934. 4°, pp. 1-83, tav. I-III.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 gennaio 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Algebra). — *Sulle algebre potenziali reali o complesse.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In questa Nota risolvo in primo luogo la seguente questione:

A) *Costruire una matrice quadrata avente un'assegnata equazione minima a coefficienti reali o complessi,*

questione che equivale a quest'altra:

B) *Costruire tutte le algebre potenziali reali o complesse.*

Dopo di che, tenendo conto di un importante criterio stabilito da G. Scorza⁽²⁾, atto a decidere della irriducibilità o meno di un'algebra potenziale definita in un corpo numerico qualunque, si deducono i seguenti teoremi:

I. *Ogni algebra reale o complessa, potenziale, priva di modulo, irriducibile, di ordine n , è equivalente all'algebra avente la tabella di moltiplicazione:*

[I]

	u_1	u_2	u_3	$\dots$	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_1	u_2	u_3	u_4	$\dots$	u_{n-1}	u_n	0
u_2	u_3	u_4	u_5	$\dots$	u_n	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_{n-2}	u_{n-1}	u_n	0	$\dots$	0	0	0
u_{n-1}	u_n	0	0	$\dots$	0	0	0
u_n	0	0	0	$\dots$	0	0	0

Quest'algebra si può considerare generata dall'elemento u_1 .

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) G. SCORZA, *Le algebre per ciascuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », novembre 1934).

II. Ogni algebra complessa potenziale dotata di modulo, irriducibile, di ordine n , è equivalente all'algebra avente la tabella di moltiplicazione:

[II]

	u_1	u_2	u_3	...	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_1	u_1	u_2	u_3	...	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_2	u_2	u_3	u_4	...	u_{n-1}	u_n	0
u_3	u_3	u_4	u_5	...	u_n	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...
u_{n-2}	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n	...	0	0	0
u_{n-1}	u_{n-1}	u_n	0	...	0	0	0
u_n	u_n	0	0	...	0	0	0

Quest'algebra si può considerare generata dall'elemento $u_1 + u_2$.

III. a) Ogni algebra reale potenziale dotata di modulo, irriducibile, di ordine dispari n , è equivalente all'algebra avente la tabella di moltiplicazione [II].

b) Ogni algebra reale potenziale dotata di modulo, irriducibile, di ordine pari $n = 2m$, è equivalente:

o all'algebra con la tabella di moltiplicazione [II],

o all'algebra avente la tabella di moltiplicazione:

[III]

	u_1	u_2	...	u_{m-1}	u_m	v_1	v_2	...	v_{m-1}	v_m
u_1	u_1	u_2	...	u_{m-1}	u_m	v_1	v_2	...	v_{m-1}	v_m
u_2	u_2	u_3	...	u_m	0	v_2	v_3	...	v_m	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
u_{m-1}	u_{m-1}	u_m	...	0	0	v_{m-1}	v_m	...	0	0
u_m	u_m	0	...	0	0	v_m	0	...	0	0
v_1	v_1	v_2	...	v_{m-1}	v_m	$-u_1$	$-u_2$	...	$-u_{m-1}$	$-u_m$
v_2	v_2	v_3	...	v_m	0	$-u_2$	$-u_3$	...	$-u_m$	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
v_{m-1}	v_{m-1}	v_m	...	0	0	$-u_{m-1}$	$-u_m$	...	0	0
v_m	v_m	0	...	0	0	$-u_m$	0	...	0	0

Quest'ultimo tipo di algebra non è altro che un'algebra complessa potenziale di ordine m , considerata come un'algebra reale di ordine $n = 2m$ ⁽¹⁾.

1. Proponiamoci di costruire una matrice quadrata K avente per equazione minima una assegnata equazione

$$(1) \quad \varphi(\xi) = 0$$

in un corpo numerico Γ .

Posto

$$(2) \quad \varphi(\xi) = [f_1(\xi)]^{r_1} \cdot [f_2(\xi)]^{r_2} \cdots [f_t(\xi)]^{r_t}$$

con $f_1(\xi), \dots, f_t(\xi)$ polinomi irriducibili nel corpo Γ e primi fra loro, se $K_1, \dots, K_t$ sono t matrici quadrate, di convenienti ordini, aventi rispettivamente per equazioni minime le equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} [f_1(\xi)]^{r_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ [f_t(\xi)]^{r_t} = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$(4) \quad K = \begin{vmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & K_t \end{vmatrix}$$

ha per equazione minima la (1). Infatti essendo

$$(5) \quad \varphi(K) = \begin{vmatrix} \varphi(K_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(K_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(K_t) \end{vmatrix}$$

tenendo conto della (2) e del fatto che le (3) sono le equazioni minime di $K_1, \dots, K_t$, si ricava intanto che è $\varphi(K) = 0$. Se $\Phi(\xi)$ è un polinomio che si annulla per $\xi = K$, dalla relazione

$$(6) \quad \Phi(K) = \begin{vmatrix} \Phi(K_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(K_2) & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi(K_t) \end{vmatrix}$$

(1) Per $m = 2$, e quindi $n = 4$, si ha il tipo di algebra di cui mi occupo nella Nota *Intorno ad un'algebra reale a 4 unità*. «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei», vol. XIX, 1° sem., fasc. 10, 1934.

si ricava che deve essere

$$(7) \quad \Phi(K_1) = \Phi(K_2) = \dots = \Phi(K_t) = 0,$$

e quindi, per un noto teorema⁽¹⁾, il polinomio $\Phi(\xi)$ deve essere divisibile per ciascuno dei primi membri delle equazioni minime di $K_1, \dots, K_t$, cioè per $[f_1(\xi)]^{r_1}, \dots, [f_t(\xi)]^{r_t}$. Ne segue che $\Phi(\xi)$ è divisibile per $\varphi(\xi)$. Ciò dimostra che effettivamente è $\varphi(\xi) = 0$ l'equazione minima di K .

2. Per quanto è detto nel n. 1, la costruzione della matrice K avente per equazione minima un'assegnata equazione, si riconduce al caso in cui questa equazione possieda un solo fattore irriducibile.

Supponiamo ora che il corpo Γ sia il corpo dei numeri complessi o reali. Nel primo caso un'equazione con un solo fattore irriducibile è del tipo

$$\{1\} \quad \xi^{n+1} = 0$$

o del tipo

$$\{2\} \quad (\xi - a)^n = 0 \quad [a \neq 0, \text{ complesso}].$$

Nel secondo caso, essa o è del tipo $\{1\}$, o è del tipo $\{2\}$ con a reale non nullo, o è del tipo

$$\{3\} \quad (\xi^2 + b\xi + a)^n = 0 \quad [\text{con } b^2 - 4a < 0, b \text{ e } a \text{ reali}]$$

a radici immaginarie coniugate.

a) Una matrice avente l'equazione minima $\{1\}$ è la matrice quadrata di ordine $n + 1$

$$(8) \quad K_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(avente eguali ad 1 gli elementi posti nella prima parallela alla diagonale principale e nulli tutti gli altri elementi). La matrice K_s ($s \leq n$) è la matrice avente eguali ad 1 gli elementi posti nella s -ma parallela alla diagonale principale e tutti gli altri nulli. Le matrici

$$(9) \quad K_1, K_1^2, \dots, K_1^n$$

risultano evidentemente indipendenti. Inoltre è $K_1^{n+1} = 0$. L'equazione minima di K è dunque la $\{1\}$.

(1) G. SCORZA, *Corpi numerici ed algebre*. (Principato, Messina), parte II, n. 33.

La matrice K genera un'algebra potenziale di ordine n , avente la tabella di moltiplicazione $[I]$, dove s'è posto

$$(10) \quad u_s = K_s^i \quad [s = 1, 2, \dots, n].$$

Detta algebra è pseudonulla e, quindi, priva di modulo.

b) Una matrice avente l'equazione minima (2) è la matrice quadrata di ordine n

$$(11) \quad K_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

(aventi eguali ad a gli elementi della diagonale principale, eguali ad 1 gli elementi della 1^a parallela alla diagonale principale e tutti gli altri elementi nulli). Infatti, se indichiamo con K_0 la matrice del tipo (8), ma di ordine n , sarà $K_0^n = 0$ e le matrici

$$(12) \quad I, K_0, K_0^2, \dots, K_0^{n-1}$$

risultano indipendenti. (Con I si indica la matrice identica di ordine n). Ora dalla (11) si ricava

$$(13) \quad \begin{cases} K_2 = aI + K_0 \\ K_2^2 = a^2 I + 2aK_0 + K_0^2 \\ K_2^3 = a^3 I + 3a^2 K_0 + 3aK_0^2 + K_0^3 \\ \dots \\ K_2^{n-1} = a^{n-1} I + \binom{n-1}{1} a^{n-2} K_0 + \dots + \binom{n-1}{n-2} a K_0^{n-2} + K_0^{n-1}. \end{cases}$$

Dalle (13) si ricava che le n matrici

$$(14) \quad I, K_2, K_2^2, \dots, K_2^{n-1}$$

sono combinazioni lineari delle n matrici (12) e il determinante della matrice dei coefficienti è

$$(15) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & \binom{n-1}{1} a^{n-2} & \binom{n-1}{2} a^{n-2} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi le matrici (14) sono indipendenti.

Si ha inoltre, essendo $K_0^n = 0$,

$$(16) \quad K_2^n = a^n I + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot K_0 + \binom{n}{2} a^{n-2} K_0^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a K_0^{n-1}$$

cioè K_2^n è combinazione lineare delle matrici (14). Ciò dimostra che K_2 è di rango n . L'equazione minima di K_2 è la (2); infatti essa è di grado eguale al rango di K_2 , ha il coefficiente di ξ^n eguale ad 1 ed è soddisfatta dalla matrice K_2 perchè è .

$$(17) \quad (K_2 - a I)^n = K_0^n = 0.$$

L'algebra potenziale generata da K_2 , per quanto abbiamo detto, coincide con il sistema congiungente le matrici (12). Scegliendo queste matrici come unità in detta algebra e ponendo

$$(18) \quad u_1 = I, \quad u_2 = K_0, \quad u_3 = K_0^2, \dots, u_{n-1} = K_0^{n-2}, \quad u_n = K_0^{n-1}$$

la tabella di moltiplicazione risulta data dalla tabella [II].

Si noti esplicitamente che in questo caso l'algebra è dotata di modulo e quanto abbiamo detto vale sia per a reale sia per a complesso qualunque, purchè non nullo.

Si osservi infine che l'algebra in questione anzichè generata da $K_2 = aI + K_0$ si può considerare generata da $I + K_0$, cioè da $u_1 + u_2$.

c) Se indichiamo con α_1, α_2 le radici immaginarie coniugate dell'equazione quadratica

$$\xi^2 + b\xi + a = 0 \quad (b^2 - 4a < 0)$$

la cui potenza m -ma ci dà l'equazione (3), una matrice avente nel corpo reale l'equazione minima (3) è la matrice quadrata di ordine m

$$(19) \quad K_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Intanto si osservi che si ha, indicando con H la matrice del tipo (8) di ordine m ,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_3 = \alpha_1 I + \alpha_2 H \\ K_3^2 = \alpha_1^2 I + 2 \alpha_1 \alpha_2 H + \alpha_2^2 H^2 \\ K_3^3 = \alpha_1^3 I + 3 \alpha_1^2 \alpha_2 H + 3 \alpha_1 \alpha_2^2 H^2 + \alpha_2^3 H^3 \\ \dots\dots\dots \\ K_3^{m-1} = \alpha_1^{m-1} I + \binom{m-1}{1} \alpha_1^{m-2} \alpha_2 H + \dots + \\ \quad + \binom{m-1}{m-2} \alpha_1 \alpha_2^{m-2} H^{m-2} + \alpha_2^{m-1} H^{m-1}. \end{array} \right.$$

Dalle (20) si ricava che le m matrici

$$(21) \quad I, K_3, K_3^2, \dots, K_3^{m-1}$$

sono indipendenti nel corpo complesso, perchè combinazioni lineari, nel corpo complesso, delle m matrici indipendenti

$$(22) \quad I, H, H^2, \dots, H^{m-1}$$

con il determinante della matrice dei coefficienti

$$(23) \quad \left| \begin{array}{cccccc} I & & 0 & & 0 & 0 \dots 0 \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & 0 & 0 \dots 0 \\ \alpha_1^2 & & 2 \alpha_1 \alpha_2 & & \alpha_2^2 & 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1^{m-1} & \binom{m-1}{1} \alpha_1^{m-2} \alpha_2 & \dots\dots\dots & \alpha_2^{m-1} \end{array} \right| = \alpha_2^{\frac{m(m-1)}{2}} \neq 0.$$

La matrice K_3^m , essendo $H^m = 0$, risulta combinazione lineare delle matrici (21); infatti si ha:

$$(24) \quad K_3^m = \alpha_1 I + \binom{m}{1} \alpha_1^{m-1} \alpha_2 H + \dots + \binom{m}{m-1} \alpha_1 \alpha_2^{m-1} H^{m-1}.$$

La matrice K_3 è pertanto una matrice di rango m , nel corpo complesso, e quindi genera un'algebra complessa $[K_3]$ di ordine m , coincidente con il sistema congiungente le matrici (22), essendo le matrici (21) combinazioni lineari delle matrici (22). Nell'algebra complessa $[K_3]$ possiamo considerare le m unità

$$(25) \quad u_1 = I, \quad u_2 = H, \quad u_3 = H^2, \dots, u_m = H^{m-1}.$$

Ora l'algebra complessa $[K_3]$ di ordine m si può considerare come un'algebra reale di ordine $n = 2m$ assumendo per unità le (25) e le altre m

$$(26) \quad v_1 = iI, \quad v_2 = iH, \quad v_3 = iH^2, \dots, v_m = iH^{m-1} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Si osservi ora che l'equazione minima di K , nel corpo complesso, dovendo essere di grado m , è la sua equazione fondamentale

$$(27) \quad (\alpha_1 - \xi)^m = 0.$$

Se

$$\Phi(\xi) = 0$$

è l'equazione minima di K , nel corpo reale, essendo $\Phi(K_1) = 0$, $\Phi(\xi)$ deve essere divisibile, nel corpo complesso, per il 1° membro dell'equazione minima (27) di K , nel corpo complesso, cioè deve essere

$$\Phi(\xi) = (\alpha_1 - \xi)^m \varphi(\xi);$$

ora il polinomio di grado minimo che moltiplicato per $(\alpha_1 - \xi)^m$ dà un prodotto reale è un multiplo del coniugato di $(\alpha_1 - \xi)^m$, cioè di $(\alpha_2 - \xi)^m$, secondo un numero reale, perchè un numero complesso $a + ib$ moltiplicato per $x + iy$ dà un numero reale quando e solo quando è $x + iy = \rho(a - ib)$ con ρ reale.

L'equazione minima di K , nel corpo reale è pertanto data da

$$\Phi(\xi) = (\alpha_1 - \xi)^m (\alpha_2 - \xi)^m = 0,$$

cioè è

$$(3) \quad (\xi^2 + b\xi + a)^m = 0.$$

Si conclude che, essendo K , di rango $n = 2m$, nel corpo reale, l'algebra reale di ordine $2m$ generata da K , è l'algebra complessa $[K_1]$ considerata come un'algebra reale. La tabella di moltiplicazione di quest'algebra, rispetto alle unità $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$, date dalle (25) e (26), è la (III).

Si può verificare che detta algebra si può considerare generata dall'elemento $\chi = v_1 + v_2 = i(u_1 + u_2)$. Si osservi che l'elemento $u_1 + u_2$ genera, nel corpo complesso, l'algebra complessa $[K_1]$ [vedi caso b)].

Da quanto s'è detto in a), b), c) e dal criterio di riducibilità delle algebre potenziali dimostrato dallo Scorza, e cioè che: *condizione necessaria e sufficiente perchè un'algebra potenziale definita in un corpo Γ sia riducibile è che l'equazione minima dell'algebra possenga un solo fattore irriducibile in Γ , seguono i teoremi enunciati nella prefazione.*

Matematica (Analisi). — *Intorno ad una proprietà delle equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Il Sobrero ha osservato che se si considera l'equazione differenziale

$$[1] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0$$

e si tenta di soddisfare ad essa con una funzione F della combinazione lineare $z = x + jy$, si trova che la costante j deve soddisfare all'equazione

$$(1) \quad 1 + 2j^2 + j^4 = 0.$$

Tenendo conto della relazione (1) si ha

$$(2) \quad z^4 = (x^4 - y^4) + 4x^3yj + (6x^2y^2 - 2y^4)j^2 + 4xy^3j^3.$$

Il Sobrero ha constatato ⁽²⁾ che il termine indipendente da j e i coefficienti di j, j^2, j^3 soddisfano all'equazione [1], cioè ha notato che per l'equazione (1), relativa all'equazione differenziale [1], si verifica la stessa circostanza presentata dall'equazione

$$(3) \quad 1 + k^2 = 0,$$

relativa all'equazione differenziale

$$[2] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0.$$

Il Sobrero è stato condotto, pertanto, a considerare un tipo di algebra (che chiama *ipercomplessa* ⁽³⁾) mettendo a base l'equazione [1], in analogia all'al-

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) L. SOBRERO, *Algebra delle funzioni ipercomplesse e sue applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*. « Memorie R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1934, § 2.

(3) L'algebra introdotta dal SOBRERO e stata caratterizzata dal punto di vista della teoria generale delle algebre dallo SCORZA, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », 1934, *Sopra una certa algebra reale del 4° ordine*. Nella Nota *Intorno ad un'algebra reale a 4 unità* pubblicata negli stessi « Rendiconti », 1934, ho dimostrato che detta algebra coincide con la nota algebra complessa doppia, irriducibile, dotata di modulo, mettendo in evidenza le semplificazioni che ne derivano per la teoria delle funzioni in detta algebra.

gebra ordinaria dei numeri complessi a base della quale si trova l'equazione [2].

Ora si domanda: qual'è l'intima ragione per la quale si verifica la circostanza constatata dal Sobrero nel caso dell'equazione [1]? È a tale domanda che si risponde nella presente Nota. Non solo, ma si guarda inoltre la questione da un punto di vista più generale.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$[3] \quad \left(a_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} + a_2 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + a_n \frac{\partial^n}{\partial y^n} \right) F = 0$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n$ numeri reali costanti.

Se vogliamo soddisfare alla [3] con una funzione $F(\zeta)$ della combinazione lineare $\zeta = x + \mu y$ delle due variabili reali x ed y , tenendo conto che si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial y} = \frac{d^n F}{d\zeta^n} \mu^1$$

e che quindi l'equazione [3] si trasforma nell'equazione

$$(5) \quad \frac{d^n F}{d\zeta^n} (a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + \dots + a_n \mu^n) = 0,$$

si trova che:

1) Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $F(x + \mu y)$ soddisfi all'equazione differenziale [3] qualunque sia la funzione $F(\zeta)$ (supposta soltanto derivabile) è che la costante μ soddisfi alla condizione

$$(6) \quad a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + \dots + a_n \mu^n = 0.$$

2. Sia K una matrice quadrata di rango n avente per equazione minima l'equazione

$$(7) \quad \varphi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n = 0.$$

Consideriamo l'algebra Q di ordine n , nel corpo reale, i cui elementi sono dati da

$$(8) \quad x = \xi_0 I + \xi_1 K + \xi_2 K^2 + \dots + \xi_{n-1} K^{n-1}$$

al variare di $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ nel corpo dei numeri reali e dove con I si indica la matrice identica dello stesso ordine di K . L'algebra Q si dirà legata all'equazione differenziale [3]. Essa è potenziale. Se K non è degenera, Q è generata da K . Se K è degenera Q è generata da $I + K$.

Se $F(\chi)$ si suppone rappresentata da una serie di potenze in χ a coefficienti reali, la funzione $F(Ix + Ky)$, tenendo conto della (6), è del tipo

$$(9) \quad F(Ix + Ky) = F_0(x, y)I + F_1(x, y)K + F_2(x, y)K^2 + \dots + F_{n-1}(x, y)K^{n-1},$$

dove $F_j(x, y)$ è una serie di potenze in x, y a coefficienti reali.

La funzione $F(Ix + Ky)$, considerata come funzione delle due variabili reali x ed y , deve soddisfare all'equazione differenziale [3], per il teorema I), essendo μ una costante che soddisfa alla condizione (6), e quindi, per la (9) essendo $1, K, K^2, \dots, K^{n-1}$ delle costanti, deve essere

$$(10) \quad \left(a_0 \frac{\partial^n F_0}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F_0}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + a_n \frac{\partial^n F_0}{\partial y^n} \right) I + \left(a_0 \frac{\partial^n F_1}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F_1}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + a_n \frac{\partial^n F_1}{\partial y^n} \right) K + \\ + \dots + \left(a_0 \frac{\partial^n F_{n-1}}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F_{n-1}}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + a_n \frac{\partial^n F_{n-1}}{\partial y^n} \right) K^{n-1} = 0.$$

Ma le matrici $I, K, K^2, \dots, K^{n-1}$ sono indipendenti, e quindi dalla (10) si ricavano le relazioni:

$$(11) \quad a_0 \frac{\partial^n F_j}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F_j}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + a_n \frac{\partial^n F_j}{\partial y^n} = 0 \quad (j = 0, \dots, n-1),$$

cioè si ha:

II) I coefficienti $F_0(x, y), F_1(x, y), \dots, F_{n-1}(x, y)$ di $I, K, K^2, \dots, K^{n-1}$ della funzione $F(Ix + Ky)$ soddisfano all'equazione differenziale [3].

Se $a_0 = 0$, K è degenera e nell'algebra P generata da K non c'è I . Nella (8) e nella (9) si sopprime il primo termine del secondo membro ed il teorema si dimostra, in modo analogo, anche per l'algebra P .

Resta pertanto generalizzata e dimostrata la circostanza constatata dal Sobrero a cui si fece cenno nelle righe introduttive.

3. Nota. Poniamo

$$(12) \quad \varphi(\xi) = \xi^t \left[\prod_{i=1}^{r+s} (a_i + b_i \xi)^{q_i} \right] \left[\prod_{j=1}^{s} (\alpha_j + \beta_j \xi + \gamma_j \xi^2)^{q_j} \right]$$

essendo $a_i, b_i, \alpha_j, \beta_j$ e γ_j numeri reali, t, r, s, q_i e q_j numeri interi legati dalla relazione

$$(13) \quad t + p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n,$$

e con l'equazione

$$(14) \quad \alpha_j + \beta_j \xi + \gamma_j \xi^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, s)$$

a radici immaginarie coniugate.

In corrispondenza alla (12) l'operatore differenziale che appare in parentesi al primo membro della [3] risulta eguale al prodotto di operatori differenziali dato da

$$(15) \quad \frac{\partial^t}{\partial y^t} \left[\prod_i^{1 \dots r} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{e_i} \right] \left[\prod_j^{1 \dots s} \left(\alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_j \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{g_j} \right].$$

Ne segue che ⁽¹⁾ conducono ad algebre reali potenziali irriducibili soltanto i tre tipi di equazioni differenziali

$$[I] \quad \frac{\partial^t F}{\partial y^t} = 0 \quad (t > 1)$$

$$[II] \quad \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^e F = 0 \quad (b \neq 0, e \geq 1)$$

$$[III] \quad \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^\sigma F = 0 \quad (\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0, \sigma \geq 1).$$

Nella [I] si suppone $t > 1$ perchè per $t = 1$ l'equazione in ξ corrispondente è $\xi = 0$ a cui soddisfa soltanto la matrice nulla e questa non genera un'algebra.

(1) G. SCORZA, *Le algebre per ognuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », novembre 1934; N. SPAMPINATO, *Sulle algebre potenziali reali o complesse*. [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », gennaio 1935].

Matematica. — *Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria.*
Nota di MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. DI LEGGE.

1. Quella parte della teoria metrica delle curve algebriche piane, che si fonda sulla definizione di Newton di *diametro coniugato* ad una data direzione, è rimasta finora incompleta, non essendo state, a quanto io sappia, condotte a fondo le estensioni della analoga teoria delle coniche.

La presente Nota si occupa appunto di colmare questa lacuna.

Dopo aver dato la definizione di *diametri principali* (diametri perpendicolari alla direzione coniugata) e *diametri autoconiugati* (diametri coniugati alla propria direzione) indico un metodo per scriverne le equazioni (ciò che finora a quanto io sappia non è ancora stato fatto). Completo poi un risultato dato da Steiner per le curve del 3° e 4° ordine, relativamente alle coppie di *diametri mutuamente coniugati*, dimostrando che il numero di queste coppie, per una curva d'ordine n , è in generale $\frac{n(n-3)}{2} + 1$.

Infine mostro come i risultati ottenuti possano condurre alla determinazione *effettiva* degli eventuali assi di simmetria d'una curva algebrica d'ordine pari, e indico un metodo pratico per la loro determinazione anche nel caso di curve (algebriche) d'ordine dispari, l'equazione della curva essendo data, in entrambi i casi, sotto la forma più generale.

PARTE I.

PROPRIETÀ DIAMETRALI. — DIAMETRI PRINCIPALI; AUTOCONIUGATI (ASINTOTI);
MUTUAMENTE CONIUGATI.

2. Sia

$$(1) \quad a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \dots + a_{1,n-1}xy^{n-1} + \\ + a_{0n}y^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + a_{n-2,1}x^{n-2}y + \dots + a_{1,n-2}xy^{n-2} + \\ + a_{0,n-1}y^{n-1} + \dots + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + \\ + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_0 = 0$$

l'equazione di una curva algebrica piana d'ordine n .

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1934.

Secondo Newton si definisce notoriamente come *diametro* della curva coniugato ad una data direzione, il luogo dei punti (in linea retta) che sono centri delle medie distanze (dei punti d'incontro della curva) d'un sistema di rette parallele a quella direzione, e si trova come equazione di questo diametro (se m è il rapporto direttivo della direzione data) la seguente:

$$(2) [na_{n0} + (n-1)a_{n-1,1}m + (n-2)a_{n-2,2}m^2 + \dots + a_{1,n-1}m^{n-1}]x + \\ + (a_{n-1,1} + 2a_{n-2,2}m + 3a_{n-3,3}m^2 + \dots + na_{0n}m^{n-1})y + \\ + a_{n-1,0} + a_{n-2,1}m + \dots + a_{0,n-1}m^{n-1} = 0.$$

Esso ha per rapporto direttivo

$$(3) m' = - \frac{na_{n0} + (n-1)a_{n-1,1}m + (n-2)a_{n-2,2}m^2 + \dots + a_{1,n-1}m^{n-1}}{a_{n-1,1} + 2a_{n-2,2}m + 3a_{n-3,3}m^2 + \dots + na_{0n}m^{n-1}}.$$

3. Se esiste un punto (*punto principale*) tale che sia centro di medie distanze sopra ogni retta condotta per esso, tutti i diametri passano per questo punto. Sostituendone le coordinate nella (2), questa dovrà cioè essere soddisfatta per qualunque valore di m . Da ciò il modo di verificare se una data curva ammette un punto principale, e nel caso affermativo di determinarne le coordinate.

Viceversa se tutti i diametri passano per uno stesso punto, questo è centro di medie distanze sopra ogni retta passante per esso.

4. È noto e d'altronde si ricava subito ponendo la condizione

$$(4) mm' + 1 = 0$$

che esistono n diametri perpendicolari alla direzione coniugata.

Ora io chiamo DIAMETRO PRINCIPALE ogni diametro perpendicolare alla direzione ad esso coniugata, estendendo con ciò la definizione di asse d'una conica.

Le equazioni degli n diametri principali della curva (1) si trovano ponendo nella (4) al posto di m' il valore dato dalla (3). Fatti i calcoli e ridotto a forma intera, si avrà (1)

$$(5) a_{n-1,1} + (2a_{n-2,2} - na_{n0})m + \{3a_{n-3,3} - (n-1)a_{n-1,1}\}m^2 + \\ + \{4a_{n-4,4} - (n-2)a_{n-2,2}\}m^3 + \dots + \\ + \{na_{0n} - 2a_{2,n-2}\}m^{n-1} - a_{1,n-1}m^n = 0$$

(1) La relazione (5) si trova in E. CIANI, *Le linee diametrali delle curve algebriche piane* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », 1889) senza che vi siano dedotte ulteriori conseguenze di indole generale.

(relazione che per $n = 2$ si riduce alla nota condizione che lega i rapporti direttivi dei due assi d'una conica).

Per ognuna delle n radici m_i di questa equazione di grado n nella variabile m , si avrà, sostituendo nella (2), l'equazione di un diametro principale della curva.

5. Nel caso in cui la (5) si riduce ad una identità, la curva ammetterà infiniti diametri principali. Uguagliando a zero i coefficienti della (5) si trovano delle relazioni tra i coefficienti dell'equazione della curva, da cui si vede che questo caso si può presentare soltanto per n pari, e che permettono di stabilire la forma che assume la equazione della curva (si trova che i termini d'ordine n (pari) si riducono a $a_{n,0}(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$, la curva tocca cioè $\frac{n}{2}$ volte in ognuno dei punti ciclici la retta all'infinito)⁽¹⁾.

Più in particolare ancora gli infiniti diametri principali potranno passare tutti per uno stesso punto, che sarà *punto principale* per la curva.

6. Passiamo alla ricerca dei DIAMETRI AUTOCONIUGATI, di cui cioè ognuno coniugato alla propria direzione. Si dovrà nella (3) porre $m' = m$. Con una discussione opportuna si trova subito che la direzione di ogni diametro autoconiugato coincide con la direzione di un punto all'infinito della curva, nel quale non vi sia contatto con la retta all'infinito, e viceversa.

I rapporti direttivi dei diametri autoconiugati sono cioè le radici (non multiple) dell'equazione (in m)

$$(6) \quad a_{n,0} + a_{n-1,1}m + a_{n-2,2}m^2 + \dots + a_{0,n}m^n = 0$$

si hanno quindi in generale n diametri autoconiugati, le cui equazioni si ottengono sostituendo nella (2). Se m_i è radice semplice della (6), il diametro autoconiugato corrispondente avrà dunque per equazione

$$(7) \quad mx - y - \frac{a_{n-1,0} + a_{n-2,1}m_i + \dots + a_{0,n-1}m_i^{n-1}}{a_{n-1,1} + 2a_{n-2,2}m_i + \dots + na_{0,n}m_i^{n-1}} = 0.$$

Si vede dunque che i diametri autoconiugati non sono altro che gli asintoti della curva in quei punti all'infinito in cui la curva non abbia contatti con la retta all'infinito.

7. Un altro problema che si presenta per $n > 2$ è quello di cercare le coppie di DIAMETRI MUTUAMENTE CONIUGATI, di cui cioè ognuno coniugato alla direzione dell'altro⁽²⁾.

(1) Questo caso è anche contemplato dal CIANI, loc. cit.

(2) Questione posta da STEINER, *Aufgaben und Sätze* (« Crelle's Journal », Bd. XLVII, pp. 106-108, « Gesammelte Werke », Bd. II, p. 599, n. 3) e risolta soltanto nei casi

Per risolverlo basterà nella (3) scambiare m con m' ed eliminare m' tra la relazione che così risulta e la relazione (3). Esaminando il grado dell'equazione che così si trova (ridotta intera) e osservando che un diametro autoconiugato si può considerare come una coppia di diametri mutuamente coniugati venuti a coincidere si trova che una curva d'ordine n ha in generale

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1$$

coppie di diametri mutuamente coniugati (per $n = 3$, $n = 4$ si ritrovano, sostituendo nella precedente, i risultati di Steiner).

PARTE II.

RICERCA DEGLI ASSI DI SIMMETRIA.

8. Possiamo ora applicare i risultati precedenti alla determinazione effettiva degli eventuali assi di simmetria di una curva algebrica d'ordine pari.

In tal caso, determinati gli n diametri principali della curva col metodo esposto (v. n. 4), tra questi diametri principali si troveranno evidentemente tutti gli eventuali assi di simmetria della curva.

Per verificare se effettivamente ne ammetta e in particolare per vedere se uno qualunque d degli n diametri principali (di cui si saranno scritte le equazioni con i procedimenti sopra indicati) sia asse di simmetria per la curva, si applichi una trasformazione di coordinate, prendendo come nuovo asse delle ascisse la retta d , e verificando con i soliti criteri se l'equazione trasformata sia tale che il nuovo asse delle ascisse sia asse di simmetria. Analogamente si procederà per gli altri diametri principali⁽¹⁾.

$n = 3$, $n = 4$, in cui si hanno rispettivamente 1 e 3 coppie di diametri mutuamente coniugati.

(1) Si può anche ricorrere al seguente criterio dovuto a S. MANGEOT, [*Étude analytique sur la symétrie*; «Nouvelles Annales de Mathématique» (3), 1896], il quale però non ne trae profitto, mentre con la ripetuta applicazione, come è esposto più sotto, combinato con la teoria esposta nella Parte I della presente Nota, acquista importanza pratica diventando un utile strumento per la questione che ci interessa.

Il teorema è il seguente: « Affinchè una curva algebrica piana d'ordine n , $f(xy) = 0$ (di cui l'equazione sia messa sotto forma intera) sia simmetrica rispetto ad una retta, $ax + by + c = 0$, è necessario e sufficiente che l'espressione $a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$ sia divisibile per $ax + by + c$, e che il quoziente, uguagliato a zero, rappresenti una curva simmetrica rispetto alla retta ».

Ora a questa nuova curva (d'ordine $n - 2$) si potrà applicare lo stesso criterio, e ricavarne (se esiste la simmetria) un'altra curva (d'ordine $n - 4$) che dovrà ancora essere simmetrica rispetto alla retta data, e così via. Se la simmetria esiste le successive espres-

9. Sia invece n dispari. In tal caso gli assi di simmetria, se esistono, sono, come è noto, perpendicolari rispettivamente alle direzioni dei punti all'infinito della curva.

Se dunque a è asse di simmetria, le rette perpendicolari ad esso passeranno per un determinato punto all'infinito della curva e segheranno la curva in punti simmetrici rispetto ad a . L'asse a è cioè il luogo del centro di medie distanze M degli $n - 1$ punti, in numero pari, situati a distanza finita in cui ognuna di quelle perpendicolari sega la curva.

Da ciò un metodo per la determinazione effettiva di tutti gli assi di simmetria della curva.

Detto infatti m_i il rapporto direttivo della direzione determinata da un punto all'infinito della curva, si determini il centro di medie distanze $M(x_0, y_0)$, su una delle rette parallele alla data direzione, p. es., la retta $y = mx$, ciò che non presenta difficoltà, e si conduca per esso la retta perpendicolare alla direzione data,

$$(8) \quad x - x_0 + m_i(y - y_0) = 0.$$

L'asse di simmetria a_i , relativo al dato punto all'infinito della curva, dovrà, se esiste, coincidere con questa retta.

In corrispondenza agli n punti all'infinito della curva, (i cui rapporti direttivi, data l'equazione della curva sono determinati) si potranno dunque scrivere le equazioni delle n rette (8) tra cui si dovranno trovare *tutti* gli eventuali assi di simmetria della curva.

Per verificare se la (8) rappresenta effettivamente un asse di simmetria, si potrà ricorrere ad uno dei criteri, esposti al n. 8.

Così, p. es., si verifica che la curva

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + 3xy^2 - 3x^2y - x^2\sqrt{2} - y^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}xy - \\ - 4x + 4y - 2\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

ha per unico asse di simmetria la retta

$$x + y + \sqrt{2} = 0.$$

sioni del tipo $a \frac{\partial f_i}{\partial x} + b \frac{\partial f_i}{\partial y}$ saranno tutte esattamente divisibili per $ax + by + c$, e l'ultimo quoziente o sarà una costante, oppure uguagliato a zero rappresenterà una retta (o un gruppo di rette) perpendicolari alla retta data.

Ora, quadrando la (2), si ha:

$$(x_0 x_3 - x_1 x_2)^2 = x_0^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 - 2 x_0 x_1 x_2 x_3,$$

espressione che — per le (1), (3), (6) nulle — diventa

$$x_0^2 x_2 x_4 + x_0 x_1 x_2 x_3 - 2 x_0 x_1 x_2 x_3 = x_0 x_2 (x_0 x_4 - x_1 x_3);$$

pertanto se è nulla la

$$(4) \quad x_0 x_4 - x_1 x_3,$$

lo è anche il quadrato di

$$(2) \quad x_0 x_3 - x_1 x_2$$

e quindi l'espressione (2) stessa.

Analogamente per la (5) si ha, con le sostituzioni precedenti:

$$\begin{aligned} (x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 &= x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 - 2 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= x_0 x_2 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 - 2 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= x_2 x_4 (x_0 x_4 - x_1 x_3); \end{aligned}$$

e ne segue il teorema per $r = 4$.

Osservazione. — È opportuno notare che, sostituendo agli indici della (2) gl'indici successivi, si ha l'espressione (5); e che in tal modo sono legate le due espressioni prive del termine di 2° grado [(2) e (5)], che si annullano, se si annullano le (1), (3), (6) e (4). Gli indici poi della (4) si ottengono da quelli delle (2) e (5) nel modo qui appresso indicato dalle frecce:



Si vede inoltre che

$$\begin{array}{cc} (2) & (4) \\ & (5) \end{array}$$

sono 3 espressioni di (α) , che formano un triangolo, il vertice (2) essendo seguito dagli altri due della colonna successiva destra, a partire dalla stessa orizzontale.

2. Per $r = 5$ le espressioni da considerare sono:

$$\begin{array}{l} 1) \ x_0 x_2 - x_1^2, \quad 2) \ x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad 4) \ x_0 x_4 - x_1 x_3, \quad 7) \ x_0 x_5 - x_1 x_4, \\ 3) \ x_1 x_3 - x_2^2, \quad 5) \ x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad 8) \ x_1 x_5 - x_2 x_4, \\ 6) \ x_2 x_4 - x_3^2, \quad 9) \ x_2 x_5 - x_3 x_4, \\ 10) \ x_3 x_5 - x_4^2 \end{array}$$

E qui per (1), (3), (6) e (10) nulle, si hanno con le

$$a) \quad (x_0 x_4 - x_1 x_3)^2 = (x_0 x_5 - x_1 x_4) x_2 x_3,$$

$$b) \quad (x_1 x_5 - x_2 x_4)^2 = (x_0 x_5 - x_1 x_4) x_2 x_3,$$

anche le

$$c) \quad (x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 = (x_1 x_5 - x_2 x_4) x_1 x_3,$$

$$d) \quad (x_2 x_5 - x_3 x_4)^2 = (x_1 x_5 - x_2 x_4) x_5 x_3.$$

Cioè col triangolo precedente, di vertici (2), (4) e (5), si presentano ora quelli di vertici

$$\begin{array}{c} (4), (7) \text{ ed } (8) \\ e \\ (5), (8) \text{ e } (9), \end{array}$$

sempre a destra della linea

$$(1), (3), (6), (10)$$

e tali che (4) ed (8) ovvero (5) e (9) sono nulle se lo sono anche rispettivamente (7) ed (8); e permanendo inoltre la legge degli indici osservata nel caso di $r = 4$:



Sicchè si può anche qui dire che, essendo

$$(1), (3), (6) \text{ e } (10)$$

nulle, se inoltre

$$1) \text{ è nulla la } (4), \text{ lo sono anche } (2) \text{ e } (5),$$

$$2) \text{ » » » } (8), \text{ » » » } (5) \text{ e } (9),$$

$$3) \text{ » » » } (7), \text{ » » » } (4) \text{ e } (8);$$

e concludere, per $r = 5$, che, se sono nulle

$$(1), (3), (6), (10) \text{ e } (7),$$

lo sono anche

$$(4), (8), (2), (5) \text{ e } (9).$$

Così proseguendo si giustifica il teorema per r eguale a qualunque altro intero ⁽¹⁾.

(1) In un prossimo lavoro mi occuperò del problema analogo per le equazioni delle superficie rigate razionali normali di data specie.

Matematica (Geometria differenziale). — *Couple de surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent.*
Nota di S. FINIKOFF, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. Deux surfaces S et S' sont en correspondance C si leurs tangentes asymptotiques aux points homologues concourent.

Quelles que soient deux surfaces S et S' , on peut les mettre en correspondance C au moins de deux façons différentes.

Menons deux tangentes asymptotiques l_1, l_2 au point arbitraire M de S et soient k_1, k_2 deux congruences paraboliques engendrées par les tangents asymptotique de S' .

Si la surface réglée de k_1 qui passe par l_1 touche S' le long d'une courbe C_1 , celle de k_2 contenant l_2 ; le long de C_2 et M_3 est un point d'intersection de C_1 et C_2 , la correspondance (M, M_3) est une autre correspondance C . On obtient une autre correspondance C si l'on échange les congruences k_1 et k_2 .

2. Si M_1 et M_2 sont les points de rencontre des tangentes asymptotiques homologues, et u et v les paramètres asymptotiques de S les quatre points analytiques⁽²⁾ M, M_1, M_2, M_3 satisfont le système:

$$(1) \quad M_{iu} = \sum_{k=0}^3 a_i^k M_k \quad M_{iv} = \sum_{k=0}^3 b_i^k M_k$$

dont les coefficients a_i^k, b_i^k sont donnés par le tableau:

	M	M_1	M_2	M_3	M	M_1	M_2	M_3
	$\frac{a-m}{2}$	1	0	0	$\frac{b-n}{2}$	0	1	0
	$A_2 q$	$\frac{m-a}{2}$	β	0	$B_2 q$	$\frac{b+n}{2}$	m	1
(2)	$A_1 q$	n	$\frac{a+m}{2}$	1	$B_1 q$	γ	$\frac{n-b}{2}$	0
	0	A_1	A_2	$-\frac{a+m}{2}$	0	B_1	B_2	$-\frac{b+n}{2}$

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) Le point analytique M_i est l'ensemble des quatre coordonnées projective homogènes du point M_i géométriques.

où β, γ sont les coefficients de l'élément linéaire projectif de M. Fubini.

La surface S donnée, les coefficients a_i^k, b_i^k sont déterminés par un système en involution qui détermine la seconde surface S' si l'on donne q comme fonction arbitraire de deux variables indépendantes, les valeurs de A_1, A_2 sur une courbe quelconque de S comme fonctions arbitraires d'un argument et les valeurs de a, b, m, n, n_u à un point de cette courbe comme constantes arbitraires.

3. Les développables des congruences (M, M_1) et (M, M_2) sont déterminées par la même équation

$$(3) \quad A_2 du^2 + (B_2 - A_1) dudv - B_1 dv^2 = 0;$$

donc les développables en question correspondent. Les tangentes aux courbes (3) de S, S' concourent.

Les foyers $M_1 \lambda + M_2$ de la congruence (M, M_2) sont déterminés par l'équation

$$(4) \quad A_2 \lambda^2 + (A_1 - B_2) \lambda - B_1 = 0,$$

les plans focaux $(MM_1 M_2) \lambda + (MM_1 M_2)$ de $(MM_1 M_2)$ - par l'équation

$$(5) \quad A_2 \lambda^2 + (B_2 - A_1) \lambda - B_1 = 0.$$

Les plans focaux de $(MM_1 M_2)$ contiennent les foyers de (M, M_2) si

$$(6) \quad 1) \quad A_1 = B_2 \quad 2) \quad A_2 = 0, B_1 = 0.$$

1) Les deux directions (3) sont conjuguées, les tangentes (3) coupent $M_1 M_2$ aux foyers. Les deux congruences sont l'une conjuguée et l'autre harmonique aux surfaces S, S' . Les suites de Laplace qui d'y proviennent sont inscrites et circonscrites aux suites des congruences engendrée par les tangentes (3) de S, S' ;

2) Les asymptotiques de S, S' correspondent et les tangentes asymptotiques concourent⁽¹⁾.

4. Les asymptotiques de S, S' correspondent inversement c.-à.-d. la tangente à la ligne u de S coupe celle de la ligne v de S' et vice-versa si

$$A_1 = 0, \quad B_2 = 0.$$

(1) Voir ma Note *Couples des surfaces* etc. Ces « Rendiconti », to. 20, fasc. 5-6, p. 164.

L'équation (6₁) est vérifiée; les surfaces S, S' sont les focales des deux suites de Laplace inscrites et circonscrites dans les mêmes suites $[MM_1], [M, M_2]$.

La surface S est une surface arbitraire de M. Jonas, S' est déterminée avec 6 constantes arbitraires. Comme S' est une surface de M. Jonas également, la configuration étudiée donne un mode de transformation des surfaces en question.

Si

$$A_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad q = \pm 1,$$

les deux congruences $(MM_1), (M, M_2)$ forment un couple stratifiable conjugué.

Meccanica. — *Dissipazione vorticoso nei regimi turbolenti.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La teoria della turbolenza da me recentemente proposta contiene un'ipotesi (che è poi la caratteristica di quella teoria) che alcuni stentano ad accettare. Mi riferisco alla recensione di E. Pistolesi⁽²⁾, ed alla Nota di G. Ferrari inserita in questi « Rendiconti »⁽³⁾.

Ritengo perciò opportuno di chiarire ulteriormente la necessità formale di detta ipotesi, nonché di giustificarla fisicamente sulla base di ovvie circostanze meccaniche che l'agitazione turbolenta richiama alle pareti (quando ve ne siano) che delimitano il campo del moto. In particolare resterà giustificata la necessità di distinguere due tipi nettamente diversi di moti turbolenti: quelli che avvengono in presenza di pareti rigide — *turbolenza di parete, o vincolata* —, da quegli altri il cui campo del moto non ha limitazioni siffatte — *turbolenza libera* —.

1. — L'equazione discussa è quella che esprime la costanza del momento baricentrale di quantità di moto di ogni elemento di volume; in quanto è ivi affermato che la variazione di detto momento dovuta al trasporto turbolento di massa è neutralizzata da una conveniente coppia il cui momento è posto proporzionale alla derivata del vortice normalmente alla velocità. (*A titolo di ipotesi di lavoro!* Che, essendo poi in accordo con i fatti sperimentali, cessa di rivestire ogni carattere di arbitrarietà per acquistare quello di legge fondamentale della fenomenologia turbolenta).

È appunto questa l'ipotesi di cui voglio qui affermare ulteriormente la necessità.

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) « Aerotecnica », vol. XII, 1933, p. 1502.

(3) Sulla teoria della turbolenza. Questi « Rendiconti », vol. XX, 1934, p. 100.

Il punto considerato oscuro di questa equazione è la non immediata percezione fisica della coppia anzidetta; tanto che il Ferrari, ad es., afferma che essa non può essere che nulla. Senonchè in tal modo le equazioni non si accorderebbero più con la realtà: quella coppia dunque *deve* esistere; la questione, se mai, è di cercare di identificarla fisicamente con un'analisi più dettagliata del processo tipico della turbolenza: il mescolamento caotico di masse.

2. - *La specie del contorno del campo del moto influenza le equazioni indefinite.* — È questa una circostanza che, credo, si presenta la prima volta in problemi di Fisica-Matematica. Vediamo di riconoscerla esaminando i due casi tipici di moti turbolenti: il fluido è limitato, anche solo unilateralmente, da pareti rigide (caso dei tubi, canali, deflusso su una superficie fissa ecc.); oppure tali pareti non esistono, o se talvolta è opportuno considerarle a titolo di schematizzazione del problema, si considerano lisce nei riguardi viscoso-turbolenti e perciò prive di ogni effetto dinamico (scia turbolenta, espansione di un getto entro una massa indefinita, trascinamento turbolento di una corrente indefinita esercitato su una massa fluida pure indefinita ecc.).

Come esempio del primo tipo - *turbolenza di parete o vincolata* - consideriamo il caso dell'efflusso turbolento nei tubi cilindrici a sezione circolare. Le equazioni indefinite del problema si compendiano nelle due seguenti

$$(1) \quad (\epsilon r v')' = -\sigma r,$$

$$(2) \quad (\epsilon r v'')' = a r v'';$$

dove: $-\rho\sigma = \frac{dp}{dx}$ è il gradiente di pressione secondo l'asse x del tubo; ϵ è il *coefficiente di trasporto turbolento*; a è una costante; e gli apici denotano derivazione, rapporto al raggio r .

I primi membri delle due equazioni, moltiplicati per $2\pi dr$ rappresentano l'eccesso delle quantità v (velocità media locale) e rispettivamente v' (vortice medio) *entrate*, nell'intervallo di tempo unitario, nel volume elementare avente per base la corona di raggi r e $r + dr$ ed altezza uno, rispetto alle quantità *uscite* in seguito all'agitazione turbolenta. Moltiplicando inoltre la (1) per ρ (densità), e la (2) per $\rho\lambda^2$ (λ una lunghezza introdotta per ragioni dimensionali), gli stessi due primi membri rappresentano l'eccesso di quantità di moto e di momento di quantità di moto delle masse entrate rispetto a quelle uscite nello stesso volume elementare.

Siccome l'efflusso è supposto stazionario, queste due eccedenze dovranno essere neutralizzate: la prima da una forza, che è ovviamente quella prodotta dal gradiente di pressione ⁽¹⁾; la seconda da una coppia il cui momento è stato da me *posto* proporzionale a rv'' .

(1) È a mio parere, fuor di luogo, sia pur a titolo ipotetico, di costruire il secondo

Farò ora vedere come questa coppia, per un doppio ordine di ragioni, debba nei problemi di turbolenza vincolata essere diversa da zero, mentre invece necessariamente nulla in quelli di turbolenza libera. Che poi essa, nell'attuale problema, sia effettivamente proporzionale a rv'' , è un'altra questione, che non può essere risolta se non dal constatato accordo delle conseguenze dedotte dal sistema (1), (2) con le determinazioni sperimentali.

Dalla (1) deduciamo per integrazione

$$\epsilon rv' = -\frac{\sigma r^2}{2};$$

la costante additiva dovendo essere posta uguale a zero. Infatti il secondo membro, moltiplicato per $2\pi\rho$, rappresenta la forza esercitata dalla pressione sul cerchio di raggio r ; che deve essere equilibrata dalla tensione tangenziale - equivalente alla differenza di trasporto nei due sensi, attraverso alla circonferenza r , di quantità di moto - la quale, come risulta dal calcolo diretto⁽¹⁾, è precisamente uguale a $2\pi\rho r\epsilon v'$.

Segue che

$$(3) \quad \epsilon v' = -\frac{\sigma r}{2}$$

cresce, in modulo, continuamente avvicinandosi alla parete.

Riconosciamo che anche v' si comporta analogamente. Perciò richiamiamo (Nota citata) che ϵ espresso per le grandezze cinematiche che definiscono l'agitazione turbolenta è $= l^2 k$; dove l è il « percorso di mescolamento », necessariamente nullo alla parete $r = R$, e k è la « frequenza di mescolamento » che è ovvio supporre finita entro tutto il campo del moto, contorno compreso. Ne segue che si deve esigere $\lim_{r \rightarrow R} \epsilon = 0$; per cui rap-

presentando ϵ una grandezza fisica di cui è ovvio presumere un comportamento analitico semplice, è plausibile ammettere che almeno in un certo intorno a sinistra di $r = R$, sia $\epsilon' \leq 0$, cioè ϵ sempre decrescente all'intorno stesso.

Allora

$$|v'| = \frac{\sigma r}{2\epsilon}$$

quale rapporto di una quantità positiva crescente per una pure positiva decrescente per $r \rightarrow R$, varia sempre crescendo con $r \rightarrow R$, cioè verso la parete, almeno da un certo r_0 in poi.

membro della (1) mediante il ragionamento formale che serve per la (2), come fa il Ferrari alla fine di p. 101 della sua Nota. Il secondo membro della (1) è imposto dalle circostanze dinamiche presenti nel problema: la pressione

(1) Teoria della turbolenza. Questi « Rendiconti », vol. XVII, 1933, p. 217.

Appare quindi che il vortice v' si esalta, in modulo, continuamente nei punti sempre più prossimi alla parete.

Se queste considerazioni valessero fino ad $r = R$, v' diverrebbe ivi infinito. In realtà, tra la massa in moto nettamente turbolento e la parete occorre interporre uno strato di minimo spessore dove la viscosità del fluido interviene; in particolare nel senso di ridurre ad una quantità finita il limite di $|v'|$. Ma la circostanza qualitativa della continua crescita di $|v'|$ non è modificata ⁽¹⁾.

Sia ora δ lo spessore (convenzionale) dello strato limite laminare. Attraverso la superficie cilindrica di raggio $R - \delta$ passa nei due sensi una massa eguale; cosicchè, per quanto precede, la vorticità (prodotto del vortice v' per la massa, cioè in sostanza il momento baricentrale di quantità di moto) che entra nella massa turbolenta supera, in modulo, l'analoga quantità che esce.

In conclusione, la presenza della parete determina una continua immissione di vorticità nella massa fluida turbolenta, che, per la supposta condizione di stazionarietà, occorre che sia ivi dissipata. Su ogni elemento fluido deve pertanto agire una coppia, avente inoltre ovunque un verso opposto alla rotazione v' prodotta alla parete. Pone il momento proporzionale al secondo membro della (2) è, a priori, assai plausibile in virtù di considerazioni già indicate ⁽²⁾. Questa presunzione è del resto nettamente verificata dalle misure sperimentali ⁽³⁾.

Vedremo poi la probabile natura fisica di tale coppia; passiamo ora a considerare il caso di *turbolenza libera*.

Alle conclusioni formali si arriva rapidamente. Nei problemi di questo tipo, a causa dell'assenza di pareti, il campo del moto si estende indefinitamente: un esempio tipico (duedimensionale) può essere fornito dalla scia turbolenta di un ostacolo schematizzato da una retta e immerso in una corrente uniforme ortogonale all'ostacolo ⁽⁴⁾.

Indichiamo con x l'asse della scia (parallelo alla corrente) e con y la coordinata trasversale sul piano del moto. La perturbazione provocata nella corrente dall'ostacolo (altrimenti uniforme con velocità U) è chiaramente nulla all'infinito: cosicchè sono ovvie le condizioni da imporre ivi alle componenti della velocità: deve essere $\lim u = U$, $\lim v = 0$, nonchè devono essere nulle tutte le derivate di u e v per $y \rightarrow \infty$, qualunque sia x .

(1) Ciò apparirà con maggiore evidenza in un altro lavoro che sarà pubblicato altrove, dove esporrò in una forma assai comprensiva, e con un minimo di indeterminatezza, le condizioni di parete.

(2) G. D. MATTIOLI (loc. cit.).

(3) F. LICENI, *Sul fenomeno della turbolenza*. « L'Energia Elettrica », vol. XI, fasc. VII, 1934.

(4) Caso già da me considerato: *Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti*. « Rend. Seminario Mat. Padova », vol. IV, 1933, fasc. 1-2.

Ma allora, essendo pure nullo all'infinito il vortice $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$, l'immissione di vorticità nella massa fluida è in questo caso nulla, non potendo essa avvenire che attraverso il contorno, attualmente a distanza infinita. Conseguo che non vi è luogo a dissipazione vorticoso; e siccome d'altra parte non è plausibile che vorticità venga prodotta entro il fluido, la coppia di cui dianzi nei problemi di turbolenza libera deve essere nulla.

Le equazioni indefinite del moto turbolento sono quindi diverse secondoche vi sono o no pareti a distanza finita ⁽¹⁾: nel primo caso l'equazione analoga alla (2) ha un secondo membro diverso da zero, che è invece nullo nel secondo caso. Si può anche dire che la costante a è atta ad assumere due valori: χv^* (χ costante di Kármán, universale di turbolenza, uguale a circa 0.406;

$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, velocità di attrito, essendo τ_0 lo sforzo tangenziale esercitato sulla parete) nella turbolenza vincolata; il valore zero, nella turbolenza libera.

3. — *Schematizzazione fisica del processo turbolento alla parete.* — Una circostanza che non si deve perdere di vista nei moti turbolenti è questa: gli elementi fluidi che intervengono nel mescolamento turbolento sono, certo piccoli, ma di dimensioni finite non trascurabili.

Poniamo allora attenzione su quelle particelle che, partendo dal limite esterno della massa turbolenta, sbattono contro la parete; cioè che si immettono nello strato limite laminare aderente a questa ⁽²⁾. Esse posseggono una quantità di moto superiore a quella media di detto strato. Siccome d'altronde, sia pure durante un intervallo di tempo infimo, ogni particella siffatta è disgregata dalla massa, le molecole che la compongono sono tanto più ritardate quanto più sono vicine alla parete. Ne viene che all'urto contro la parete (qualunque ne siano i dettagli, che non occorre conoscere) consegue un brusco scorrimento nel senso di un notevole incremento della rotazione (cioè del vortice) propria ad ogni particella.

Vi è dunque effettiva produzione di vorticità alla parete, la quale, come è stato detto dianzi, dovrà essere dissipata entro la massa turbolenta.

La natura fisica della coppia dissipativa è ora ovvia. A causa del continuo flusso di vorticità verso l'interno della massa turbolenta, in ogni elemento di volume penetra una vorticità in eccesso su quella media locale corrispondente al regime stazionario; cioè vi penetrano degli elementi disgregati, che hanno una rotazione superiore a quella media locale. Nell'atto in

(1) Questa circostanza era già stata da me indicata nella Memoria citata del « Seminario Matem. di Padova ».

(2) Ci sono delle circostanze, che esporrò nella Nota annunciata dianzi, per le quali si è portati ad ammettere che in questo stato il coefficiente di viscosità perda la qualità di essere una costante tipica nel fluido; e ciò, forse, a causa degli enormi scorrimenti, che si presentano presso alla parete, ignoti nei moti lenti, viscosi in senso proprio.

cui sono assorbiti dall'ambiente, essi subiscono quindi da parte di questo una reazione ritardatrice che ne riduce la rotazione al valore locale. *Questa reazione è precisamente la coppia dissipativa, la cui natura è senza dubbio viscosa*, in quanto interviene nel momento in cui la particella è assorbita dall'ambiente.

Si è, in conseguenza, portati a trattare il fluido turbolento quale *generalmente coerente*; la disgregazione in elementi essendo un accidente che sorge, caoticamente nella massa, nell'istante stesso dell'assorbimento. In altre parole, il trasporto turbolento potrebbe essere una interpretazione convenzionale di quest'altro quadro cinematico: nell'intorno di ogni punto s'inizia continuamente, nel tempo, un moto regolare nel senso della cinematica del continuo; senonchè, pure continuamente, sorgono incompatibilità cinematiche e dinamiche (comportamento della pressione!) che si oppongono alla persistenza di un tale movimento. Una situazione iniziale si ristabilisce allora attraverso una disgregazione immediatamente seguita dal ripristinarsi della coerenza. In tal modo certi elementi materiali vengono a trovarsi spostati - *a priori* comunque - rispetto alla posizione che avevano in un istante precedente. Questa interpretazione potrà forse essere utile per indagare il sorgere del regime turbolento.

Astronomia. — *Ascensioni rette di Saturno nel 1934.* Nota di L. GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. Inizio con questa Nota ⁽²⁾ una serie di osservazioni sistematiche di precisione sui Pianeti grandi e medi, lavoro affidatomi dal direttore del R. Osservatorio Astronomico di Roma, prof. G. Armellini; presento qui i risultati delle osservazioni meridiane di ascensione retta di *Saturno* eseguite nel settembre-ottobre 1934.

Lo strumento adoperato è l'invertibile meridiano « Bamberg » già altre volte descritto ⁽³⁾ e munito di micrometro impersonale Bamberg, collegato ad un cronografo Cavignato in sincronizzazione con un eccellente pendolo Kobell ad asta invar e a regolatore di pressione.

I dettagli dell'installazione dello strumento e i particolari d'osservazione saranno descritti più ampiamente nella Memoria, di prossima pubblicazione, nella quale darò conto dell'operazione di longitudine eseguita - con il medesimo strumento e pendolo e con metodi analoghi - qualche mese prima.

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (sul Campidoglio).

(3) L. GIALANELLA, *Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio e determinazione delle costanti strumentali del " Bamberg " meridiano.* Questi « Rendiconti », 1934, 1° sem.

Mi limito adesso a dire che ho scelto le stelle di riferimento tra le fondamentali del « Nautical Almanac » (meno che per la prima serata, in cui mi son servito del « Berliner Jahrbuch »), avendo cura che avessero ascensione e declinazione prossime a quelle di *Saturno*, e precisamente in modo che il Pianeta riuscisse all'incirca simmetricamente disposto in mezzo alle quattro stelle orarie, generalmente adoperate. Oltre queste ho osservato sempre una o due circumpolari per la determinazione dell'azimut strumentale.

Ogni stella è stata osservata nelle due posizioni del cannocchiale, accompagnandola generalmente per tre rivoluzioni del tamburo del micrometro, in maniera da poter basare ogni passaggio su trenta contatti doppi corrispondenti. La lettura della livella è stata fatta per ogni stella, avanti l'inizio della osservazione nella prima posizione del cannocchiale e dopo la fine della osservazione nella seconda posizione, a rovesciamento eseguito. Ho adoperato sempre l'oculare di ingrandimento 90 (il massimo) illuminando fortemente il campo di osservazione.

2. Nella seguente tabella I riporto l'elenco delle stelle di confronto adoperate, dandone le posizioni medie, tolte dal « Nautical Almanac » 1934 (meno che quelle dal n. 1 al n. 5 tolte dal « Berliner Jahr. » 1934), e per ognuna anche la correzione C_A per l'aberrazione diurna meridiana calcolata con la formula:

$$C_A = - 0^{\circ}.0213 \cos \varphi \sec \delta$$

avendo preso il segno *meno* poichè le osservazioni sono state fatte tutte in culminazione superiore. Questa correzione è stata applicata non alle ascensioni rette delle stelle osservate, ma ai tempi dei passaggi riunendola con la correzione per la larghezza dei contatti e passo morto del micrometro impersonale. Per determinare quest'ultima ho dovuto calcolare il passo della vite micrometrica, per cui mi son servito delle medesime stelle di *Saturno*. Una prima determinazione era già stata fatta durante la predetta operazione di longitudine; le due determinazioni hanno fornito, per il passo del micrometro impersonale Bamberg, il valore:

$$P = 7^{\text{s}}.573$$

per cui ogni divisione del tamburo risulta:

$$D = 0^{\circ}.07573.$$

Ne ho dedotto per il *semicontatto e passo morto* il valore⁽¹⁾:

$$s = 0^{\circ}.0310.$$

La correzione per la larghezza dei contatti e passo morto è quindi:

$$c_s = + 0^{\circ}.310 \sec \delta.$$

(1) I particolari di questa determinazione saranno dati nella Memoria annunciata.

Questa correzione, riunita a quella per l'aberrazione diurna meridiana, dà per ogni stella la correzione complessiva:

$$C_{\text{sec } \delta} = + 0^{\circ}.0151 \text{ sec } \delta$$

da aggiungere ai tempi dei passaggi osservati. Essa si trova nell'ultima colonna della tabella seguente:

TABELLA I.

N.	Nome	Mg.	$\alpha_{1934.0}$	$\delta_{1934.0}$	C_A	$C_{\text{sec } \delta}$
1	ν Aquarii . .	4.5	21 ^h 06 ^m 00 ^s .069	— 11° 38' 23".87	— 0.016	+ 0 ^s .015
2	α Cephei . .	2.6	21 17 00.328	+ 62 18 19.63	— 0.034	+ 0.032
3	ζ Capricorni . .	3.9	21 22 54.150	— 22 41 53.90	— 0.017	+ 0.016
4	β Aquarii . .	3.1	21 28 05.143	— 5 51 44.86	— 0.016	+ 0.015
5	ι Aquarii . .	4.3	22 02 52.490	— 14 11 26.21	— 0.016	+ 0.016
6	θ Capricorni . .	4.2	21 02 14.364	— 17 29 46.10	— 0.016	+ 0.016
7	ι Capricorni . .	4.3	21 18 34.449	— 17 06 59.84	— 0.016	+ 0.016
8	ζ Capricorni . .	3.9	21 22 54.134	— 22 41 53.26	— 0.017	+ 0.016
9	β Cephei . .	3.3	21 27 48.926	+ 70 16 15.16	— 0.047	+ 0.045
10	ξ Aquarii . .	4.8	21 34 14.365	— 8 09 03.79	— 0.016	+ 0.015
11	δ Capricorni . .	3.0	21 43 24.019	— 16 25 39.14	— 0.016	+ 0.016
12	γ Gruis . .	3.2	21 49 56.324	— 37 40 33.65	— 0.019	+ 0.019
13	α Aquarii . .	3.2	22 02 23.658	— 0 38 28.06	— 0.016	+ 0.015
14	ζ Cephei . .	3.6	22 08 33.638	+ 57 52 32.13	— 0.029	+ 0.028
15	θ Aquarii . .	4.3	22 13 21.116	— 8 06 45.14	— 0.016	+ 0.015
16	σ Aquarii . .	4.9	22 27 09.340	— 11 00 58.52	— 0.016	+ 0.015

3. Per il calcolo della correzione dell'orologio Δt ho impiegato la formula di Mayer:

$$\Delta t = \alpha - t_{\text{oss.}} - i \cos \chi \text{ sec } \delta - a \sin \chi \text{ sec } \delta$$

essendo: α e δ l'ascensione retta e la declinazione (apparenti) della stella; $t_{\text{oss.}}$ il tempo di osservazione (aumentato della correzione in sec δ : $C_{\text{sec } \delta}$); χ la distanza zenitale (apparente); i il coefficiente d'inclinazione; a il coefficiente azimutale.

Il coefficiente d'inclinazione i è stato ottenuto applicando a ciascuna stella la correzione quale è risultata dalla corrispondente lettura della livella (una parte di livella vale 0^s.085), essendo apparse effettivamente reali talune piccole variazioni e dato anche che qualche volta è occorso livellare nuovamente durante l'osservazione.

Nella seguente tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari di tutte le serate e i Δt medi conclusi per ognuna di esse.

TABELLA II.

Data	Stella	α_*	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1934 Settembre 4	1	05 ^m 64 ^s .42	05 ^m 00 ^s .42	- 0 ^s .05	+ 9 ^s .84	+ 54 ^s .21	+ 54 ^s .18
	2	16 63.62	16 18.42	+ 0.02	- 9.00	+ 54.18	
	3	22 58.83	21 52.94	- 0.02	+ 11.76	+ 54.15	
	4	28 09.39	27 06.42	- 0.02	+ 8.88	+ 54.11	
	5	02 56.95	01 52.41	- 0.02	+ 10.32	+ 54.24	
» Settembre 9	7	18 38.95	17 32.96	- 0.06	+ 10.71	+ 55.22	+ 55.16
	9	27 52.19	27 13.96	- 0.08	- 16.78	+ 55.09	
	10	34 18.66	33 14.37	- 0.03	+ 9.16	+ 55.17	
	13	02 27.85	01 24.54	+ 0.03	+ 8.09	+ 55.19	
	15	13 25.46	12 21.17	0.00	+ 9.16	+ 55.13	
» Settembre 10	6	02 18.84	01 13.80	- 0.01	+ 10.23	+ 54.82	+ 54.85*
	7	18 38.94	17 33.87	- 0.04	+ 10.23	+ 54.88	
	9	27 52.16	27 13.54	- 0.18	- 16.03	+ 54.85	
	13	02 27.84	01 25.26	- 0.01	+ 7.73	+ 54.85	
	15	13 25.46	12 21.85	- 0.02	+ 8.75	+ 54.87	
» Settembre 12	6	02 18.83	01 27.69	- 0.04	- 4.23	+ 55.42	+ 55.37
	7	18 38.93	17 47.80	- 0.10	- 4.23	+ 55.47	
	9	27 52.09	26 50.26	- 0.13	+ 6.63	+ 55.36	
	13	02 27.84	01 35.78	- 0.02	- 3.20	+ 55.37	
	15	13 25.46	12 33.82	- 0.05	- 3.62	+ 55.31	
» Settembre 15	6	02 18.81	01 26.43	+ 0.07	- 3.66	+ 55.97	+ 55.89
	7	18 38.92	17 46.55	+ 0.06	- 3.66	+ 55.97	
	9	27 52.00	26 50.31	+ 0.13	+ 5.74	+ 55.82	
	13	02 27.84	01 34.68	+ 0.10	- 2.77	+ 55.83	
	15	13 25.46	12 32.78	- 0.03	- 3.13	+ 55.85	
» Settembre 16	6	02 18.80	01 22.63	+ 0.04	- 0.03	+ 56.16	+ 56.14
	7	18 38.91	17 42.81	+ 0.02	- 0.03	+ 56.11	
	9	27 51.97	26 55.49	+ 0.34	+ 0.04	+ 56.10	
	15	13 25.46	12 29.28	+ 0.06	- 0.02	+ 56.14	
	16	27 13.75	26 17.58	+ 0.02	- 0.02	+ 56.17	

* Irregolarità nel cronografo.

Segue: TABELLA II.

Data	Stella	α_*	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1934 Settemb. 17	6	02 ^m 18 ^s .79	01 ^m 22 ^s .97	+ 0 ^s .03	— 0 ^s .11	+ 55 ^s .90	+ 55 ^s .84
	9	27 51.94	26 55.57	+ 0.36	+ 0.17	+ 55.84	
	13	02 27.84	01 32.06	+ 0.04	— 0.08	+ 55.81	
	15	13 25.46	12 29.72	+ 0.01	— 0.09	+ 55.82	
	16	27 13.75	26 18.03	+ 0.01	— 0.10	+ 55.81	
» Settembre 19	8	22 58.75	22 03.25	+ 0.08	— 0.79	+ 56.21	+ 56.20
	9	27 51.86	26 54.28	+ 0.26	+ 1.14	+ 56.18	
	15	13 25.45	12 29.83	+ 0.04	— 0.62	+ 56.20	
	16	27 13.74	26 18.17	+ 0.01	— 0.66	+ 56.22	
» Settembre 22	7	18 38.86	17 43.07	+ 0.01	— 0.95	+ 56.73	+ 56.74
	8	22 58.72	22 02.93	+ 0.01	— 1.03	+ 56.81	
	13	02 27.81	01 31.80	+ 0.03	— 0.71	+ 56.69	
	14	08 37.21	07 39.96	+ 0.02	+ 0.55	+ 56.68	
	15	13 25.44	12 29.45	+ 0.01	— 0.81	+ 56.79	
» Settembre 24	6	02 18.73	01 22.79	— 0.05	— 1.04	+ 57.02	+ 56.99
	7	18 38.85	17 42.87	— 0.02	— 1.03	+ 57.03	
	9	27 51.66	26 53.02	+ 0.03	+ 1.64	+ 56.97	
	13	02 27.80	01 31.60	+ 0.02	— 0.79	+ 56.97	
	15	13 25.43	12 29.33	+ 0.01	— 0.89	+ 56.98	
» Settembre 26	6	02 18.71	01 22.18	+ 0.06	— 0.93	+ 57.40	+ 57.48
	7	18 38.83	17 42.29	— 0.03	— 0.92	+ 57.49	
	9	27 51.60	26 52.81	— 0.08	+ 1.45	+ 57.42	
	13	02 27.79	01 31.02	— 0.01	— 0.70	+ 57.46	
	15	13 25.43	12 28.77	— 0.02	— 0.79	+ 57.47	
» Settembre 30	6	02 18.66	01 21.07	— 0.06	— 0.82	+ 58.47	+ 58.46
	7	18 38.79	17 41.15	— 0.01	— 0.81	+ 58.46	
	9	27 51.40	26 51.31	+ 0.31	+ 1.28	+ 58.50	
	13	02 27.76	01 29.88	+ 0.12	— 0.62	+ 58.38	
	15	13 25.40	12 27.68	— 0.05	— 0.70	+ 58.47	

Segue: TABELLA II.

Data	Stella	α_*	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \chi$ sec δ	$a \sin \chi$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1934 Ottobre 1	7	18 ^m 38 ^s .78	17 ^m 40 ^s .79 ²	+ 0 ^s .06	— 0 ^s .90	+ 58 ^s .83	+ 58 ^s .86
	8	22 58.63	22 00.75	+ 0.03	— 0.99	+ 58.84	
	9	27 51.36	26 50.93	+ 0.16	+ 1.43	+ 58.84	
	13	02 27.75	01 29.48	+ 0.06	— 0.69	+ 58.90	
	15	13 25.39	12 27.30	+ 0.03	— 0.78	+ 58.84	
" Ottobre 9	9	27 50.98	26 46.23	+ 0.31	+ 1.69	+ 62.75	+ 62.82
	11	43 28.33	42 26.51	+ 0.05	— 1.06	+ 62.83	
	12	49 61.34	48 59.97	+ 0.01	— 1.49	+ 62.85	
	13	02 27.69	01 25.64	+ 0.06	— 0.82	+ 62.87	

4. Il pianeta *Saturno* è stato osservato alla stessa maniera delle stelle di confronto; ho avuto però cura di tenere il filo mobile del micrometro impersonale costantemente tangente al *primo lembo* del Pianeta, internamente al sistema degli anelli. Durante l'osservazione ho operato l'inversione dello strumento, ed ho accompagnato l'astro generalmente per quattro rivoluzioni del tamburo da ogni parte del cannocchiale, di guisa che le ascensioni osservate dipendono da circa quaranta passaggi doppi corrispondenti. La livella è stata letta immediatamente prima e dopo l'inversione del cannocchiale. Ho cercato infine di mutare, da sera a sera, la posizione del cerchio.

Nella seguente tabella III riporto i risultati delle osservazioni e gli O — C dedotti.

TABELLA III.

Data	Cerchio	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	$\alpha_{\text{oss.}}$ (1° lembo)	$\alpha_{\text{calc.}}$ (1° lembo)	O — C
1934		21 ^h				21 ^h	21 ^h	
Settem. 4	E	44 ^m 23 ^s .12	— 0 ^s .02	+ 10 ^s .42	+ 54 ^s .18	45 ^m 27 ^s .70	45 ^m 27 ^s .78	— 0 ^s .08
» 9	E	43 03 .04	— 0 .04	+ 10 .34	+ 55 .16	44 08 .50	44 08 .55	— 0 .05
» 10	W	42 48 .37	— 0 .02	+ 9 .88	+ 54 .85	43 53 .08	43 53 .26	— 0 .16*
» 12	E	42 32 .01	— 0 .05	— 4 .09	+ 55 .37	43 23 .24	43 23 .30	— 0 .06
» 15	E	41 47 .63	— 0 .01	— 3 .54	+ 55 .89	43 39 .97	43 39 .97	0 .00
» 16	E	41 29 .79	+ 0 .05	— 0 .03	+ 56 .14	42 25 .95	42 26 .00	— 0 .05
» 17	E	41 16 .34	+ 0 .01	— 0 .10	+ 55 .84	42 12 .09	42 12 .16	— 0 .07
» 19	W	40 49 .93	+ 0 .07	— 0 .70	+ 56 .20	41 45 .50	41 45 .54	— 0 .04
» 22	W	40 11 .65	+ 0 .01	— 0 .91	+ 56 .74	41 07 .49	41 07 .48	+ 0 .01
» 24	E	39 47 .37	+ 0 .03	— 1 .01	+ 56 .99	40 43 .38	40 43 .50	— 0 .12
» 26	E	39 24 .01	0 .00	— 0 .89	+ 57 .48	40 20 .60	40 20 .68	— 0 .08
» 30	W	38 41 .05	0 .00	— 0 .79	+ 58 .46	39 38 .72	39 38 .76	— 0 .04
Ottobre 1	W	38 31 .02	+ 0 .03	— 0 .88	+ 58 .86	39 29 .03	39 29 .10	— 0 .07
» 9	W	37 22 .17	+ 0 .02	— 1 .05	+ 62 .82	38 23 .96	38 24 .08	— 0 .12

* Irregolarità nel cronografo.

Botanica. — *Nuovo studio dell'apparato cribro-legnoso in plantule di «Raphanus sativus»*. Nota di FL. G. ELISEI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. NEGRI.

Dopo le mie ricerche sull'apparato cribro-legnoso in plantule di alcuni *Mesembrianthemum* e di *Veronica longifolia* ⁽²⁾, mi sono proposto di studiare dettagliatamente, sotto lo stesso punto di vista, le plantule di *Raphanus sativus*, e quantunque mi trovi ancora all'inizio del mio lavoro, desidero di esporne fin da ora un primo risultato, colla speranza di provocare qualche osservazione critica, che potrebbe molto giovarmi nella continuazione di questa nuova ricerca.

Ho scelto il *Rafano*, e non un'altra qualsiasi pianta di cotiledone diarca, perchè questa specie ha un interesse tutto particolare, avendo su di essa iniziato (1891) le sue celebri ricerche sull'apparato conduttore delle piante il noto botanico francese Gustavo Chauveaud; il quale, se ha cominciato questo tipo di studi nel 1891, ne ha esposto i risultati solo a partire dal 1901, anno nel quale ha pubblicato la prima Nota in proposito, che riguarda appunto l'apparato conduttore delle plantule di detta specie ⁽³⁾.

I risultati che l'Autore in parola ha ottenuto con questo suo primo studio, e che sono gli stessi di quelli ottenuti in sue numerose posteriori ricerche, sono i seguenti:

la base cotiledonare e l'ipocotile presentano, all'inizio della ontogenesi vascolare, come la radice, la struttura alterna; i fasci legnosi, all'inizio del loro sviluppo, nel passare dalla struttura alterna alla struttura sovrapposta, non presentano rotazione neppure apparente; ad uno stesso livello (della radice, o dell'ipocotile, o della base cotiledonare), nel quale si riscontra in un primo tempo la struttura alterna, si riscontra in un secondo tempo la struttura intermediaria, e in un terzo tempo la struttura sovrapposta, non perchè i vasi alterni preesistenti si siano spostati gli uni rispetto

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

(2) FL. G. ELISEI, *Comportamento del cribro in plantule di «Mesembrianthemum»*. «Nuovo Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 38, p. 553, 1931; *Osservazioni sull'ontogenesi dell'apparato cribro-legnoso in «Mesembrianthemum»*. «Rendic. R. Accad. Lincei», vol. XVII, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 7, pp. 569-573, 1933; *Un caso d'identità tra fasci conduttori alterni radicali e fasci conduttori sovrapposti cotiledonari*. «Nuovo Giorn. Bot. It.», n. s., vol. XLI, n. 3, pp. 674-692, 1934.

(3) G. CHAUVEAUD, *Sur la structure des plantes vasculaires*, «C. R. Acc. Sc.». Paris, 14 janvier 1901; *L'appareil conducteur des plantes vasculaires et les phases principales de son évolution*. «Ann. Sc. Nat. Bot.», ser. 9^a, vol. 13, pp. 113-436, 1911.

agli altri, ma perchè si sono differenziati nuovi vasi, intermediari e sovrapposti.

Ma tutto questo non credo che sia sufficiente a dimostrare come avvenga il passaggio, col variare del livello, dalla disposizione alterna alla disposizione sovrapposta, e quindi neppure sufficiente a dimostrare, come vorrebbe l'Autore, l'infondatezza della teoria della torsione e tanto meno della teoria del raccordo.

Le plantule di *Raphanus sativus* da me studiate sono state fissate col Liquido di Juel (100 cc. di alcool a 50°, 2 cc. di acido acetico glaciale, 2 gr. di cloruro di zinco), incluse in paraffina e sezionate col microtomo, in modo che dall'intera plantula o da una parte di plantula ho potuto ottenere una serie completa di sezioni trasverse, spesse ciascuna 10 micron; le sezioni sono state colorite con ematossilina Delafield e con safranina sciolta in acqua distillata.

Le giovani plantule del *Raphanus sativus* sono diarche nella radice e nell'ipocotile, con due fasci legnosi che giacciono nel piano di simmetria dei due cotiledoni (piano cotiledonare), e con due fasci cribrosi che giacciono nel piano di separazione o di contatto dei due cotiledoni (piano intercotiledonare). Questi due fasci cribrosi radicali-ipocotilari sono in un primo tempo semplicissimi, perchè ciascuno di essi è costituito da un sol tubo cribroso molto evidente, e soltanto nella parte alta dell'ipocotile a questo unico tubo cribroso si accompagnano altri vasi cribrosi alterni. Anche i due fasci legnosi radicali-ipocotilari sono, all'inizio del loro sviluppo, molto semplici, ma un poco più complessi dei fasci cribrosi, essendo ciascuno di essi costituito da 3-6 vasi circa.

I due picciuoli cotiledonari, piuttosto grossi e lunghi, presentano, in plantule così giovani, nella loro nervatura mediana, una struttura alterna, o alterna e intermediaria insieme, ed è solo a partire dalla base del lembo cotiledonare che si riscontra una completa struttura sovrapposta (collaterale). A questo livello, base del lembo cotiledonare, la nervatura mediana del picciuolo cotiledonare si divide in tre fasci cribro-legnosi, dei quali il mediano costituisce la nervatura mediana del lembo cotiledonare, mentre gli altri ne costituiscono due nervature laterali.

In plantule così giovani del *Raphanus sativus* ed anche in plantule meno giovani, esistono vasi legnosi che, perfettamente alterni nella parte alta dell'ipocotile o nel picciuolo cotiledonare, diventano perfettamente sovrapposti ad un livello superiore. Questo primo risultato delle mie ricerche è di notevole importanza, perchè costituisce un fatto indiscutibilmente sfavorevole alla moderna teoria ontogenetica vascolare o teoria di G. Chauveaud.

Secondo questa teoria infatti non esistono, almeno nelle *Fanerogame*, elementi conduttori, vasi legnosi e vasi cribrosi, di questo tipo, riferibili cioè, col variare del livello, a disposizioni vascolari diverse, perchè questo sarebbe in contraddizione con i fatti dell'ontogenesi vascolare. Come ad uno

stesso livello, col passare del tempo, un elemento conduttore non cambia la sua posizione rispetto agli altri elementi conduttori ad esso vicini, ma rimane, sino alla sua scomparsa, quello che era al momento della sua differenziazione (vaso alterno, o vaso intermediario, o vaso sovrapposto); così, secondo G. Chauveaud, un elemento conduttore, col variare del livello, non cambia la sua posizione rispetto agli altri elementi conduttori che gli sono vicini, ma rimane, sino alla sua terminazione, quello che era al livello dove da prima era stato osservato (vaso alterno, o vaso intermediario, o vaso sovrapposto).

Come si vede, questa ipotesi, che rappresenta la base di detta teoria, non è confermata dai fatti.

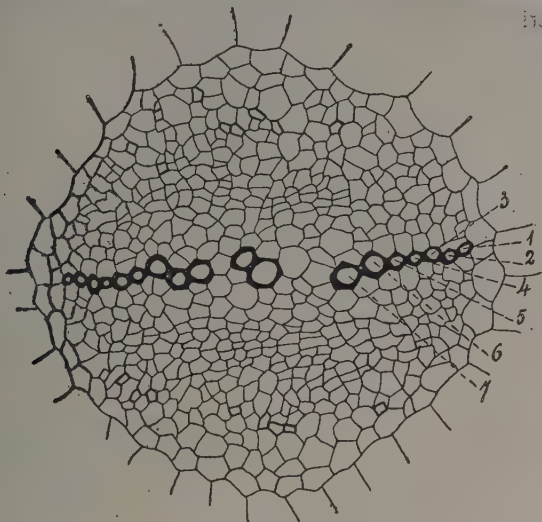


Fig. 1.

Per esporre questo primo risultato del mio studio, ho scelto una plantula il cui apparato conduttore, quantunque sempre giovanissimo, ha tuttavia sorpassato almeno un suo primo stadio ontogenetico, e presenta quindi una certa complessità; volendo con questo mostrare che anche in tal caso è possibile seguire nella loro lunghezza i vasi legnosi, anche se questi sono una diecina o una ventina per fascio xilematico.

Le figg. 1 e 2 rappresentano in sezione trasversa il cilindro centrale di questa plantula, a due livelli, l'uno più basso (fig. 1), l'altro più alto (fig. 2) del terzo superiore dell'ipocotile; le figg. 3 e 4 corrispondono invece rispettivamente alla parte bassa e alla parte alta del picciuolo del cotiledone destro, e ne rappresentano in sezione trasversa la nervatura mediana; la fig. 5 rappresenta infine la sezione trasversa della nervatura mediana del lembo cotiledonare, al mezzo di questo organo.

In tutte le figure le cellule a parete più spessa sono vasi legnosi, e quelle a parete di medio spessore sono vasi cribrati. Questi disegni, più di qualsiasi descrizione, mostrano chiaramente come numerosi vasi legnosi

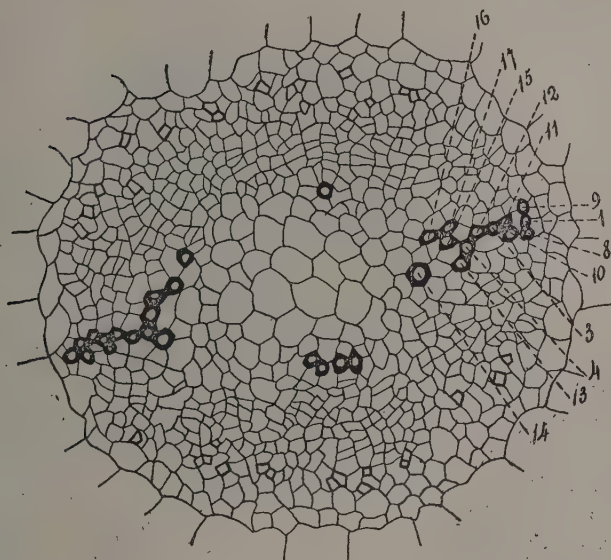


Fig. 2.

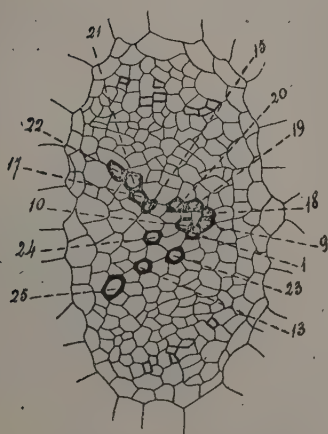


Fig. 3.

siano riferibili, a seconda del livello in cui vengano considerati, a disposizioni vascolari differenti. Così i vasi legnosi 1, 18, 15, 23, 24 sono alterni ad un livello inferiore, mentre sono sovrapposti ad un livello superiore;

e così il vaso 13, che, se non è alterno, è intermediario nella sua parte inferiore (fig. 2), diventa più in alto perfettamente sovrapposto, tanto che

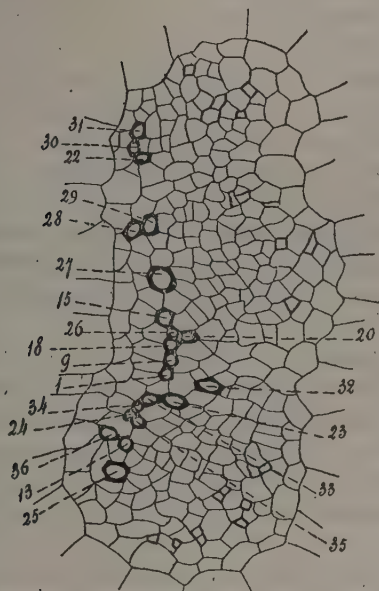


Fig. 4.

con i vasi 25 e 36 costituisce una delle due nervature laterali del lembo cotiledonare, alle quali ho prima accennato, mentre l'altra nervatura laterale è data dai vasi 28, 29, 22, 30, 31 (fig. 4).

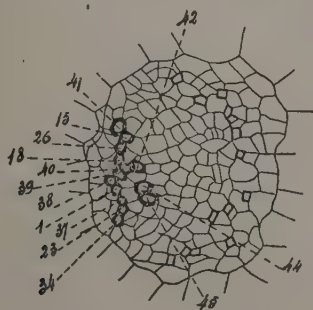


Fig. 5.

Esaminando le figure è poi facile rilevare un altro fatto, assai contrario alle idee chauveaudiane, che è stato del resto riscontrato anche da altri Autori in plantule di altra specie, e ripetutamente da me nelle plantule di

Mesembrianthemum e di *Veronica*. Il fascio xilematico alterno radicale-ipocotilare, considerato nella sua lunghezza dal basso verso l'alto, perde, nella parte alta dell'ipocotile, per cessata loro differenziazione, i suoi vasi alterni più interni, mentre conserva, o anche aumenta in numero, i suoi vasi alterni più esterni, più o meno prossimi cioè al periciclo. In favore della teoria di G. Chauveaud dovrebbe, invece, avvenire esattamente il contrario, e cioè i vasi legnosi alterni più esterni dovrebbero essere i primi a terminare, quando si consideri il fascio xilematico alterno dal basso verso l'alto, così come sono i primi a distruggersi, ad uno stesso livello, col passare del tempo. È noto infatti che la teoria di Chauveaud, giustamente per questo chiamata teoria vascolare ontogenetica, consiste fondamentalmente in questo: l'apparato cribro-legnoso di una *Fanerogama* si modifica col mutare del livello nello stesso modo con cui si modifica col mutare dell'età ad uno stesso livello.

Il comportamento dell'apparato conduttore del *Raphanus sativus* non sembra quindi riferibile alla teoria ontogenetica vascolare o teoria di G. Chauveaud, e certamente conferma più la teoria del raccordo che la teoria della torsione, almeno per ciò che concerne lo xilema; perchè soltanto nel caso che il vaso legnoso 1 fosse un vaso radicale, provenisse cioè dalla radice, resterebbe alquanto confermata anche la teoria di Van Tieghem, in quanto che si potrebbe dire che una identità, quantunque molto ridotta, può tuttavia esistere tra fasci radicali alterni e fasci cotiledonari sovrapposti. Ma su questo, che del resto non costituirebbe un fatto nuovo, perchè dal Lenoir⁽¹⁾ e da me già riscontrato in plantule di *Veronica*, non desidero ancora pronunciarmi.

(1) M. LENOIR, *Début de la différenciation vasculaires dans le plantule des "Veroni"* « C. R. Acc. Sc. ». Paris, 7 avril 1913; *Évolution du tissu vasculaire chez quelques plantules de "Dicotylédones"*. « Ann. Sc. Nat. Bot. », ser. 10^e, to. XI, pp. 1-123, 1920.

Biologia. — *Azione di alcuni alcaloidi sul « Bac. Radicicola » in cultura pura.* Nota di G. MEZZADROLI e L. SGARZI, presentata⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

Vari Autori hanno studiato l'azione che gli alcaloidi possono avere sulle diverse funzioni degli animali, delle piante, dei microorganismi.

Nelle presenti ricerche è stata studiata l'azione che alcuni alcaloidi esercitano sullo sviluppo dei batteri azotofissatori ed in particolare sul *Bac. Radicicola*, mentre quella relativa all'azione sul meccanismo della fissazione dell'azoto elementare sarà oggetto di altra Nota.

Da quando nel 1858 Lachmann riconobbe che i tubercoli radicali delle leguminose si formano in seguito alla penetrazione di batteri mobili, ai quali servono poi di dimora, lo studio di questi microorganismi ha attratto e continua ad attrarre l'attenzione degli studiosi.

Tuttavia, se le numerose ricerche finora compiute hanno contribuito ad aumentare le conoscenze su questi batteri, rimane ancora completamente oscuro il meccanismo, attraverso il quale si compie la fissazione dell'azoto atmosferico nella simbiosi: leguminose-*Bac. Radicicola*.

MODO OPERATORIO.

Per quanto anche recentemente alcuni Autori abbiano sostenuto la capacità delle culture pure di *Bac. Radicicola* ad assimilare azoto atmosferico, è da osservarsi che già nel 1909 il De Rossi e successivamente altri ricercatori hanno trovato che con tali culture non possono constatarsi aumenti di azoto superiori ai limiti dei normali errori sperimentali. Pertanto nelle presenti ricerche si è solo studiata l'azione degli alcaloidi sullo sviluppo delle culture del *Bac. Radicicola*, servendosi come indicatore di un substrato nutritivo colorato con bromotimolbleu. Con questo procedimento, basato sulla proprietà che hanno i germi tubercoligeni di produrre acidi in substrati contenenti idrati di carbonio, si poté non solo seguire lo sviluppo dei batteri, ma trarre dal cambiamento di colore del substrato deduzioni sul diverso sviluppo microbico.

La composizione da noi usata era la seguente: Acqua comune di fonte 1000 cc., K_2HPO_4 gr. 0.5, KNO_3 gr. 0.5, glucosio gr. 10, bromotimolbleu (sol. alcool. al 5 ‰) cc. 0.5. Questo terreno nutritivo, la cui reazione cor-

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1935.

rispondeva a $\text{pH} = 7.2$, fu usato con o senza aggiunta di agar = agar. La sterilizzazione del terreno nutritivo veniva fatta per tinalizzazione di 10 minuti a vapore fluente, per 3 giorni consecutivi.

I terreni nutritivi della composizione suddetta con l'aggiunta degli alcaloidi sperimentati furono suddivisi in tubi da cultura e sterilizzati: in seguito a setticamente fu aggiunto il bromotimobleu, con soda 1/10 N. sterile tutti i tubi furono portati allo stesso tono di colore.

Queste operazioni furono fatte in condizioni di perfetta sterilità, e per maggiore sicurezza i tubi così preparati furono tenuti in osservazione per qualche tempo prima della semina.

Per ogni percentuale di alcaloide furono preparati 5 tubi: Quattro venivano seminati con quantità eguali di una cultura pura e recente di *Bac. Radiicola* ed il quinto rimaneva di confronto.

Dopo la semina i tubi furono conservati in termostato a 28°C . ed ogni giorno venivano osservati i cambiamenti avvenuti.

Nelle tabelle seguenti sono riportati i risultati delle osservazioni fatte. Nelle diverse prove eseguite si osservò che ad un dato sviluppo corrispondeva apparentemente sempre lo stesso cambiamento di colore, e pertanto il cambiamento di reazione osservato nei substrati fu preso come indice del maggiore o minore sviluppo.

Nel caso delle culture in substrato liquido si teneva conto del cambiamento di colore, che veniva segnato rispettivamente nel seguente modo:

o	per nessun cambiamento ($\text{pH } 7.2$)
-	per $\text{pH} = 7$
--	per $\text{pH} = 6.8$
---	per $\text{pH} = 6.4$
----	per $\text{pH} = 6.0$

Nel caso invece delle culture su terreni solidificati con agar si teneva inoltre conto, se il cambiamento di colore avveniva in tutto il substrato, o solo su parte di esso.

Il segno ---- (quattro lineette) fu usato in tutti quei casi, in cui il terreno era completamente e nettamente giallo, $\text{pH} = 6.0$;

il segno --- (tre lineette) quando la reazione corrispondeva a $\text{pH} = 6.4$ su tutta l'estensione del terreno;

il segno -- (due lineette) quando il cambiamento di reazione si limitava solo alla gelificazione;

quello - (una lineetta) quando il cambiamento di reazione avveniva solo lungo la striscia specialmente nella parte superiore, ed infine il segno o quando non si aveva nessun cambiamento e nessuno sviluppo.

ESPERIENZE CON AGGIUNTA DI STRICNINA (SOLFATO)

Comportamento su substrato nutritivo liquido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	14 giorni	17 giorni	21 giorni	23 giorni	26 giorni
1	(prova confr.)	0	0	0	-	-	-	-	-	-
2	0.05	0	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	0	0	0	0	-	-	-	-	-
4	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.75	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Comportamento su substrato nutritivo solido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	3 giorni	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	16 giorni	19 giorni	26 giorni
1	(prova confronto)	0	-	-	-	-	-	-	-
2	0.05	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	0	0	0	-	-	-	-	-
4	0.25	0	0	0	0	-	-	-	-
5	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.75	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0

ESPERIENZE CON AGGIUNTA DI CHININA (SOLFATO)

Comportamento su substrato nutritivo liquido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	14 giorni	17 giorni	21 giorni	23 giorni	26 giorni
1	(prova confr.)	0	0	0	-	-	-	-	-	-
2	0.05	0	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	0	0	-	-	-	-	-	-	-
4	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.75	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Comportamento su substrato nutritivo solido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	3 giorni	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	16 giorni	19 giorni	26 giorni
1	(prova confronto)	0	-	-	-	-	-	-	-
2	0.05	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	0	0	-	-	-	-	-	-
4	0.25	0	0	0	0	-	-	-	-
5	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.75	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0

ESPERIENZE CON AGGIUNTA DI CAFFEINA
Comportamento su substrato nutritivo liquido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	14 giorni	17 giorni	21 giorni	23 giorni	26 giorni
1	(prova confr.)	0	0	0	-	-	-	-	-	-
2	0.05	0	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	0.25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	0.50	0	-	-	-	-	-	-	-	-
6	0.75	0	0	0	-	-	-	-	-	-
7	1.00	0	0	0	-	-	-	-	-	-
8	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Comportamento su substrato nutritivo solido

N. della prova	gr. di alcaloide in 1000 cc.	3 giorni	5 giorni	7 giorni	10 giorni	12 giorni	16 giorni	19 giorni	26 giorni
1	(prova confronto)	0	-	-	-	-	-	-	-
2	0.05	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-
4	0.25	-	-	-	-	-	-	-	-
5	0.50	-	-	-	-	-	-	-	-
6	0.75	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1.00	0	-	-	-	-	-	-	-
8	1.50	0	0	0	0	-	-	-	-

Conclusioni. - Nelle condizioni sperimentali precedentemente esposte e con culture pure di *Bac. Radicicola*, si ebbero i seguenti risultati:

a) Sui terreni di cultura liquidi la caffeina agisce come eccitante nelle dosi di 0.10-0.25 ‰-0.5-0.05 ‰. Comincia ad essere deprimente nella dose 1.1 ‰ e mortale in quella 1.5 ‰.

La chinina e la stricnina sono veleni assai più forti, la chinina agisce come eccitante nelle dosi 0.05 — 0.10 ‰ mentre già in quella del 0.25 ‰ è mortale, la stricnina è eccitante al 0.05 ‰ deprimente al 0.10 ‰ e mortale nelle altre.

b) Su terreni di cultura solidi le osservazioni fatte sono meno evidenti, ma analoghe, inoltre in queste condizioni è stato possibile ottenere uno sviluppo anche in presenza di quantità di alcaloide mortali per le culture in terreno liquido.

Nelle nostre esperienze si è inoltre constatato che il *Bac. Radicicola* contrariamente all'opinione di alcuni Autori può trasformare il glucosio; fatto questo che ha importanza in natura, poichè il glucosio che si trova nei liquidi cellulari, che circolano nelle diverse parti delle piante, potrebbe servire ai batteri quale sorgente di alimento idrocarbonato.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 febbraio 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. O. M. CORBINO.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sopra un'equazione differenziale della Dinamica.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. In alcune mie ricerche di Meccanica Celeste, che spero di pubblicare al più presto, ho avuto occasione di dimostrare un teorema sopra la equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + xm(t) = 0$$

dove $m(t)$ è una funzione del tempo t , positiva, crescente e tendente all'infinito con t . Poichè tale teorema mi sembra di notevole importanza, sia per le ricerche accennate che per altre, e poichè non mi è stato possibile ritrovarlo in nessun trattato di Analisi, credo utile farne oggetto della presente Nota.

A tale scopo, premettiamo per chiarezza alcune

DEFINIZIONI.

2. Imaginiamo un insieme θ , composto d'infiniti segmenti $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$, di lunghezza $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, tutti ben distinti tra loro e situati sopra la parte positiva dell'asse t . Consideriamo, sopra la stessa parte positiva dell'asse t , un punto A_i di ascissa t_i , che per semplicità supporremo

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1935.

non cadere nell'interno di nessuno dei segmenti nominati e siano $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_i$ i segmenti compresi fra l'origine $t=0$ ed il punto A_i . Poniamo:

$$(2) \quad \rho_i = \frac{\sum_{k=1}^i T_k}{OA_i} = \frac{1}{x_i} \sum_{k=1}^i T_k.$$

Chiameremo per brevità, ρ_i col nome di densità media dell'insieme θ nel tratto OA_i . Ciò posto se, facendo tendere x_i all'infinito, ρ_i tende verso zero, diremo che l'insieme θ ha densità media nulla.

Così p. es. supponiamo che il segmento θ_1 si estenda da $t=2$ a $t=3$; il segmento θ_2 da $t=4$ a $t=5$; il segmento θ_n da $t=2^n$ a $t=2^n+1$. Si avrà allora: $T_1=T_2=T_3=\dots T_n=1$ e l'insieme, come è facile vedere, avrà densità media nulla.

3. Consideriamo ora una funzione $F(t)$ la quale, per $t \geq 0$, sia positiva, continua e crescente e supponiamo inoltre che essa tenda all'infinito con t .

Immaginiamo inoltre che, data una quantità ϵ piccola a piacere, possa sempre determinarsi un insieme θ di segmenti di densità media inferiore ad ϵ e tale che $F(t)$ non tenda più all'infinito quando si faccia astrazione dagli incrementi che la stessa $F(t)$ subisce nei segmenti dell'insieme θ . Diremo allora che $F(t)$ tende all'infinito *quasi saltuariamente*; mentre se ciò non avviene, diremo che $F(t)$ tende all'infinito *regolarmente*.

Così p. es. le funzioni $F(t)=t$; $F(t)=\log t$; $F(t)=e^t$ ecc. tendono all'infinito regolarmente. Invece una funzione che s'incrementasse soltanto nell'interno dei segmenti $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n \dots$ compresi tra $t=2^n$ e $t=2^n+1$, restando costante tra un segmento e l'altro, potrebbe bensì tendere all'infinito con t , ma vi tenderebbe in modo «quasi saltuario».

Premesse queste nozioni, dimostriamo il seguente

TEOREMA.

4. Sia data l'equazione differenziale

$$(3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x m(t) = 0$$

dove $m(t)$ si suppone per $t \geq 0$ funzione regolare, positiva e sempre crescente del tempo t . Sia

$$(4) \quad x = x(t)$$

un'integrale della (3) definito dalle condizioni iniziali

$$(5) \quad x_{t=0} = a \quad ; \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = b$$

dove, ovviamente, i due valori si suppongono reali. Dico:

I. Che x oscillerà perpetuamente intorno all'origine e cioè al valore $x = 0$; dentro limiti sempre più ristretti;

II. Che, se la funzione $\mu(t) = \log m(t)$ tende regolarmente all'infinito con t , l'integrale $x(t)$ tenderà a zero quando t tende all'infinito ⁽¹⁾.

DIMOSTRAZIONE.

Come è noto, la (3) rappresenta l'equazione del moto di un punto, mobile sull'asse x ed attratto con forza proporzionale alla distanza da una massa m , posta nell'origine. Le costanti a e b indicano l'ascissa e la velocità iniziale di P , mentre il coefficiente attrattivo f si suppone eguale all'unità.

Supponiamo ora, per un momento, che la massa m si conservi costante. Il moto sarà oscillatorio intorno all'origine e varrà l'integrale dell'energia:

$$(6) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mx^2 = m\lambda^2$$

dove λ indica la *semiampiezza* delle oscillazioni, giacchè $\frac{dx}{dt}$ si annulla per $x = \pm \lambda$.

Ciò posto immaginiamo che, in un istante qualsiasi t , mentre P ha l'ascissa x , la massa attraente m aumenti di dm . Poichè la velocità istantanea di P resta inalterata, la (6) ci dà:

$$(7) \quad 2\lambda d\lambda = -\frac{dm}{m}(\lambda^2 - x^2)$$

e quindi $d\lambda$ risulterà certamente *negativa*; almeno se si eccettua il caso particolare in cui P si suppone trovarsi all'estremo di un'oscillazione ($x = \pm \lambda$), giacchè allora $d\lambda$ risulterebbe nulla.

Per brevità — estendendo la nomenclatura usata nella Meccanica Celeste — chiameremo *semiampiezza osculatrice* dell'oscillazione di P in un istante t , la semiampiezza che avrebbero le oscillazioni se la massa m restasse costante da t in poi. La (7) mostra quindi che, se m è funzione sempre crescente del tempo, la *semiampiezza osculatrice* λ sarà funzione decrescente di t . In conseguenza, poichè λ è una quantità positiva, quando il tempo cresce all'infinito, essa tenderà necessariamente ad un certo limite positivo α .

Ora dico che se $\mu(t) = \log m(t)$ tende regolarmente all'infinito con t , questo limite α dovrà essere eguale a zero.

(1) Naturalmente escludiamo il caso banale in cui si abbia $a = b = 0$, giacchè allora x è identicamente nulla.

Supponiamo infatti che α sia diverso da zero. Intanto, poichè λ è funzione positiva e decrescente del tempo e tende ad α , dato un ε piccolo a piacere potremo sempre trovare un istante t_0 tale che, da t_0 in poi, si abbia sempre $\lambda < \alpha + \varepsilon$. Integrando allora la (7) tra t_0 e τ , avremo:

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda^2(\tau) &= \lambda^2(t_0) - \int_{t_0}^{\tau} \frac{\lambda^2(t) - x^2(t)}{m(t)} \frac{dm}{dt} dt = \\ &= \lambda^2(t_0) - \int_T [\lambda^2(t) - x^2(t)] \frac{d\mu}{dt} dt \end{aligned}$$

dove, per brevità, abbiamo chiamato con T la durata complessiva dell'intervallo di tempo $\tau - t_0$. Ovviamente, poichè λ è funzione decrescente e poichè da t_0 in poi essa si mantiene sempre compresa tra α ed $\alpha + \varepsilon$, la (8) ci dà:

$$(9) \quad 0 < \int_T [\lambda^2(t) - x^2(t)] \frac{d\mu}{dt} dt < (\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2 = 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Ora, indichiamo con k un numero positivo qualsiasi minore dell'unità e dividiamo gl'istanti dell'intervallo T in due classi, ponendo nella prima A tutti gl'istanti per cui si ha $|x| \leq \alpha k$ e nella seconda B quelli per cui si ha $|x| > \alpha k$. Sarà evidentemente

$$(10) \quad T = A + B.$$

È chiaro che in tutti gl'istanti di B , si ha sempre

$$(11) \quad \alpha + \varepsilon > |x| > \alpha k;$$

vale a dire, il punto P si trova nelle parti estreme del suo campo di oscillazione e la (11) mostra che, se α è diverso da zero, il rapporto tra l'ampiezza di queste parti estreme e l'ampiezza dell'oscillazione totale ($\geq 2\alpha$) dell'oscillazione, tende a zero quando ε tende a zero e k tende ad 1. Si dimostra allora che, dato un numero η piccolo a piacere, potremo sempre scegliere ε tanto piccolo e dare a k un valore tanto prossimo all'unità $k = k_0$, che il rapporto $B:T$ tra la durata complessiva degl'istanti della classe B e l'intervallo totale di tempo T , si conservi sempre minore di η , comunque si faccia crescere τ e quindi T . In altre parole, *potremo sempre supporre che gl'istanti della classe B costituiscono un insieme di densità media minore di η .*

Ora, essendo A compreso in T ed essendo $\frac{d\mu}{dt}$ sempre positiva, si ha:

$$(12) \quad \int_T [\lambda^2(t) - x^2(t)] \frac{d\mu}{dt} dt > \int_A [\lambda^2(t) - x^2(t)] \frac{d\mu}{dt} dt.$$

Ma, poichè in A, si ha sempre $\lambda > \alpha$ ed anche $|x| \leq \alpha k = \alpha k_0$, risulta:

$$(13) \quad \int_A [\lambda^2(t) - x^2(t)] \frac{d\mu}{dt} dt > \alpha^2 (1 - k_0^2) \int_A \frac{d\mu}{dt} dt = \alpha^2 (1 - k_0^2) \Delta_A$$

dove con Δ_A indichiamo l'incremento complessivo che μ subisce in tutti gl'istanti della classe A.

La (9) diviene quindi:

$$(14) \quad \alpha^2 (1 - k_0^2) \Delta_A < 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Ma l'incremento Δ_A è eguale all'incremento che μ subisce nell'intervallo di tempo T, diminuito degl'incrementi che μ subisce negl'istanti appartenenti alla classe B. In conseguenza, poichè μ tende regolarmente all'infinito con t e poichè B ha densità media inferiore ad η , anche Δ_A tenderà all'infinito quando t cresce all'infinito. E quindi, poichè k_0 è un numero fisso minore di 1 e Δ_A certamente positivo, la (14) ci mostra che α deve essere necessariamente eguale a zero. C. d. d.

ESEMPIO.

5. Come esempio, consideriamo l'equazione:

$$(15) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + xt^q = 0$$

dove si ha $q > 0$.

Poniamo:

$$(16) \quad x = \chi \sqrt{t} \quad ; \quad u = \frac{2}{2+q} t^{\frac{2+q}{2}}.$$

La (15) diviene allora, con facili trasformazioni:

$$(17) \quad \frac{d^2 \chi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\chi}{du} + \left(1 - \frac{i^2}{u^2}\right) \chi = 0$$

dove si ha:

$$(18) \quad i = \frac{1}{2+q}.$$

Ora la (17) è la nota equazione di Bessel, la quale ha come integrale generale:

$$(19) \quad \chi = c J_i(u) + c' J_{-i}(u)$$

dove c e c' sono due costanti arbitrarie e dove le $J(u)$ indicano le trascendenti di Bessel.

In conseguenza abbiamo come integrale generale della (15)

$$(20) \quad x = \sqrt{t} \left[c J_i \left(\frac{2}{2+q} t^{\frac{2+q}{2}} \right) + c' J_{-i} \left(\frac{2}{2+q} t^{\frac{2+q}{2}} \right) \right].$$

Ma, come sappiamo⁽¹⁾, quando u tende ad infinito procedendo per valori reali e positivi, le funzioni $J_i(u)$ ed $J_{-i}(u)$ tendono a zero come $\frac{1}{\sqrt{u}}$. In conseguenza, per la (20), se q è positiva, quando t tende all'infinito, x tenderà a zero come $t^{-\frac{q}{4}}$.

Fisica. — *Sugli effetti acustici derivanti da imperfezioni di centratura dei dischi fonografici.* Nota⁽²⁾ del Socio O. M. CORBINO e E. CAMBI.

Mentre attraverso i progressi della Elettroacustica si va sempre più perfezionando a tecnica delle incisioni delle matrici destinate alla stampa dei dischi grammofonici, le esigenze della riproduzione in serie di questi e anche una vera trascuratezza nella loro impressione a caldo danno ai dischi stessi dei difetti che li rendono talvolta insopportabili alla audizione, e spesso frustrano tutte le cure e gli accorgimenti faticosi e costosi che ha richiesto l'incisione.

Fra i vari difetti quello più caratteristico, e che fa riconoscere immediatamente a un uditore di buon orecchio che una trasmissione ricevuta per radio da una stazione anche ignota è la riproduzione di un disco e non di musica viva, consiste in un mutamento ritmico dell'altezza dei suoni percepiti, mutamento che segue il ritmo di rotazione del disco. Chi ha conoscenza di questo inconveniente, sa come esso riesca sgradevole, specialmente quando la musica riprodotta contiene note o accordi tenute a lungo dall'orchestra. Minore disturbo si ha nella riproduzione del canto, e ancora meno nei pezzi in cui le note si susseguono e cambiano molto rapidamente rispetto alla durata di un giro.

Escluso il dubbio che possa trattarsi di un mutamento ritmico di velocità del motore, ed eliminati i casi di dischi irreparabilmente difettosi per deformazioni irregolari subite nel raffreddamento dopo la stampa, ci siamo convinti che l'inconveniente deriva principalmente da un difetto di centratura, rispetto alla spirale del solco, del foro destinato a infilare il disco sull'asse della piattaforma girevole.

(1) Cfr. p. es. TODHUNTER, *An elementary treatise on Laplace's, Lamé's and Bessel's functions*, p. 312.

(2) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1935.

Effettivamente nei dischi difettosi si constata, osservando attentamente il moto del pick-up, che esso procede bensì verso il centro seguendo il solco, ma anziché con moto progressivo e uniforme, ciò avviene con moto oscillatorio che si sovrappone a quello normale. L'ampiezza di tale oscillazione è spesso rilevante.

Si riconosce facilmente quale sarà l'effetto del cattivo centramento. Supponiamo che nel solco sia incisa una nota di altezza costante: se a causa della eccentricità in un certo momento la punta è a una distanza dal centro che supera di un millimetro quella normale, e se la distanza dal centro in quel momento è di 100 millimetri, poichè la velocità angolare della piattaforma è costante, la punta incontrerà in un tempuscolo t un numero di ondulazioni del solco maggiore del normale, nella misura di 1 su 100, e di altrettanto si eleverà l'altezza del suono. Questa variazione di altezza sarà naturalmente maggiore quando il raggio del solco è minore: per esempio alla fine del pezzo inciso, quando quel raggio è di circa 60 millimetri, l'altezzazione di altezza sul normale sarà corrispondente a $1/60$. E poichè una variazione in senso opposto si avrà quando passa sotto la punta l'estremo diametralmente opposto del disco, in quanto l'errore di centratura porta allora la punta 1 millimetro più dentro del normale, si vede che l'oscillazione ritmica di altezza, alla fine del disco corrisponderà a $1/30$, cioè a un quarto di tono. È inutile dire che questo caso è raro, e che in tal caso l'audizione degli accordi o delle note tenute diviene intollerabile.

Ma casi meno gravi sono frequentissimi. Così un errore di centratura di $1/4$ di millimetro, cui corrisponde un massimo scarto della punta di $1/2$ millimetro, è stato riscontrato in circa il 75 per cento dei dischi di una numerosa collezione posseduta da uno di noi, e che pure erano stati acquistati dopo aver scartato quelli che acusticamente presentavano in modo troppo fastidioso il difetto riferito.

L'osservazione di queste escursioni anormali del pick-up può farsi agevolmente applicando ad esso uno specchietto nella parte che sta sull'asse di rotazione e seguendo il movimento di un fascio di luce riflesso dallo specchio su una scala. Nei numerosi casi esaminati, circa 600, se ne sarà presentato forse uno o due nei quali il moto del fascio riflesso sia apparso uniforme, come dev'essere quando la punta segue un solco a spirale con passo costante ed esattamente centrata. Effettivamente basta un errore piccolissimo di centratura per turbare visibilmente l'uniformità del movimento.

Si segua sulla scala l'immagine di un filamento riflesso dallo specchietto. Essa ha come legge di movimento quella risultante da un moto uniforme e da un moto sensibilmente sinusoidale con periodo T .

A parte un coefficiente di proporzionalità, il moto dell'immagine riproduce quello della punta del pick-up, facendo astrazione naturalmente dalle vibrazioni di frequenza acustica che molto limitatamente vengono trasmesse alla massa del pick-up. Se indichiamo con s il passo costante della spirale

e con e lo spostamento del centro di rotazione rispetto al centro della spirale, il movimento della punta sarà rappresentato perciò da

$$x = \frac{S}{T} t + e \sin \frac{2\pi}{T} t$$

e la sua velocità da

$$\dot{x} = \frac{S}{T} + \frac{2\pi}{T} e \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Si vede che la velocità tocca dei valori zero a partire da

$$2\pi e = S.$$

E poichè S è dell'ordine di 0,25 mm., già un difetto di centratura pari a 0,04 mm. è sufficiente per produrre nel moto dell'immagine un movimento inframezzato da pause. Da quel valore di e in su si ha al posto di un moto progressivo un moto prevalentemente in un verso, ma accompagnato da ritorni indietro più o meno rilevanti in relazione al valore di e . Si riconosce da ciò come sia difficile trovare un disco che dia luogo a un moto apparentemente uniforme, dato che basta un difetto di centratura di 0,04 mm. per dar luogo a vere pause nell'avanzata. Ci si può chiedere se a questa sensibilità di apprezzamento della eccentricità corrisponde, e fino a che punto, la sensibilità nell'apprezzamento acustico del conseguente difetto di riproduzione.

Com'è noto, la sensibilità dell'udito ai mutamenti di altezza è molto variabile da persona a persona, e perciò nella letteratura si trovano in proposito dati molto differenti.

Nell'accordatura di strumenti in orchestra si è potuto constatare che normalmente viene apprezzata una differenza di 2 vibrazioni sul corista da 435 vibrazioni a secondo; cioè all'incirca 1 su 200. Si trova intanto facilmente che come effetto della eccentricità e , in un punto dove il raggio della spirale è R , si ha un'alterazione periodica di frequenza del suono riprodotto che ha per ampiezza $\frac{e}{R}$ e perciò in un giro uno scarto totale di frequenza $\frac{2e}{R}$. Il valore sopra indicato di 1 su 200, come limite di sensibilità dell'udito ai mutamenti di frequenza, darebbe perciò

$$\frac{2e}{R} = \frac{1}{200}$$

e perciò per $R = 60$ mm.

$$e = 0,15 \text{ mm.}$$

Abbiamo però voluto esaminare se nei casi come l'attuale di un mutamento *ritmico* d'altezza del suono non si abbia un limite di sensibilità diverso da quello soprariferito, cioè diverso da $\frac{1}{200}$.

L'indagine è stata eseguita su un disco « Parlophon » fabbricato a cura dell'Ufficio centrale delle Poste germaniche, recante incise delle note pure e costanti per uno sviluppo di circa 50 giri ciascuna, corrispondenti a un tempo di esecuzione di circa 40 secondi per nota. Di questo disco si poteva variare artificialmente l'eccentricità della rotazione rispetto all'incisione e determinare così quel valore dell'eccentricità per cui l'orecchio comincia ad avvertire una variazione periodica dell'altezza della nota emessa, secondo un ritmo di variazione corrispondente alla rotazione del disco.

Il valore numerico di tale eccentricità si determinava poi col metodo precedentemente esposto della riflessione di una linea di fede su uno specchio portato dal braccio del pick-up, e dal valore di essa e del raggio d'incisione si risaliva al valore dell'ampiezza minima di variazione di frequenza che può essere percepito dall'orecchio.

Questo valore è risultato in tutti i casi nettamente inferiore a quel limite $1/200$ che abbiamo ammesso come potere selettivo dell'orecchio per due note emesse in successione immediata. L'orecchio rivela cioè una sensibilità maggiore quando la variazione di frequenza segue una periodicità regolare.

Le minime escursioni di frequenza (esprese in frazione della frequenza base) che l'orecchio può percepire nettamente, sono risultate leggermente decrescenti al crescere della frequenza accusando per questo fenomeno una sensibilità dell'orecchio crescente con la frequenza. Come valore numerico, per frequenze comprese fra 32 e 256 periodi completi al secondo, tale escursione critica di frequenza è risultata di 1 su 450: questo valore decresce poi fino a raggiungere il valore $1/800$ alla frequenza base di 4096 periodi. Le variazioni assolute corrispondenti variano così fra meno di $1/10$ di periodo al secondo alla frequenza di 32 periodi e circa 5 periodi al secondo alla frequenza 4096.

Assumendo per le frequenze normali delle esecuzioni musicali una sensibilità dell'orecchio di $1/450$ della frequenza iscritta, risulta come limite ammissibile dell'eccentricità del disco, che non dà luogo a questo disturbo della riproduzione anche per i minimi raggi d'incisione il valore

$$e = \frac{1}{450} \frac{R_{\min}}{2} = \frac{1}{15} \text{ mm.}$$

La tolleranza è quindi relativamente bassa ma, dato il metodo attuale di produzione dei dischi per stampaggio, non dovrebbe essere impossibile raggiungerla: mentre invece, come si è detto, la maggior parte dei dischi attuali presenta valori dell'eccentricità di qualche decimo di millimetro e quindi nettamente superiori al predetto limite di tolleranza.

Chimica. — *Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice.* Nota del Socio G. A. BLANC.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Le variazioni fisiologiche della curva glicemica e i fattori che le determinano.* Nota del Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *L'atonia dell'apparato contrattile della milza nella patogenesi di alcune forme di splenomegalia.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. CESARIS DEMEL.

La milza è forse l'organo che, per cause molto diverse tra loro, può offrire più frequentemente variazioni, talora rilevantissime di volume e quindi di peso, ed il clinico in vita, l'anatomo-patologo poi, al tavolo necroscopico, cercano sempre di rendersi ragione del perchè in determinati casi volume e peso siano alterati. Ciò si rende necessario perchè le variazioni sopra accennate molte volte servono al clinico come importantissimo sintomo ai fini della diagnosi ed all'anatomo-patologo come sussidio pur diagnostico per completare il proprio giudizio epicritico, prima di poterlo corroborare con l'esame istologico, alla fine della autopsia.

Perchè poi questa valutazione non induca in errore, occorre che l'organo nel reagire a quel qualunque stimolo noto ed ignoto che lo fa primitivamente o secondariamente ammalare, e che noi sospettiamo abbia rapporto colla malattia e con la morte dell'individuo, e della precedente azione del quale vogliamo sincerarci, valendoci in questo giudizio anche del volume e peso dell'organo, occorre, diciamo, che l'organo, dal punto di vista anatomico, sia precedentemente inalterato, chè altrimenti, volume e peso alterati sarebbero o totalmente o parzialmente in rapporto a cause che hanno agito deformando in modo stabile l'organo, prima di quella ultima che noi vogliamo determinare.

Ciò che abbiamo detto si può estendere alla valutazione macroscopica dello stato anatomico di tutti gli organi, ma vale specialmente per la milza, in quanto questa è un organo squisitamente contrattile e spesso quindi il suo volume non è solo in rapporto alle modificazioni che per causa pato-

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1935.

logica possono intervenire nella quantità o nella qualità o nella funzionalità degli elementi dai quali la milza risulta costituita, ma è in funzione anche della normale, della diminuita o della aumentata capacità contrattile dell'organo, legata questa, in massima parte, allo stato anatomico e necessariamente anche funzionale degli elementi muscolari lisci, in minor parte dagli elementi elastici, dai quali la milza è fornita. Questo fattore « variazioni della capacità contrattile della milza » che come vedremo può avere una base anatomica dimostrabile in alterazioni qualitative o quantitative delle cellule muscolari lisce o delle fibrille elastiche della milza, e forse anche una base puramente funzionale per azione di sostanze che la ricerca sperimentale, suffragata dalla osservazione clinica, ha dimostrato avere una azione eccitante, raramente deprimente sulla contrattilità splenica, è stato fino ad oggi solo fugacemente accennato senza dare una eccessiva importanza al fattore stesso, sicchè tranne nei casi di sclerosi, dove al fattore stesso si è accennato nel senso della limitazione, è stato trascurato e si trascura oggi nella valutazione patogenetica di molti ingrossamenti di milza, si presumano questi o meno in rapporto ad alterazioni nella ematopoiesi, nella emocataresi, o da stati infettivi.

Ricordo così che un fisiologo, ed in linea assolutamente incidentale e senza tornare poi più estesamente sull'argomento, il Luciani, nel suo trattato di Fisiologia nella edizione del 1908 (Società Editrice Libreria, Milano) a pag. 579 dice: « Un altro fenomeno importante, desunto dalla osservazione clinica è l'inturgidimento temporaneo che subisce la « milza in molte piressie che accompagnano le malattie infettive. Nelle febbri malariche, « col ripetersi degli accessi, aumenta sempre più l'ingrossamento della milza che diventa « permanente e può raggiungere proporzioni notevolissime, sia per accumulo in essa dei « parassiti malarici e dei loro prodotti, sia per probabile paralisi degli elementi muscolari « dell'organo ».

Ipotesi dunque questa avanzata nel campo puramente funzionale, senza alcun desiderio di vedere se questo disturbo funzionale sia di origine puramente nervosa, o non piuttosto in rapporto a lesioni degenerative dei muscoli lisci.

E se andiamo a cercare poi quale interpretazione Bignami⁽¹⁾ dia nella sua classica descrizione istologica dei tumori di milza acuti e cronici da malaria (ad interpretazione dei quali Luciani ha fuggevolmente esposta la interpretazione patogenetica sopra ricordata) vediamo che Bignami nella forma acuta, riferisce il forte aumento di volume della milza all'enorme invasione di globuli rossi parassitati e di elementi fagocitari nei cordoni della polpa che è insieme fortemente iperemica ed edematosa, nella forma cronica, ad una forte produzione di connettivo sostituyente gli elementi che nella infezione continuata si sono necrosati, così che nella milza vengono a formarsi « lacune venose separate fra loro da « sottili strati di polpa splenica e dove la distruzione è ancora più grave dalla formazione « di un tessuto fatto da enormi seni cavernosi, separati da un connettivo esilissimo, ricco « di cellule giganti, tessuti che sostituiscono la polpa splenica necrosata ».

Reperto questo completato successivamente da Businco e Foltz⁽²⁾ che studiando le fibre a graticcio (cioè la parte stromale reticolare del sistema reticolo endoteliale) hanno dimostrato sempre che nei tumori cronici da malaria, tanto in quelle della capsula come in

(1) MARCHIAFAVA e BIGNAMI, *La infezione malarica*. Vallardi, Milano, 1931.

(2) BUSINCO e FOLTZ, « Policlinico », Sezione Medica, 1924.

quelle dei cordoni della polpa si abbia una sensibile ipertrofia ed iperplasia con manifestazioni anche fibroadeniche nei follicoli.

Ricordo ancora come Dominici⁽¹⁾ riferendo sul modo col quale si compie il circolo nella milza, si associa alla opinione oggi dominante che nella milza si abbia un circolo aperto il quale consente che il sangue, uscito dal sistema arterioso, dilaghi nelle lacune della polpa per poi guadagnare i seni venosi. Ora questo sovrariempimento delle lacune e dei seni della polpa e rispettivamente il loro svuotamento si possono verificare per meccanismi diversi, che sono regolati da un certo « tono » di tensione che controbilancia la forza di propulsione del sangue, tono che colle sue alterazioni egli ammette (specialmente per i rilasciamenti) possa creare stati morbosi suscettibili eventualmente di essere rilevati già all'esame clinico (aumento palpabile della milza?) ma di cui non sa rilevare l'importanza, ma che suppone sia in diretta dipendenza dello stato di tensione del tessuto splenico e dell'integrità del suo apparato contrattile ed elastico, « essendo il primo tanto minore quanto più lesa sia il secondo e quanto più l'organo abbia perduto delle sue caratteristiche di spugna soffice imbevuta (ma solo parzialmente) di sangue, come può avvenire nell'ispessimento del reticolo e nell'induramento dell'organo, nelle quali circostanze non solo deve riuscire difficoltà lo svuotamento dell'organo, ma di solito, non sempre però, è anche ridotta la quantità di sangue che il viscere può contenere ».

Appare evidente che nelle varie considerazioni ora riportate non si trova alcun accenno ad alterazioni anatomiche degenerative, e quindi con ripercussione funzionale degli elementi muscolari lisci della milza, che siano causa determinante od aggravante la forte iperemia con dilatazione molto sensibile dei seni e conducente, col suo persistere, a formazioni pseudoangiomatose.

Parmi utile quindi di richiamare l'attenzione su questo, fino ad ora non sospettato, momento patogenetico il quale va ora considerato sempre quando noi ci troviamo in presenza di ingrossamenti splenici contrastanti con quanto dal complesso degli altri rilievi clinici od anatomici si è indotti a concludere, chè, solo dalla replicata ed accurata osservazione clinica, suffragata dal reperto istologico, noi potremo dare una precisa dimostrazione della fondatezza del concetto patogenetico ora esposto e che mi è stato suggerito nella interpretazione del reperto istologico di un caso di splenomegalie da me recentemente raccolto.

Come è noto il peso medio della milza nel cadavere oscilla con leggere variazioni a seconda dei vari autori che lo hanno determinato sui 200 gr. nell'età media della vita, dai 20 ai 30 anni. È noto però che congenitamente si possono per malformazioni in difetto avere delle milze di 30 gr. e per malformazioni in eccesso fino a 2 Kg. (Pozzi, Baux⁽²⁾) per quanto giustamente con Banti⁽³⁾ si possa ritenere che in questi ultimi casi non si trattasse di milza a struttura normale e quindi la splenomegalia non riferibile a malformazione congenita. Ad ogni modo è ben noto che il volume della milza a struttura normale, quale si riscontra nel cadavere, è sensibil-

(1) DOMINICI, « Minerva Medica », 1931, vol. I, n. 12.

(2) POZZI e BAUX citati da Banti.

(3) BANTI, *Anatomia Patologica*. Soc. Libreria, 1907, Milano.

mente inferiore a quello che si può osservare in vita quando si ha occasione, in un intervento laparotomico di scoprire la milza, in quanto che all'atto della morte la milza si impicciolisce perchè si svuota in gran parte del sangue che vi è contenuto (e nella morte avviene anche una contrazione delle fibre muscolari lisce degli sfinteri e dei muscoli erettori dei peli) ed a questo impicciolimento della milza corrisponde un raggrinzamento della capsula.

Questo fenomeno che corrisponde ad una delle ultime manifestazioni vitali, può essere reso più manifesto da un altro; questo però postmortale, che al primo si sovrappone, quello cioè dell'istituirsi della rigidità cadaverica, che producendosi anche nelle fibrocellule muscolari lisce della milza, le accorcia sensibilmente e da ciò nuova riduzione di volume. Questi due fenomeni che cronologicamente si seguono, possono però subire delle variazioni. Può essere che l'individuo per disturbi endocrini (specialmente per alterazioni funzionali delle surrenali con formazione in eccesso di adrenalina) o per iniezioni fatte prima della morte a scopo cardiocinetico o comunque terapeutico di adrenalina o di altre sostanze eccitanti la muscolatura liscia, abbia avute delle energiche contrazioni spleniche prima della morte e noi troveremo una milza più piccola esangue a capsula fortemente raggrinzita.

Se invece per un difetto endocrino o di origine nervosa con diminuzione o abolizione della eccitabilità contrattile della milza, la normale contrazione postmortale della milza non avvenga o non avvenga anche per alterazioni degenerative varie che ne colpiscano le fibre muscolari lisce la milza si presenterà più voluminosa che di norma ed a capsula tesa.

Aggiungasi che, come è noto avvenire per le fibre muscolari striate, nelle quali alterazioni degenerative impediscono il formarsi della normale rigidità cadaverica, pure nella eventualità sopraprospettata nelle fibre muscolari lisce della milza degenerate non si istituirà la rigidità e quindi l'accorciamento e da ciò il persistere di una milza grossa a capsula tesa.

Se però le alterazioni anatomiche e funzionali che abbiamo ora prospettate vengono a portare sensibili variazioni nel volume e nel peso della milza, quale la troviamo nel cadavere, si siano da tempo istituite e siano più gravi e persistenti, noi avremo una ben più manifesta e distinta ripercussione nel volume della milza quando questa per una causa qualunque abbia tendenza ad ingrossare ed allora l'ingrossamento sarà maggiore di quanto possa avvenire in milze ad apparato muscolare ed elastico anatomicamente integro e funzionalmente conservato, nè questo aumento di volume avrà tendenza a ridursi perchè insensibile e alle normali ritmiche oscillazioni contrattili della milza ed a stimoli anche più forti che eventualmente sull'apparato contrattile, in modo spontaneo o ad arte provocato, possono agire. Questi sono i casi nei quali un tumore splenico può facilmente indurre in errore il clinico che all'esame obiettivo dell'ammalato lo riscontri non

aderente alla sintomatologia di quella malattia che per altri rilievi obbiettivi o subiettivi si impone alla diagnosi.

Questo errore però è possibile solo nei casi, e non sono frequenti, nei quali nella milza per quella qualunque causa che la fa ingrossare, non si istituiscono, o un processo di sclerosi connettivale di origine fibroblastica che la rende dura e poco contrattile o non si istituisca quel processo di ingrossamento dell'apparato reticolare proprio della milza, processo da Banti nel suo classico trattato chiamato col nome di « fibroadenia » e nel quale lo stroma linfatico pur divenendo più robusto e più fibroso conserva fino all'ultimo il suo carattere reticolare ed adenideo e che conduce pure col suo addensarsi ad un aumento di volume e di consistenza dell'organo.

La sclerosi connettivale di origine fibroblastica alla quale abbiamo accennato, nel massimo numero dei casi, è l'esponente della reazione che la milza presenta di fronte alle infezioni quando queste assumano decorso cronico, reazione legata alla sua funzione antibatterica e che a lungo andare porta a sensibili alterazioni e negli elementi connettivi di sostegno dell'organo e nella parte stromale del sistema reticolo endoteliale.

In queste sclerosi dell'organo le fibre muscolari lisce se hanno reagito, come tante volte avviene, ai tossici della infezione degenerando e riducendosi di numero e di volume, condurranno alla atonia contrattile della milza, la quale però per l'irrobustimento dei tratti connettivali, non si potrà eccessivamente dilatare, tanto che la milza irrigidita potrà solo di poco aumentare di volume. E lo stesso presso a poco avverrà se le fibre muscolari lisce inalterate abbiano subito un processo di iperplasia o di ipertrofia, che ipertrofia o iperplasia male sapranno vincere la resistenza del connettivo interstiziale di origine fibroblastica e per se stesso indotto alla retrazione.

La stessa possibilità noi possiamo ammettere avverarsi quando l'indurimento dell'organo abbia il tipo fibroadenico descritto da Banti e che può istituirsi tanto nelle così dette splenomegalie primitive (nelle quali cioè l'alterazione della funzione produttiva ematopoietica, o la funzione distruttiva « emocataretica » od « emolitica » si sia iniziata e si mantenga sempre preponderante nella milza) quanto nelle splenomegalie che sono l'esponente splenico, non predominante, e talora tardivo, di gravi alterazioni di tutto l'apparato ematopoietico.

Escludendo ora i casi nei quali la sclerosi connettivale fibroblastica o lo stato di fibroadenia possano impedire che lo stato di inibizione funzionale (ad es. da alterazioni del simpatico) o di alterazione anatomica (degenerazioni varie dalla semplice atrofia alla necrosi) delle fibre muscolari lisce possano impedire, dico, che le variazioni di volume dell'organo siano veramente e solo in funzione dello stato anatomico e funzionale delle fibre muscolari stesse, consideriamo i casi nei quali nessuna alterazione anatomica preesistente, all'infuori di quelle interessanti l'apparato contrattile muscolare ed

elastico della milza, possa esplicare la libera manifestazione di quei fenomeni che unicamente dalla atonia dell'apparato contrattile della milza possono derivare.

In questi casi noi vedremo che, data la speciale struttura della milza, nella quale come è noto si ha un tipo di circolazione lacunare, diminuendo la tonicità del proprio apparato contrattile (e intendiamo questo nel suo complesso muscolare ed elastico, tanto dunque per le fibre elastiche e muscolari che si trovano nei sepimenti connettivali di sostegno e nella capsula quanto in quelle delle pareti vascolari) il sangue che per la funzione emoregolatrice (dimostrata da Bracford e che pure limitandone l'estensione dobbiamo oggi certamente ammettere per quanto non esclusivamente localizzata in questo organo (Cesaris Demel)⁽¹⁾ affluisce alla milza per restarvi in deposito, trovando sempre una minore resistenza vi si accumulerà in quantità sempre maggiori e da ciò dilatazione e dei vasi e dei seni nei quali questi immettono con conseguente aumento di volume dell'organo che si presenterà molle, poco consistente ed a capsula fortemente tesa.

Ricordiamo però che quando si abbia un tale ingorgo di sangue da stasi, in rapporto a cattiva funzionalità del cuore destro, o per ostacoli al circolo portale, nella milza ristagna sangue venoso, da ciò cattiva nutrizione dell'organo, fatti degenerativi parenchimatosi con sostituzione connettivale agli elementi così andati perduti.

Ma nel caso che abbiamo sopra prospettato il sangue che ristagna non è sangue venoso, è sangue arterioso e il suo ristagno in eccesso, non può provocare alterazioni di nutrizione con successiva trasformazione connettivale e così l'organo resta molle, sempre più espanso, mano a mano che la distensione viene sempre più ad aggravare le condizioni anatomiche e funzionali degli elementi muscolari.

Continuando questa distensione, si verranno a creare nella milza aree nelle quali ampi spazi sanguigni separati da sottili tramezzi a struttura connettivale ci daranno l'aspetto di una formazione teleangiectasica od angiomatica. Aspetto questo sensibilmente diverso per la sua struttura istologica e per la sua patogenesi da quello descritto, come abbiamo ricordato, da Bignami nel tumore cronico da malaria nel quale l'aspetto angiomatico era dato « da enormi seni cavernosi separati da connettivo esilissimo ricco di cellule giganti, tessuti che sostituiscono la polpa splenica necrosata ».

Quanto fino ad ora ho esposto e che può sembrare il risultato di considerazioni aprioristiche non dimostrate da fatti sicuramente accertati mi fu suggerito dallo studio di un caso sezionato al mio Istituto di Anatomia Patologica e proveniente dalla Clinica Medica Generale, e nel quale, pur col più oculato e diligente esame clinico non si era potuto stabilire la natura

(1) A. CESARIS DEMEL, *Sui rapporti tra la contrattilità delle milze, l'iperglobulia e la piastrinosi*. « Atti della Soc. Tosc. di Scienze Naturali », Vol. XXXVIII, 1928.

e il significato di una forte splenomegalia, che fu confermata poi esistere all'atto dell'autopsia.

Si trattava di una donna di 49 anni con artrite cronica deformante, reliquati cicatriziali di tubercolosi polmonare, miocardite cronica fibrosa con fegato voluminoso; nel quale la milza estratta dal cadavere si dimostrò del peso di 1190 grammi, mentre il diametro longitudinale era di cm. 24, lo spessore massimo di cm. 19. La milza aveva capsula fortemente tesa, organo molle uniformemente, senza quindi punti di indurimento, superficie del taglio vivamente arrossata (con facile spremitura di una pappa sanguinolenta) sulla quale spiccavano piccole aree biancastre. Le capsule surrenali piuttosto voluminose presentavano un forte predominio a disposizione talora nodulare della sostanza corticale con scarsissima sostanza midollare, invasa questa anche da noduli di sostanza corticale si da dare nell'insieme un aspetto di ipertrofia nodosa della corticale. Notisi che clinicamente la donna aveva presentati spiccati fenomeni astenici interpretati come dipendenti da insufficienza surrenale.

L'esame ematologico in vita aveva fatto escludere l'esistenza di uno stato leucemico. All'esame istologico la nota che prima si imponeva all'esame della milza era l'aspetto teleangectasico, in alcuni punti angiomatoso, in quanto che i seni si presentavano fortemente dilatati e pieni di sangue senza che nell'organo si vedessero segni di inspessimenti connettivali o di uno stato fibroadenico.

Le fibre muscolari lisce o estremamente sottili o non dimostrabili laddove siamo soliti ritrovarle, estremo assottigliamento e scomparsa anche delle fibrille elastiche. Follicoli linfatici iperplastici e nodi di aspetto linfomatoso disseminati ed indipendenti dai follicoli.

Abbastanza spiccati i segni di una attiva ematopoiesi e specialmente interessante la comparsa di molteplici megacariociti molti dei quali presenti negli ampi spazi venosi trabecolari.

Nell'insieme dunque la milza presentava un forte ristagno di sangue nei seni fortemente ectasici, atrofia e scomparsa delle fibre muscolari lisce e delle fibrille elastiche, nodi linfomatosi e ripresa ematopoietica molto spiccata.

Due considerazioni possiamo fare a questo punto: che la atonia funzionale della muscolatura liscia della milza nel nostro caso sia stata determinata dalla insufficiente produzione di adrenalina in rapporto allo stato di riduzione nella quale anatomicamente tanto macro che microscopicamente è stata trovata la sostanza midollare delle surrenali, ed atrofia quindi e scomparsa delle fibre muscolari lisce dell'organo per inattività; l'altra che la grande quantità di sangue presente nella milza e di origine arteriosa, abbia spinto la milza ad una forte ripresa ematopoietica come lo dimostrano le note istologiche che abbiamo qui sopra ricordate, fatto questo non nuovo sapendo come l'iperemia arteriosa porti con sè un esaltamento di funzione in tutti gli organi dove questa si stabilisca.

Ora se nel nostro caso questo rapporto fra stato della capsula surrenale ed atonia muscolare può spiegare il forte aumento della milza in altri casi, e specialmente possiamo immaginare ciò avvenga nelle infezioni quando la milza è in intimo contatto con i tossici circolanti, l'atonia potrà avere una base veramente anatomica in alterazioni degenerative che possono colpire le fibre muscolari lisce della milza come è noto colpiscono le fibre muscolari lisce in altra sede, ad esempio nei vasi e nelle pareti dell'apparato digerente.

Le stesse cause in parte ora dimostrate in parte sospettate che provocano la scomparsa delle fibre muscolari lisce, si possono poi invocare per spiegare la scomparsa o la riduzione anche delle fibre elastiche, e da ciò la mancanza anche nella milza di quella resistenza che le viene data dalla perfetta integrità dell'apparato elastico del quale è fornita.

Il momento patogenetico che abbiamo ora invocato a spiegare l'instaurarsi di alcune forme di splenomegalie, che con nessun'altra delle interpretazioni patogenetiche ben note si può spiegare, trova del resto riscontro in quanto vediamo avvenire in altri organi. Ricorderò solo quanto vediamo avvenire nella parete gastrica quando dalla persistenza di stati infiammatori cronici con lesioni tossiche in profondità della tonaca muscolare questa si atrofizza e lo stomaco si fa permanentemente e progressivamente ectasico, nel polmone, quando solo la alterazione profonda con usura delle fibrille elastiche lo induce allo stato enfisematoso, nei vasi, quando alle lesioni delle fibrille muscolari della media segue uno sfiancamento del vaso, favorito questo fenomeno dalle alterazioni degenerative che negli elementi elastici si istituiscono secondariamente alla lesione degli elementi muscolari.

A dare maggior valore poi alla ipotesi patogenetica da noi formulata voglio ricordare che un reperto istologico affatto simile a quello da me descritto nel mio caso, cioè di forte accumulo di sangue da atonia contrattile, sì da dare aspetto angiomatoso al tessuto, si ottiene se noi sperimentalmente leghiamo ad un animale la vena splenica e successivamente iniettiamo a forte pressione grande quantità di sangue nella milza. Otteniamo infatti un reperto di superreplezione sanguigna assolutamente simile a quello del caso nostro. Solo che nell'esperimento l'aumento di pressione che è data dalle iniezioni forzate viene a vincere la normale resistenza delle fibre muscolari lisce che vengono a trovarsi, di fronte ad una pressione aumentata, nelle condizioni in cui si trovano fibre degenerate di fronte ad una pressione sanguigna normale.

La descrizione precisa del caso che fu oggetto del mio studio e che mi ha dato lo spunto alla interpretazione patogenetica di alcune splenomegalie da me esposta, sarà argomento di una mia prossima pubblicazione nella quale io pure riferirò su quanto potrò ricavare dallo studio già da me iniziato su nuovi casi di splenomegalia, o semplicemente di ingrossamenti di milza di oscura patogenesi, che mi sarà dato di raccogliere, per cercare così sostegno alla ipotesi patogenetica da me formulata.

In questo studio porrò anche una speciale attenzione allo stato anatomico delle capsule surrenali (e di altri organi endocrini che come l'ipofisi ed il pancreas coi loro increti possono influire sulla contrattilità splenica) per vedere se la ripercussione anatomica e funzionale che nel caso da me raccolto si è avuta così manifesta nell'apparato muscolare contrattile della milza, in rapporto ad una alterazione anatomica e quindi funzionale delle capsule surrenali, si possa anche osservare in qualunque altra sede siano presenti fibre muscolari lisce.

Conclusioni. — I. Alle concezioni patogenetiche diffusamente note ed ammesse per l'istituirsi delle splenomegalie ne dobbiamo oggi aggiungere un'altra la quale ammette e sostiene che alcune forme di splenomegalia od anche di semplici aumenti di volume della milza, possano essere in rapporto ad una atonia a base funzionale od anatomica dell'apparato contrattile (muscolare ed elastico) dal quale la milza è fornita.

II. Sempre quando si abbiano dati clinici che facciano sospettare alterazioni funzionali nelle fibre muscolari lisce o si possano in esse dimostrare alterazioni quantitative o qualitative, si può in alcuni casi, di queste alterazioni sospettare una origine endocrina, e da ciò la necessità di doverne e clinicamente ed anatomicamente ricercare la sede e dimostrarne la natura.

Patologia. — *L'azione cancerogena del 1, 2-benzopirene sintetico* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del CORRISP. P. RONDONI e di A. CORBELLINI.

Una delle più brillanti conquiste della oncologia sperimentale è stata negli ultimi anni la dimostrazione e la sintesi degli idrocarburi policiclici responsabili della azione cancerogena del catrame. Senza riportare qui il brillante complesso di studi della scuola di Kennaway, ormai riassunto in parecchie riviste, ci limiteremo a ricordare che gli idrocarburi più attivi sono stati riconosciuti essere l'1, 2-benzopirene, il 5, 6-ciclopenteno - 1, 2-benzantracene; l'1, 2, 5, 6-dibenzantracene, i quali tutti contengono il sistema fenantrenico (tre anelli benzolici condensati angolarmente), che si ritrova in sostanze di importanza biologica (sterine e derivati).

Di conferme e precisazioni ai lavori degli inglesi (Cook, Hewett, Hieger ecc.) troviamo negli ultimi due anni le ricerche di Maisin e Liegeois ⁽³⁾ che saggiano su topi l'1, 2, 5, 6-dibenzoantracene in soluzione benzolica satura, trovando che alla applicazione cutanea il numero di tumori prodotti è minore che con buoni catrami integrali, come è più lungo il periodo di latenza.

(1) La parte chimica di questo lavoro fu eseguita nell'Istituto di Chimica industriale (C), la parte biologica in quello di Patologia generale (R) della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) «Compt. Rend. Soc. d. biol.», vol. 114, p. 536, 1933.

Hanno risultati negativi su conigli. Poi ⁽¹⁾ essi saggiarono un 1, 2-benzopirene sintetico in soluzione benzolica 1 %, sempre sulla pelle di topi (sgocciolamento); ed hanno largo e molto precoce sviluppo di cancro, più precoce ancora che nelle esperienze degli inglesi: così in una serie comparativa fra il dibenzoantracene, il catrame e questo benzopirene essi hanno al 128° giorno 0 cancri su 13 topi col primo idrocarburo, 1 su 30 col catrame, ben 13 su 18 col secondo idrocarburo. Seelig ⁽²⁾ col 1, 2, 5, 6-dibenzoantracene in soluzione benzolica 0,3 % usato per 294 giorni in 63 applicazioni sulla pelle dei topi, trova questo idrocarburo meno depilante del catrame, una mortalità minore degli animali ed un certo ritardo nella comparsa dei tumori in confronto al catrame greggio. La percentuale dei tumori ottenuti è maggiore, probabilmente per la minore tossicità dell'idrocarburo sintetico, che permette una sopravvivenza più prolungata dei topi. Le metastasi sembrano essere più rare che col catrame.

Con questi idrocarburi sono stati ottenuti anche tumori del connettivo (sarcomi) mediante iniezione nel sottocutaneo di animali di soluzioni in eccipiente grasso. Già Burrows, Hieger e Kennaway ⁽³⁾ trovarono che iniezioni di 1, 2, 5, 6-dibenzoantracene in lardo produceva tumori fusocellulari in topi e ratti. Più di recente Barry e Cook ⁽⁴⁾ hanno studiato collo stesso metodo l'azione di 5, 6-ciclopenteno-1, 2-benzoantracene e del crisene, nonchè del lardo usato da solo; e trovano che anche il lardo dà un lieve grado di neoformazione connettivale (?) la quale tuttavia non ha carattere di malignità, mentre tutti i suddetti idrocarburi provocano in topi e ratti dei sarcomi con diversa frequenza. Tuttavia gli AA. non vedono sicura la azione oncogena del crisene; e suppongono che siano piuttosto in atto delle impurità a spiegare i pochi tumori da crisene; intanto l'applicazione cutanea di crisene in topi ha dato risultati oltremodo scarsi e dubbi. Confrontando questi vari idrocarburi si osserva che le attitudini a dare cancri o sarcomi non sono parallele. Secondo Burrow ⁽⁵⁾ anche nel pollo l'iniezione di 1, 2, 5, 6-dibenzoantracene in mezzo grassoso provoca un sarcoma fusocellulare. Bottomley e Twort ⁽⁶⁾ tornano ultimamente sulla azione oncogena del crisene, da Twort e Fulton ⁽⁷⁾ già ammessa, ma come si è visto, negata da Barry e Cook; essi usano crisene altamente purificato, constatano in realtà solo una debole azione; ed ammettono che certi grassi con cui l'idrocarburo è mescolato nelle applicazioni cutanee o sottocutanee fanno da sensibilizzatori: l'acido oleico ed altri acidi grassi saturi e insaturi avrebbero importanza nel

(1) «Compt. Rend. Soc. d. biol.», vol. 115, p. 733, 1934.

(2) «Amer. Journ. of cancer», vol. 20, p. 827, 1934.

(3) Ibid., vol. 16, p. 57, 1932.

(4) Ibid., vol. 20, p. 58, 1934.

(5) Ibid., vol. 17, p. 1, 1933.

(6) Ibid., vol. 21, p. 781, 1934.

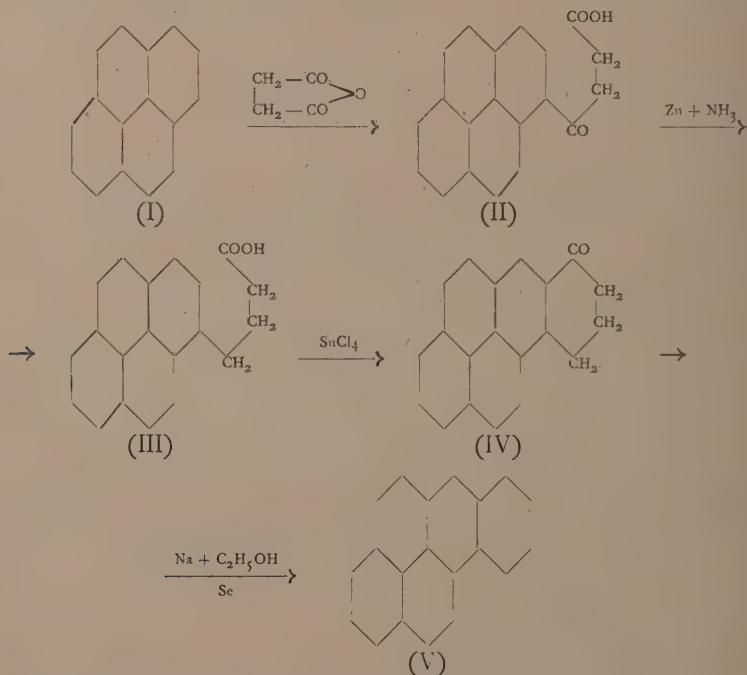
(7) «Journ. path. a. bacter.», vol. 33, p. 119, 1930.

creare un mezzo atto alla carcinogenesi. Così l'acido oleico favorirebbe anche l'azione di un catrame sintetico da pirene.

Andervont⁽¹⁾ studia l'azione del solito dibenzoantracene (che è perciò l'idrocarburo più studiato) sciolto in lardo ed iniettato sottocute comparativamente in famiglie di topi con alta e con bassa quota di neoplasie spontanee; e non trova differenze apprezzabili nella produzione di sarcomi: la costituzione genotipica dunque, egli dice, non protegge ceppi puri contro un potente agente oncogeno.

Noi ci siamo proposti di studiare l'eventuale azione oncogena di questi e di altri idrocarburi sintetici, sia alla applicazione cutanea, sia alla iniezione sottocute in topi e ratti. Riferiamo intanto qui sul 1, 2-benzopirene, intendendo di portare così un controllo ulteriore alle osservazioni degli inglesi in riguardo a questo agente oncogeno che i singolarmente pochi dati finora esistenti nella letteratura darebbero come fra i più efficaci; se avremo risultati positivi o comunque interessanti con altri nuovi composti preparati al pari di questo da uno di noi (C.) e che sono ancora allo studio (perilene, antantrene, dibenzoacridine ecc.) ne riferiremo partitamente.

L'1, 2-benzopirene impiegato in queste ricerche venne preparato dal pirene secondo la sintesi seguente descritta da Cook e Hewett⁽²⁾



(1) « Public Health reports », vol. 49, p. 620, 1934.

(2) « Journ. Chem. Soc. », 1933, p. 398.

Alle modalità indicate dai precedenti AA. aggiungiamo alcune osservazioni e modificazioni.

1) Si è abbreviato il tempo di reazione fra anidride succinica, pirene e cloruro di alluminio riscaldando la miscela, dopo 2-3 ore l'introduzione del pirene, a 60°-70° per circa 4-5 ore.

L'acido β -pirenoil (I)-propionico (II), ottenuto decomponendo il suo sale sodico cristallizzato una sola volta da acqua, è quasi puro (p. f. 182°-183°; rendimento 30 gr. da 25 gr. di pirene).

2) L'acido γ -pirenil (I)-ossibutirrico che si forma insieme all'acido γ -pirenil (I)-butirrico (III) nella riduzione dell'acido (II) venne trasformato nel lattone bollendolo in clorobenzolo. L'acido (III), prima della ciclizzazione, venne cristallizzato da clorobenzolo; si presenta in foglioline argentee fondenti a 186°. La sua soluzione solforica è gialla con fluorescenza verde.

3) Il 4'-cheto 1', 2', 3', 4'-tetraidro 1, 2-benzopirene (IV) cristallizza dalla miscela di acetone, benzolo ed alcool metilico in foglioline giallo-oro fondenti a 167°-170°. Ricristallizzato dalla miscela alcool-benzolo il suo punto di fusione si eleva a 173°-174°.

Il prodotto delle acque madri, contenenti secondo i predetti autori AA., anche pirene, non venne lavorato. Da 161 gr. di acido (III) vennero ottenuti gr. 32 del chetone (IV).

4) Il chetone precedente (2 parti) si riduce in soluzione alcoolica bollente con sodio (1 parte). Il prodotto di riduzione bruno che si separa per raffreddamento si purifica per cristallizzazione da alcool (p. f. 170°). Da 14 gr. di chetone vennero ottenuti gr. 9,7 di prodotto ridotto.

Questo si tratta con selenio come è indicato; dalla soluzione benzolica concentrata del prodotto di reazione si separa l'1, 2-benzopirene (V) (gr. 6,50). Il prodotto greggio si fa reagire in soluzione benzolica bollente con acido picrico; per raffreddamento si separa il picrato in aghetti rosso-scuri che si purifica con ripetute cristallizzazioni da alcool amilico.

Si decompone infine il picrato con carbonato sodico diluito e si cristallizza ripetutamente l'idrocarburo della miscela alcool etilico-benzolo (p. f. 173°-174°).

Il preparato in soluzione benzolica 1% fu sgocciolato da contagocce sulla pelle dei topolini, nella regione interscapolare, secondo la tecnica di Maisin e Liegeois, due o tre volte la settimana, per i periodi di tempo indicati sotto. Furono usati in tutto 57 topi, suddivisi in lotti diversi ad inizio ed a durata diversa di trattamento. Si ebbe una, nel complesso, discreta perdita di animali: un lotto di 27 topi era ridotto a 6 animali dopo 103 giorni; di un lotto di 20 topi ne sopravvivevano 8 dopo 85 giorni ed uno solo dopo 156 giorni; di un lotto di 10 ne residuano 2 dopo 147 giorni. Non teniamo conto di 10 topi che morirono tutti entro un mese, dopo poche applicazioni, perchè la morte precoce fu dovuta sicuramente ad una acci-

dentale epizoozia. Noi non possiamo disconoscere dunque una certa tossicità al preparato, la cui azione generale è attestata anche dalla estesa trasformazione mieloide della milza e del fegato, il quale ultimo in molti casi assume addirittura aspetto similleucemico, con ampi focolai emopoietici provvisti di megacariociti. Nella milza si sono notate talora deposizioni di sostanza ialina e amiloide. Questa azione generale non è tuttavia in rapporto diretto con quella cancerogena locale: sembra anzi che in ogni lotto ci sia rapporto inverso o almeno indipendenza assoluta fra le alterazioni epato-spleniche e quelle neoplastiche. Si direbbe che sono gli animali più resistenti all'azione generale del trattamento (nella quale anche il benzolo usato come solvente potrebbe a lungo andare avere qualche parte insieme coll'idrocarburo; come pure infezioni intercorrenti dipartentisi da ulcerazioni cutanee ecc.) che presentano più prontamente e tipicamente lo sviluppo di lesioni neoplastiche. Si può anche dire che la disposizione del sistema emopoietico a reagire con fatti iperplastici-metaplastici non coincide colla disposizione alla reazione oncoplastica della cute; avendo le due disposizioni gradi diversi nei diversi individui di stipiti murini non puri, sebbene resulti in genere che, ammesso un sufficiente periodo di trattamento, tutti i topi sopravvivenuti finiscono col presentare lesioni cancerose o precancerose. Il fatto è certo che certi topi presentano, con numero minore di applicazioni, lesioni cancerose più avanzate di altri più intensivamente trattati: così in uno stesso gruppo di animali convissuti nella stessa gabbia e trattati in modo rigorosamente parallelo, uno dopo 106 giorni e 36 applicazioni offre cancro più avanzato di altro morto dopo 147 giorni con 41 applicazioni; ed esempi simili si hanno in tutti i lotti. Conviene soggiungere che la tecnica di applicazione è tutt'altro che rigorosamente quantitativa e perciò è difficile dire fino a che punto siano in giuoco diversi gradi di resistenza od anche diversità di dose, permanenza in loco della soluzione benzolica o sua diffusione ecc.

Si può dire che gli animali sopravvivenuti al 90-100° giorno dopo 30-35 applicazioni presentavano tutti almeno lesioni papillomato-verrucose ed inizio di invasione in profondità dell'epitelio. Cancri perfettamente costituiti si sono repertati rispettivamente dopo giorni 124, 168, 129, 156 (enorme, con infiltrazione delle ghiandole linfatiche ascellari); 105 (dubbio); 125; 120; 106 (avanzato assai in rapporto alla brevità del tempo); 106 (iniziale); 147: dunque una diecina in tutto, senza contare le forme del tutto iniziali sorprese istologicamente. Si tenga presente che quei dati cronologici derivano da osservazioni microscopiche fatte alla morte spontanea o provocata del topo e corrispondono spesso a lesioni già avanzate; che quindi il tempo necessario alla iniziale e sicura cancerizzazione è certamente di regola minore e può calcolarsi approssimativamente sui 100 giorni per la più gran parte dei topi. L'1, 2-benzopirene ottenuto per sintesi è così *uno dei più potenti agenti cancerogeni*, sia per la rapidità con cui induce la trasformazione maligna che per la costanza dell'azione.

Per quanto riguarda le alterazioni istologiche della pelle nel punto di applicazione, sarà solo rilevata qui la precoce infiltrazione infiammatoria del derma con larghe ectasie vascolari, che talora conferiscono al derma stesso un aspetto quasi angiomatico. Di poi si inizia una larga ipercheratosi, con precoce tendenza dell'epitelio ad approfondirsi nel connettivo; non è raro osservare vere perle epiteliali per così dire *solitarie*, scaglionate nel derma, prima che occorranno segni di vera formazione papillomatosa o verrucosa. Questa ultima pare anzi essere meno costante che nel comune cancro da cutrame; sembrando nel nostro caso aversi talora in certa guisa una cancerizzazione *d'embrée*, che cioè non si impianta su formazioni papillomato-verrucose. In altri termini nella zona trattata, sempre di una certa ampiezza, l'epitelio ha tendenza precoce a vegetare per conto suo in profondità, in più punti ravvicinati, dimostrando l'*origine pluricentrica* del cancro, si sia o no avuto un largo sviluppo fibroepiteliale esteriorizzato; il che è espressione della precoce acquisizione della malignità per parte delle cellule epiteliali.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur une condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de Finsler soit un espace riemannien.* Nota di ST. GOLAB, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans l'espace de Finsler ⁽²⁾ à deux dimensions, fondé sur la fonction

$$(1) \quad F(x_1, x_2; p_1, p_2),$$

F étant positive et positivement homogène de degré 1 par rapport aux variables p_1, p_2 , l'aire d'un domaine (D) de points (x_1, x_2) ne peut pas être en général déterminée d'une façon indépendante du choix d'une congruence $\bar{p}_i = p_i(x_1, x_2)$ des courbes dans (D) .

En opposition de M. Landsberg ⁽³⁾ qui définit l'aire du domaine (D) comme un invariant intégral du deuxième ordre par rapport à la fonction-base F , j'ai proposé de la définir comme un invariant du premier ordre notamment ⁽⁴⁾

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) P. FINSLER, *Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*. «Dissertation», Göttingen, 1918.

(3) G. LANDSBERG, *Ueber die Krümmung in der Variationsrechnung*. «Math. Annalen», 65 (1908), 313-349.

(4) ST. GOLAB, *Sur la mesure d'aires dans les espaces de Finsler*. «C. R.», 200 (1935), 197-199.

$$(2) \quad \bar{\Omega} = \iint_{(D)} F [x_1, x_2 ; -F_2 (x_1, x_2 ; p_1 (x_1, x_2), p_2 (x_1, x_2)), \\ F_1 (x_1, x_2 ; p_1 (x_1, x_2), p_2 (x_1, x_2))] dx_1 dx_2$$

où nous avons posé

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \left(F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} \text{ etc.} \right).$$

On démontre par un calcul facile, que dans le cas spécial, où notre espace est un espace riemannien c.-à-d. où la fonction F prend la forme

$$(3) \quad F = \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} (x_1, x_2) p_i p_k},$$

la formule (2) se réduit à la formule classique

$$(4) \quad \bar{\Omega} = \iint_{(D)} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} dx_1 dx_2$$

et dans ce cas là $\bar{\Omega}$ ne dépend pas du choix de la congruence $p_i = p_i(x_1, x_2)$.

Il se pose la question si les espaces riemanniens sont les seuls espaces de Finsler, pour lesquels la valeur $\bar{\Omega}$ définie par (2) résulte indépendamment du choix de la congruence mentionnée. Or le but de la Note présente est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. — Si la fonction F possède des dérivées partielles du troisième ordre par rapport aux variables p_1, p_2 et si $\bar{\Omega}$ défini par la formule (2), ne dépend pas de la congruence

$$(5) \quad p_i = p_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2),$$

alors la fonction F est de la forme (3) c.-à-d. l'espace est riemannien.

Démonstration. Le choix de la congruence (5) étant arbitraire, on déduit des suppositions du théorème que pour chaque point (x_1, x_2) du domaine (D) subsiste l'identité par rapport à p_1, p_2 :

$$F [x_1, x_2 ; -F_2 (x_1, x_2 ; p_1, p_2), F_1 (x_1, x_2 ; p_1, p_2)] \equiv C(\text{onstans}) > 0.$$

Comme dans la suite le point (x_1, x_2) sera envisagé comme fixe nous omettrons les signes (x_1, x_2) . En différentiant l'identité

$$(6) \quad F [-F_2 (p_1, p_2), F_1 (p_1, p_2)] = C$$

nous obtenons d'après les relations bien connues

$$\frac{F_{11}}{p_1^2} = -\frac{F_{12}}{p_1 p_2} = \frac{F_{22}}{p_2^2}$$

l'équation

$$(7) \quad p_1 F_1(-F_2, F_1) + p_2 F_2(-F_2, F_1) = 0.$$

L'identité (6) ainsi que la relation eulerienne nous donnent d'après une substitution convenable

$$(8) \quad -F_2 \cdot F_1(-F_2, F_1) + F_1 \cdot F_2(-F_2, F_1) = C^{(1)}.$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$(9) \quad \begin{cases} F_1(-F_2, F_1) = -\frac{C f_2}{F} \\ F_2(-F_2, F_1) = \frac{C p_1}{F} \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(10) \quad H = H(p_1, p_2) = \frac{1}{2} F^2(p_1, p_2).$$

Remarquons que la fonction H possède des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre. En tenant compte de relations

$$H_i = F F_i$$

nous obtenons

$$(11) \quad H(-H_2, H_1) = C^2 H$$

et les relations (9) et (10) nous conduisent aux équations

$$(12) \quad \begin{cases} H_1(-H_2, H_1) = -C^2 p_2 \\ H_2(-H_2, H_1) = C^2 p_1 \end{cases}$$

Désignons maintenant

$$(13) \quad h_{ik} = H_{ik}(-H_2, H_1) \quad (i, k = 1, 2).$$

En différentiant les équations (12) une fois par rapport au p_1 et une deuxième fois par rapport au p_2 nous obtenons le groupe suivant des équations

$$(14) \quad \begin{cases} -h_{11} H_{12} + h_{12} H_{11} = 0 \\ -h_{11} H_{22} + h_{12} H_{12} = -C^2 \\ -h_{12} H_{12} + h_{22} H_{11} = C^2 \\ -h_{12} H_{22} + h_{22} H_{12} = 0 \end{cases}$$

(1) Nous posons pour la brièveté $F_i = F_i(p_1, p_2)$ etc.

Les simples opérations algébriques appliquées aux équations (14) nous conduisent à

$$(15) \quad h_{ik} = H_{ik} \quad (i, k = 1, 2)$$

et par conséquent à

$$(16) \quad H_{11} H_{22} - H_{12}^2 = C^2 > 0.$$

De là nous obtenons (par la dérivation partielle par rapport au p_2):

$$(17) \quad H_{22} H_{112} + H_{11} H_{222} - 2 H_{12} H_{122} = 0.$$

H_{ik} étant homogènes de degré 0 par rapport aux variables p_1, p_2 , elles satisfont aux équations suivantes

$$(18) \quad \begin{cases} p_1 H_{111} + p_2 H_{112} = 0 \\ p_1 H_{112} + p_2 H_{122} = 0 \\ p_1 H_{122} + p_2 H_{222} = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant $p_2 \neq 0$ (ce qu'on peut faire sans restreindre la généralité, car au cas contraire on a $p_1 \neq 0$ et le raisonnement est tout à fait analogue). Nous avons selon (18)

$$(19) \quad H_{112} = \sigma H_{111}, \quad H_{122} = \sigma^2 H_{111}, \quad H_{222} = \sigma^3 H_{111} \quad \left(\sigma = -\frac{p_1}{p_2} \right),$$

ce que confronté avec (17) donne

$$\sigma H_{111} \{ H_{11} \sigma^2 - 2 H_{12} \sigma + H_{22} \} = 0.$$

La somme dans la parenthèse est d'après (16) différente de zéro, donc

$$(20) \quad p_1 \cdot H_{111} = 0.$$

Si $H_{111} = 0$, on obtient de (19):

$$(21) \quad \boxed{H_{ikj} = 0 \quad \text{pour} \quad i, j, k = 1, 2}.$$

Si au contraire $p_1 = 0$, alors de (19) découlent les relations

$$(22) \quad H_{112} = H_{122} = H_{222} = 0.$$

D'autre part, différencions l'équation (16) par rapport à p_1 :

$$H_{22} H_{111} + H_{11} H_{122} - 2 H_{12} H_{112} = 0$$

et prenons en considération (22). Nous parvenons ainsi à la relation

$$H_{22} H_{111} = 0.$$

$H_{22} = 0$ est cependant exclu à cause de (16). Il nous reste donc

$$(23) \quad H_{111} = 0,$$

ce que avec (22) donne de nouveau (21):

Les relations (21) expriment finalement que H est un polynôme de degré 2 et comme H est en outre homogène il a nécessairement la forme

$$(24) \quad H = \frac{1}{2} \{ H_{11} p_1^2 + 2 H_{12} p_2 p_1 + H_{22} p_2^2 \},$$

H_{ik} étant des constantes. De là résulte (en vertu de (10)) que F possède la forme (3) ($g_{ik} = H_{ik}$) et ceci a lieu dans chaque point du domaine (D). Notre espace est donc forcément un espace riemannien.

Matematica. — *Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche* ⁽¹⁾. Nota I di B. MANIÀ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

1. Sia fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) e sieno (r, φ, ϑ) le coordinate sferiche associate a tale sistema, cioè legate alle coordinate (x, y, z) dalle relazioni

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Allora, se S è una sfera di raggio R col centro nell'origine delle coordinate e se $f(\varphi, \vartheta)$ è una funzione integrabile nel senso di Lebesgue sopra la sfera S , indicato con $P \equiv (r, \varphi, \vartheta)$ un punto interno ad S e con $Q \equiv (R, \varphi', \vartheta')$ un punto sopra S , l'integrale di Poisson

$$(1) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS,$$

dove si pone

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

rappresenta una funzione del punto P armonica nell'interno di S, la quale sotto condizioni molto generali per la funzione $f(\varphi, \vartheta)$ risolve il problema di Dirichlet per l'interno della sfera S e per valori al contorno dati da $f(\varphi, \vartheta)$.

In particolare, se $f(\varphi, \vartheta)$ è continua, anche $U(P)$ è continua nell'interno di S frontiera compresa, e sopra S assume i valori dati da $f(\varphi, \vartheta)$; se $f(\varphi, \vartheta)$ è limitata e continua sopra S eccettuate al più delle linee regolari in numero finito, la funzione $U(P)$ al tendere di P a un punto Q di S tende al valore di $f(\varphi, \vartheta)$ in questo punto se Q non appartiene a nessuna linea di discontinuità di $f(\varphi, \vartheta)$ ⁽¹⁾.

Analogamente, se P è un punto variabile nella regione esterna alla sfera S, l'integrale

$$(2) \quad V(P) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 - R^2}{(R^2 - 2Rr \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS$$

risolve il problema di Dirichlet per questa regione e per valori al contorno dati da $f(\varphi, \vartheta)$ sotto le stesse condizioni per $f(\varphi, \vartheta)$ a cui abbiamo accennato sopra.

Noi consideriamo ora un campo Γ compreso fra due sfere S ed S' aventi il centro nell'origine delle coordinate e raggi di lunghezza R ed R' rispettivamente, con $R > R'$, e risolveremo il problema di Dirichlet per un tale campo con la stessa generalità con la quale il problema di Dirichlet si risolve nel caso della sfera per mezzo dell'integrale di Poisson.

2. Indichiamo in questo numero con (r, φ, ϑ) le coordinate sferiche di un punto variabile nel campo Γ , con $(R, \varphi', \vartheta')$ le coordinate sferiche di un punto di S, e poniamo $q = R' : R$.

Allora si ha il seguente

TEOREMA I. — Se $f_1(\varphi, \vartheta)$ è una funzione integrabile nel senso di Lebesgue sopra la sfera S, le due serie

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R} \iint_S f_1(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{(R^2 - 2Rr q^{2k} \cos \gamma + r^2 q^{4k})^{3/2}} dS,$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R} \iint_S f_1(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{(r^2 q^{-2} - 2R' r q^{2k-1} \cos \gamma + R'^2 q^{4k})^{3/2}} dS,$$

sono uniformemente convergenti in ogni campo chiuso compreso fra S ed S' e non avente punti comuni con S; la serie

(1) Vedi O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, p. 240 e sgg.

$$(5) \quad U_1(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R} \iint_S f_1(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{(R^2 - 2Rr q^{2k} \cos \gamma + r^2 q^{4k})^{3/2}} dS - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R} \iint_S f_1(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{(r^2 q^{-2} - 2R' r q^{2k-1} \cos \gamma + R'^2 q^{4k})^{3/2}} dS$$

è una funzione armonica nel campo aperto compreso fra S ed S' , continua in ogni campo compreso fra S ed S' e senza punti comuni con S , identicamente nulla sopra S' , e per (r, φ, ϑ) tendente ad un punto di S si comporta come l'integrale di Poisson (1), nel senso che se tale integrale ha un limite anche $U_2(r, \varphi, \vartheta)$ ha lo stesso limite e viceversa.

Sia A un campo chiuso compreso fra le due sfere S ed S' e non avente punti comuni con S . Indichiamo con $\rho < R$ il raggio di una sfera col centro nell'origine delle coordinate contenute nel suo interno il campo A . Allora, per ogni punto (r, φ, ϑ) di A e per ogni k , è

$$(6) \quad \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{(R^2 - 2Rr q^{2k} \cos \gamma + r^2 q^{4k})^{3/2}} < \frac{R^2}{(R - \rho q^{2k})^3} < \frac{R^2}{(R - \rho)^3}$$

e

$$(7) \quad \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{(r^2 q^{-2} - 2R' r q^{2k-1} \cos \gamma + R'^2 q^{4k})^{3/2}} < \frac{R^2 q^{-2}}{R'^3 (q^{-1} - 1)^3};$$

quindi, posto

$$M_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{(R - \rho)^3} \iint_S |f_1(\varphi', \vartheta')| dS,$$

e

$$M_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{R q^{-2}}{R'^3 (q^{-1} - 1)^3} \iint_S |f_1(\varphi', \vartheta')| dS,$$

la serie (3) è maggiorata dalla serie

$$M_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots)$$

e la serie (4) è maggiorata dalla serie

$$M_2 (1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots).$$

Con questo, essendo $0 < q < 1$, è dimostrata la convergenza uniforme delle serie (3) e (4) nel campo A , e quindi in tale campo $U_1(r, \varphi, \vartheta)$ risulta una funzione continua.

Si vede poi che è $U_1(R', \varphi', \vartheta') \equiv 0$, poichè ponendo nei due membri della (5) $r = R'$, e sommando termine a termine le due serie del secondo membro si ottiene una serie a termini tutti nulli.

Per dimostrare che $U_1(r, \varphi, \vartheta)$ è armonica nell'interno Γ , basta dimostrare che i singoli termini delle serie (3) e (4) sono funzioni armoniche nell'interno di Γ .

Ora, ricordando che l'integrale (1) è una funzione armonica nell'interno della sfera di raggio R col centro nell'origine e che un'omotetia eseguita sopra le variabili (x, y, z) trasforma una funzione armonica in una funzione armonica, si vede che il termine k -esimo delle serie (3) è una funzione armonica nell'interno della sfera col centro nell'origine e di raggio Rq^{-2k} . Analogamente, poichè l'integrale (2) rappresenta una funzione armonica esternamente alla sfera di raggio R col centro nell'origine, il termine k -esimo della serie (4) rappresenta una funzione armonica nella regione esterna alla sfera col centro nell'origine e di raggio $R'q^{2k+1}$.

Dunque $U_1(r, \varphi, \vartheta)$ è una funzione armonica nell'interno di Γ , e non resta che da studiarne il comportamento al tendere di (r, φ, ϑ) a un punto di S .

A questo scopo osserviamo che la serie (4) è convergente uniformemente in tutto Γ , frontiera compresa, per la (7), e così pure la serie (3) dalla quale si sopprime il termine dato da $k=0$ è uniformemente convergente in tutto Γ , frontiera compresa, per la (6). Ne segue che in tutto Γ , frontiera compresa, la differenza

$$(8) \quad \bar{U}_1(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R} \iint_S f(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{(R^2 - 2Rr q^{2k} \cos \gamma + r^2 q^{4k})^{3/2}} dS - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4\pi R'} \iint_S f(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{(r^2 q^{-2} - 2R'r q^{2k-1} \cos \gamma + R'^2 q^{4k})^{3/2}} dS$$

è una funzione continua di (r, φ, ϑ) . Di più è $\bar{U}_1(R, \varphi, \vartheta) \equiv 0$, come si vede sommando termine a termine ⁽¹⁾ le due serie della (8); e poichè

$$U_1(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS + \bar{U}_1(r, \varphi, \vartheta),$$

risulta dimostrato completamente il teorema.

3. Conservando le notazioni del numero precedente si dimostra in modo analogo il seguente

TEOREMA II. — Se $f_2(\varphi, \vartheta)$ è una funzione integrabile nel senso di Lebesgue sopra S' , le due serie

(1) Al termine di indice k della seconda serie corrisponde il termine di indice $k+1$ della prima.

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 - R'^2 q^{4k}}{(R'^2 q^{4k} - 2 R' r q^{2k} \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS',$$

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2 q^{4k+2}}{(R^2 - 2 R r q^{2k+1} \cos \gamma + r^2 q^{4k+2})^{3/2}} dS'$$

sono uniformemente convergenti in ogni campo chiuso compreso fra S ed S' e senza punti comuni con S' ; la loro differenza

$$(11) \quad U_2(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 - R'^2 q^{4k}}{(R'^2 q^{4k} - 2 R' r q^{2k} \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS' - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2 q^{4k+2}}{(R^2 - 2 R r q^{2k+1} \cos \gamma + r^2 q^{4k+2})^{3/2}} dS'$$

è una funzione armonica nell'interno di Γ , continua in ogni campo compreso fra S ed S' e senza punti comuni con S' , identicamente nulla sopra S , e al tendere di (r, φ, ϑ) a un punto di S' si comporta come l'integrale di Poisson

$$\frac{1}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 - R'^2}{(R'^2 - 2 R' r \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS',$$

nel senso che se questo integrale tende a un limite anche $U_2(r, \varphi, \vartheta)$ tende allo stesso limite e viceversa.

La dimostrazione è uguale a quella del numero precedente, soltanto che ora sopra la sfera S si debbono sottrarre i termini delle serie (9) e (10) aventi lo stesso indice, e, invece, sopra la sfera S' si deve sottrarre dal termine di indice k delle serie (9) il termine di indice $k - 1$ della (10).

4. Dai teoremi dimostrati e da quanto abbiamo ricordato al n. 1 circa il problema di Dirichlet per la sfera, segue il

TEOREMA III. — Nelle ipotesi dei teoremi precedenti, la funzione

$$U(r, \varphi, \vartheta) = U_1(r, \varphi, \vartheta) + U_2(r, \varphi, \vartheta)$$

è armonica nell'interno del campo Γ compreso fra le due sfere S ed S' ; al tendere di (r, φ, ϑ) un punto di S si comporta come l'integrale

$$\frac{1}{4 \pi R} \iint_S f_1(\varphi', \vartheta') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2 R r \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS;$$

al tendere di (r, φ, ϑ) un punto di S' si comporta come l'integrale

$$\frac{1}{4 \pi R'} \iint_{S'} f_2(\varphi', \vartheta') \frac{r^2 - R'^2}{(R'^2 - 2 R' r \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS';$$

e quindi risolve il problema di Dirichlet per il campo Γ e per valori al contorno dati da $f_1(\varphi, \vartheta)$ ed $f_2(\varphi, \vartheta)$ con la stessa generalità con la quale il problema è risolto nel caso della sfera per mezzo dell'integrale di Poisson.

5. OSSERVAZIONE. — Come l'integrale di Poisson così anche le formule da noi stabilite ai numeri 2, 3 e 4 si estendono agli iperspazi a un numero finito p di dimensioni con $p > 3$, purchè nelle serie che ivi compaiono si sostituisca q con q^{p-2} .

Nel caso piano ($p = 2$) le dimostrazioni precedenti non si possono ripetere tali e quali, ma le conclusioni sono ancora vere, come indicherejmo in una seconda Nota.

Matematica. — *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica* ⁽¹⁾. Nota di M. SALVADORI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Nella presente Nota mi permetto di comunicare i risultati ai quali sono pervenuto nello studio del problema di calcolo delle variazioni consistente nella ricerca degli estremi per l'integrale doppio:

$$(I) \quad F[\zeta] = \iint_R f\left(x, y, \zeta(x, y), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right) dx dy,$$

ove: R è il dominio rettangolare di punti estremi inferiore (x_1, y_1) e superiore (x_2, y_2) del piano (x, y) ; $f(x, y, \zeta(x, y), \zeta'(x, y))$ è una funzione finita e continua colle sue derivate parziali del 4° ordine al variare del punto (x, y) in R e di ζ in un certo intervallo $(-N, N)$ e al variare comunque di ζ' ; ζ è una funzione che si mantiene nell'aggregato Γ' delle funzioni continue in R con le loro derivate parziali del primo ordine e con la derivata totale del primo ordine $\zeta' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}$, e soddisfacenti (le funzioni)

alla condizione di avere valori tutti compresi nell'intervallo $(-N, N)$ e di assumere sul contorno di R i valori di una prescritta funzione $g(x, y)$ appartenente pur essa a Γ' . Denoteremo con Γ'_g l'aggregato in cui varia ζ , con Γ'_0 l'aggregato delle funzioni di Γ' identicamente nulle sul contorno di R , con Γ''_0 l'aggregato di tutte le funzioni di Γ' la cui derivata totale del primo ordine è pur essa di Γ' , con Γ''_0 l'aggregato delle funzioni di Γ'' identicamente nulle sul contorno R .

Per abbreviare, con l'apposizione di un apice denoteremo l'operazione di derivazione totale.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le applicazioni del calcolo.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

1. — ESISTENZA DI AUTOVALORI PER UNA PARTICOLARE EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 4° ORDINE.

Consideriamo l'equazione lineare alle derivate parziali del 4° ordine nel rettangolo R:

$$(2) \quad [a(x, y) u'(x, y) + \lambda b(x, y) u(x, y)]' + \\ + \lambda [b(x, y) u'(x, y) + c(x, y) u(x, y)] = 0,$$

ove i coefficienti a e b sono di classe Γ' in R, c è ivi continua, $a(x, y)$ ivi positiva e la funzione incognita $u(x, y)$ di classe Γ'' .

Ebbene si perviene al seguente risultato:

L'equazione (2) ammette, nel parametro λ , un autovalore positivo λ_+ se non è vuota la classe delle funzioni di Γ'' soddisfacenti la condizione.

$$\iint_R [2b(x, y) \varphi(x, y) \varphi'(x, y) + c(x, y) \varphi^2(x, y)] dx dy < 0,$$

ammette un autovalore negativo λ_- se non è vuota la classe delle funzioni di Γ'' soddisfacenti la condizione:

$$\iint_R [2b(x, y) \varphi(x, y) \varphi'(x, y) + c(x, y) \varphi^2(x, y)] dx dy > 0;$$

a ciascuno di questi autovalori corrisponde una soluzione della (2) non identicamente nulla appartenente a Γ'' .

2. — TEOREMA DI EULERO. Se la funzione $\bar{z} = z_0(x, y)$ della totalità Γ'_g , di modulo sempre minore di N, fornisce un estremo per il funzionale $F[\bar{z}]$, essa è tale che la funzione $f(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y))$ riesce dotata di derivata totale del primo ordine, risultando:

$$[f_{\bar{z}'}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y))] + f_{\bar{z}}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y)) = 0.$$

3. — CONDIZIONE DI LEGENDRE. Se $\bar{z}_0(x, y)$ è una funzione di Γ'_g di modulo minore di N, minimizzante $F[\bar{z}]$ nel campo Γ'_g , deve risultare ovunque in R:

$$f_{\bar{z}'\bar{z}'}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y)) \geq 0.$$

4. — CONDIZIONE DI JACOBI. Posto:

$$f_{\bar{z}'\bar{z}'}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y)) = a(x, y); \quad f_{\bar{z}\bar{z}'}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y)) = b(x, y) \\ f_{\bar{z}\bar{z}}(x, y, \bar{z}_0(x, y), \bar{z}'_0(x, y)) = c(x, y),$$

ogniqualevolta è soddisfatta in senso stretto la condizione di Legendre, condizione necessaria affinché l'estremale $z_0(x, y)$ della classe Γ'_g fornisca un minimo per il funzionale $F[\gamma]$ è che l'equazione alle derivate parziali (2), con la condizione $u(x, y)$ appartenente a Γ''_0 , non abbia autovalore positivo oppure, ove esista tale autovalore, esso non sia inferiore a 1.

5. — MINIMO DEBOLE. Se $z_0(x, y)$ è un'estremale di classe Γ''_g , di modulo minore di N, e soddisfa in senso stretto e la condizione di Legendre e la condizione di Jacobi, essa fornisce il minimo debole del funzionale $F[\gamma]$ nella totalità Γ'_g .

6. — CONDIZIONE DI WEIERSTRASS. Posto:

$$E(x, y, z(x, y), \alpha, \beta) = f(x, y, z(x, y), \beta) - f(x, y, z(x, y), \alpha) - (\beta - \alpha) f_\alpha(x, y, z(x, y), \alpha),$$

condizione necessaria perchè un'estremale $z_0(x, y)$, di modulo minore di N, fornisca un minimo forte nella totalità Γ'_g , è che riesca:

$$E(x, y, z_0(x, y), z'_0(x, y) + \beta) \geq 0$$

per qualsivoglia valore di β .

La funzione di Weierstrass consente, come già promettono ricerche in corso nell'indirizzo di E. E. Levi, l'ottenimento di criteri sufficienti di minimo forte.

Matematica. — *Remarques sur un critère de normalité de M. Minetti.* Nota di G. VALIRON, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Dans une Note récente ⁽²⁾, M. Silvio Minetti donne un nouveau critère de normalité basé sur la considération de ce qu'il appelle les valeurs exceptionnelles locales. En se plaçant à son point de vue, c'est-à-dire en bornant inférieurement l'écart entre les valeurs en un point et un nombre, on peut compléter ses résultats de la manière suivante. Montrons d'abord que

I. Si $Z = F(\zeta) = X + iY$ est une fonction holomorphe de ζ pour $|\zeta| < 1$, si $X < A$, $A > 0$, pour $|\zeta| < 1$ et si $|F(0)| = |Z_0| = |X_0 + iY_0| \geq mA$, $m > 0$; les valeurs Z ne pénètrent pas dans le cercle

$$|Z| < \frac{1}{2} Am \varepsilon$$

quel que soit $0 < \varepsilon < 1$, pourvu que

$$|\zeta| < (1 - \varepsilon) \frac{m}{m + 2}.$$

En effet, le lemme de Schwarz a fourni à M. Carathéodory l'égalité

$$\frac{Z - Z_0}{2A - Z - Z_0 + 2iY_0} = \zeta b(\zeta) \quad , \quad |b(\zeta)| \leq 1,$$

qui s'écrit aussi

$$Z[1 + \zeta b(\zeta)] = Z_0 + \zeta b(\zeta)[2A - X_0 + iY_0],$$

et, puisque,

$$|2A - X_0 + iY_0| \leq 2A + |Z_0| \leq (2 + m) \frac{|Z_0|}{m},$$

donne

$$|Z| > \frac{Am}{2} \left[1 - |\zeta| \frac{2 + m}{m} \right]$$

ce qui conduit au résultat. D'ailleurs, si $Z_0 = -mA$, $b(\zeta) = 1$, Z s'annule pour $\zeta = m/(m + 2)$.

De I et de cette remarque, on déduit que.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) « Comptes Rendus Académie des Sciences », Paris, to. 200, 1935, p. 290 séance du 7 janvier 1935.

II. La famille des fonctions $f(z)$ holomorphes pour $|z| \leq 1$ est normale à l'intérieur du cercle $|z| < \frac{m}{m+2}$, où m est un nombre donné positif, pourvu qu'il existe un nombre complexe ou réel a tel que, pour toute $f(z)$

$$|f(0) - a| \geq mA(f),$$

$A(f)$ étant le maximum de la partie réelle, $\Re f(z)$, de $f(z)$ pour $|z| \leq 1$, $m/(m+2)$ est le rayon de normalité de la famille à l'origine: la famille n'est plus normale dans un cercle de centre origine et de rayon supérieur à $m/(m+2)$.

Car, si grand que soit $B > |a|$, la sous-famille pour laquelle $A(f) \leq |a| + B$ est normale pour $|z| < 1$ (Montel). Pour la sous-famille telle que $A(f) > |a| + B$, on a $A(f) - |a| \leq A(f-a) \leq A(f) + |a|$, donc

$$|f(0) - a| \geq mA(f) \geq m[A(f-a) - |a|] > mA(f-a) \left(1 - \frac{|a|}{B}\right).$$

D'après la proposition I, les valeurs de $f(z) - a$ ne pénètrent pas dans le cercle

$$|Z| < \frac{1}{2} A(f-a) m \varepsilon \left(1 - \frac{|a|}{B}\right)$$

et *a fortiori* dans le cercle fixe

$$|Z| < \frac{1}{2} m (B - |a|) \varepsilon,$$

pourvu que

$$|z| < \frac{m}{m+2} \frac{B}{B - |a|} (1 - \varepsilon).$$

Comme ε est arbitrairement petit et B arbitrairement grand, cette sous-famille est aussi normale dans le cercle de l'énoncé (Montel). D'autre part, en prenant c réel entre 0 et 1 et $a = 0$, les fonctions

$$\frac{-m + (m+2)c\chi}{1 + c\chi} A$$

appartiennent à la famille si grand que soit $A > 0$ et si voisin que c soit de 1, ce qui établit la seconde partie de l'énoncé pour $a = 0$ et par suite quel que soit a puisque a ne joue aucun rôle lorsque $A(f)$ croît indéfiniment.

En utilisant le théorème de M. Montel d'après lequel une famille normale en chaque point d'un domaine est normale dans ce domaine, on généralise un peu le théorème de M. Minetti:

III. Si les fonctions $f(z)$ sont holomorphes dans un domaine D et si à chaque point z_0 intérieur à D correspondent un nombre positif $m(z_0)$, un nombre réel ou complexe $a(z_0)$ et un cercle $C(z_0)$ de centre z_0 appartenant à D tels que, $A(z_0, f)$ étant le maximum de la partie réelle de $f(z)$ dans $C(z_0)$, on a, pour tout fonction de la famille

$$(1) \quad |f(z_0) - a(z_0)| \geq m(z_0) A(z_0, f),$$

la famille est normale dans D .

Dans le même ordre d'idées, on obtient un critère de quasi-normalité:

IV. Si les fonctions $f(z)$ sont holomorphes lorsque z appartient à D , si dans D , $\Re f(z) < A(f)$ et s'il existe un point z_0 de D , un nombre positif m et un nombre complexe a tels que, pour toute fonction de la famille, on ait

$$(2) \quad |f(z_0) - a| \geq m A(f),$$

la famille est quasi-normale à l'intérieur de D (c'est-à-dire dans tout domaine complètement intérieur à D).

Car, d'après la transformation de M. Carathéodory, les fonctions

$$\frac{f(z)}{A(f) + |f(z_0)|}, \quad A(f) > 1,$$

sont bornées dans leur ensemble dans tout domaine complètement intérieur à D et y forment une famille normale n'admettant pas la constante 0 comme fonction limite.

2. Les propositions III et IV n'offrent d'intérêt nouveau que si $A(z_0, f)$ et $A(f)$ n'y sont pas bornés. Elles montrent qu'une certaine régularité dans la convergence vers l'infini entraîne la convergence uniforme. Il n'est donc pas inutile d'établir que.

V. Dans les énoncés III et IV, les conditions (1) et (2) ne peuvent pas être remplacées par d'autres de même forme où $m(z_0)$ et m seraient des fonctions de $A(z_0, f)$ et $A(f)$ respectivement, tendant vers 0 aussi lentement que l'on voudrait lorsque $A(z_0, f)$ et $A(f)$ tendraient vers l'infini.

Considérons d'abord, dans le cercle $|z| < 1$, les fonctions

$$F_n(z) = \prod_{p=1}^n \frac{(n+1)z + p}{(n+1) + pz}, \quad n = 1, 2, \dots$$

dont le module et le maximum de la partie réelle sont égaux à 1 pour $|z| = 1$. On a

$$|F_n(0)| = \frac{n!}{(n+1)^n} > e^{-n}$$

et, pour $\chi = x$ réel positif, $F_n(x) > F_n(0)$. Donc, si $w = \psi(v) > v^2$ est une fonction réelle indéfiniment croissante avec v , à croissance aussi rapide que l'on veut, les fonctions

$$f_n(\chi) = \psi(e^n) F_n(\chi)$$

vérifient les conditions

$$A(f_n) = \psi(e^n), \quad f_n(0) = e^{-n} \psi(e^n) = \frac{A(f_n)}{\theta[A(f_n)]},$$

où $\theta(w)$, fonction inverse de $\psi(v)$ est à croissance aussi lente que l'on veut. D'autre part $f_n(x)$, x réel positif, croît indéfiniment avec n , tandis que $f_n\left(-\frac{p}{q}\right)$ où p/q est une fraction irréductible comprise entre 0 et 1, est nul pour tous les n multiples de q . La suite $f_n(\chi)$ n'est pas quasi-normale dans le cercle de rayon 1, ce qui justifie notre assertion en ce qui concerne la proposition IV.

Prenons maintenant les fonctions

$$f_n(\chi) = \psi(n)(1 + n\chi), \quad n = 1, 2, \dots$$

où $\psi(n) > n^2$ croît indéfiniment avec n aussi rapidement que l'on veut. Cette suite n'est pas normale pour $|\chi| < 1$. On a

$$A(f_n) = \psi(n)(1 + n).$$

Si $\chi = x + iy$; pour $x \geq 0$

$$|f_n(\chi)| \geq \psi(n);$$

tandis que, pour $x < 0$,

$$\left| f_n(\chi) + i\eta\psi\left(\frac{2}{|x|}\right) \right| \geq \psi(n)$$

η désignant 1 si $y \geq 0$ et -1 si $y < 0$ (car la partie réelle est inférieure à $-\psi(n)$ si $n \geq \frac{2}{|x|}$ et le coefficient de i a sa valeur absolue supérieure ou égale à $\psi\left(\frac{2}{|x|}\right)$, donc supérieure ou égale à $\psi(n)$ si $n < \frac{2}{|x|}$).

La proposition V est ainsi complètement établie.

Matematica. — *Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche.* Nota II di B. MANIÀ, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Algebra). — *Sulle matrici permutabili.* Nota di M. TOGNETTI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Nel lavoro: *Über vertauschbare Matrizen*⁽²⁾ del 1896, Frobenius, osservato che se più matrici $A, B, C, \dots$ sono funzioni razionali-intere di una stessa matrice R sono a due a due permutabili, considera la proposizione inversa e dice di non aver potuto decidere se essa sia vera o no, neanche nel caso di due sole matrici A e B .

Nel 1919, H. B. Phillips⁽³⁾ mostrò che due certe matrici permutabili già considerate da Frobenius non possono essere f. r. i. di una stessa matrice R .

Restava così provato che la proposizione inversa di quella considerata da Frobenius non è vera.

Studiando le omografie iperspaziali permutabili con una data, ho avuto occasione di osservare che, se la proposizione diretta considerata da Frobenius si pone nella seguente forma più generale, allora è suscettibile di essere invertita:

Se $C_1, C_2, \dots, C_k$ sono matrici di ciascuna delle quali una data matrice A risulti la stessa⁽⁴⁾ (per quanto ciò non sia necessario) funzione razionale intera

$$A \equiv \varphi(C_1) = \varphi(C_2) \equiv \dots \equiv \varphi(C_k),$$

ogni matrice B della forma

$$B \equiv f_1(C_1) + f_2(C_2) + \dots + f_k(C_k)$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_k$ indicano polinomi arbitrari, è permutabile con A . E questa proposizione generalizza la proposizione diretta considerata da Frobenius, poichè quando nell'espressione di B vi figuri una sola delle matrici $C_1, C_2, \dots, C_k$, p. es. C_1 , A e B risultano ambedue f. r. i. di C_1 .

Orbene, della precedente proposizione sussiste, come ho detto, l'inversa, si ha cioè il seguente teorema:

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) «Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin», 1896, XXVI, pp. 601-614.

(3) *Functions of Matrices* [«American Journal of Mathematics», vol. XLI, number 4, october, 1919, p. 275].

(4) Sicchè le $C_1, C_2, \dots, C_k$ sono soluzioni dell'equazione $\varphi(X) \equiv A$.

Se A e B sono matrici di ordine n permutabili: $AB \equiv BA$, è possibile trovare un certo numero k di matrici dello stesso ordine

$$C_1, C_2, \dots, C_k$$

talí che una delle date, p. es. A , risulta la stessa funzione razionale intera di ciascuna di esse

$$A \equiv \varphi(C_1) \equiv \varphi(C_2) \equiv \dots \equiv \varphi(C_k)$$

e l'altra può ottenersi come somma

$$(I) \quad B \equiv f_1(C_1) + f_2(C_2) + \dots + f_k(C_k)$$

di opportune funzioni razionali intere delle $C_1, C_2, \dots, C_k$ medesime; di più: le $C_1, C_2, \dots, C_k$ sono matrici equivalenti e ciascuna gode della proprietà che ogni sua radice caratteristica ha un solo divisore elementare.

Ogni altra matrice M permutabile con A può ottenersi come la B con le stesse $C_1, C_2, \dots, C_k$; sicchè il gruppo G delle matrici permutabili con A può generarsi tutto mediante la (I) al variare delle $f_1, f_2, \dots, f_k$.

L'ultima parte del teorema dà il modo di costruire il gruppo G per mezzo di un numero finito di matrici fondamentali e delle loro f. r. i.

Peraltro, si hanno anche altri modi⁽¹⁾ di comporre il gruppo G , ma quello considerato si presenta, mi pare, come il più semplice ed espressivo.

Vari sono gli autori che, sotto forme diverse, di proposito⁽²⁾ o incidentalmente⁽³⁾, si sono occupati delle matrici permutabili con una data; però, per quanto mi consta, il teorema di cui è oggetto la presente Nota non era sinora conosciuto.

L'estensione al caso di più matrici è immediata: tutte le $B, C, \dots$ (p. es.) si esprimono per le $C_1, C_2, \dots, C_k$ relative ad A mediante la (I).

I. Sia A una qualunque omografia, di uno spazio lineare S_{n-1} , di caratteristica:

$$\left[(h' - 1, h'_1 - 1, \dots, h'_{p_1} - 1) (h'' - 1, h''_1 - 1, \dots, h''_{p_2} - 1) \dots \right. \\ \left. \dots (h^{(m)} - 1, h^{(m)}_1 - 1, \dots, h^{(m)}_{p_m} - 1) \right],$$

siano

$$S_{h' + h'_1 + \dots + h'_{p_1} - 1}, \quad S_{h'' + h''_1 + \dots + h''_{p_2} - 1}, \quad S_{h^{(m)} + h^{(m)}_1 + \dots + h^{(m)}_{p_m} - 1}$$

(1) Cfr., p. es., U. AMALDI, *Sulle sostituzioni lineari commutabili*. [*«Rendiconti Istituto Lombardo»*, ser. II, vol. XIV, 1912, p. 442]; T. TURRI, *L'ordine massimo di gruppi abeliani di omografie...* [*«idem»*, vol. LXII, fasc. XVI-XX, 1929, p. 946].

(2) SCHLESINGER, SCHUR, VOSS, DICKSON (L. E.), PINCHERLE, AMALDI, DEL PRETE, TURRI, KRAWTCHOUK....

(3) VOLTERRA, SFORZA, LANDSBERG, NICOLETTI, CECIONI....

gli spazi caratteristici e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ le relative radici caratteristiche, ponendo una delle ρ , p. es. ρ_1 , essere zero nel qual caso A è singolare e $S_{h' + h'_1 + \dots + h'_{p_1} - 1}$ è lo spazio caratteristico singolare (1).

Consideriamo uno qualunque degli spazi caratteristici di A , e, per non complicare le notazioni, diciamo $(h-1, h_1-1, \dots, h_{p-1}-1, h_p-1)$ la caratteristica della omografia che A vi subordina. È noto (2) che, presi in S_{h-1} h punti indipendenti

$$A_0, A_1, \dots, A_{h_p-1} | A_{h_p} \dots A_{h_{p-1}-1} | A_{h_{p-1}} \dots A_{h_{p-2}-1} | \dots \\ \dots | A_{h_2} \dots A_{h_1-1} | A_{h_1} \dots A_{h-1}$$

dei quali i primi h_p in S_{h_p-1} , i primi h_{p-1} in $S_{h_{p-1}-1}$, $\dots$ i primi h_1 in S_{h_1-1} , si possono condurre per questi punti ordinatamente h spazi uniti

$$(\alpha) \quad \alpha_p^{(0)} \alpha_p^{(1)} \dots \alpha_p^{(h_p-1)} | \alpha_{p-1}^{(h_p)} \dots \alpha_{p-1}^{(h_p-1-1)} | \alpha_{p-2}^{(h_p-1)} \dots \alpha_{p-2}^{(h_p-2-1)} | \dots \\ \dots | \alpha_1^{(h_2)} \dots \alpha_1^{(h_1-1)} | \alpha_0^{(h_1)} \dots \alpha_0^{(h-1)}$$

(di dimensioni uguali agli indici che vi figurano) in ognuno dei quali A subordina una omografia con quel solo punto unito o singolare, ed appartengono allo spazio ambiente.

Considerando i gruppi di punti caratteristici (3) delle omografie con un sol punto unito o singolare che A subordina negli spazi α , otteniamo un gruppo di punti che possiamo disporre nel quadro:

$$\alpha_p^{(0)} \alpha_p^{(1)} \dots \alpha_p^{(h_p-1)} \alpha_{p-1}^{(h_p)} \dots \alpha_{p-1}^{(h_p-1-1)} \alpha_{p-2}^{(h_p-1)} \dots \alpha_{p-2}^{(h_p-2-1)} \alpha_{p-1}^{(h_2)} \dots \alpha_{p-1}^{(h_1-1)} \alpha_0^{(h_1)} \dots \alpha_0^{(h-1)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_0, A_1, \dots, A_{h_p-1} & A_{h_p} & \dots & A_{h_{p-1}-1} & A_{h_{p-1}} & \dots & A_{h_2-1} & A_{h_2} & \dots & A_{h_1-1} & A_{h_1} & \dots & A_{h-1} \\ A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{h_p-1}^{(1)} & A_{h_p}^{(1)} & \dots & A_{h_{p-1}-1}^{(1)} & A_{h_{p-1}}^{(1)} & \dots & A_{h_2-1}^{(1)} & A_{h_2}^{(1)} & \dots & A_{h_1-1}^{(1)} & A_{h_1}^{(1)} & \dots & A_{h-1}^{(1)} \\ A_0^{(2)} A_1^{(2)} \dots A_{h_p-1}^{(2)} & A_{h_p}^{(2)} & \dots & A_{h_{p-1}-1}^{(2)} & A_{h_{p-1}}^{(2)} & \dots & A_{h_2-1}^{(2)} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ A_0^{(p)} A_1^{(p)} \dots A_{h_p-1}^{(p)} & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

(1) Cfr. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. 2° ed. [Principato, Messina, Cap. IV], oppure: PREDELLA, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*. [« Annali di Mat. », ser. II, to. XVII, 1, 1899-90].

(2) PREDELLA, loc. cit., § 8 (26) e, se l'omografia è singolare: TOGNETTI, *Sulle omografie singolari particolari*. [« Rend. Ist. Lomb. », ser. II, vol. LXVII, fasc. XI-XV, n. 1, p. 6].

(3) Se lo spazio caratteristico è singolare, vedi: TOGNETTI, loc. cit., sopra.

dove $A', A'', \dots A^{(m)}$ sono matrici diagonali del tipo (2): A' è il modulo dell'omografia che A subordina nello spazio caratteristico relativo alla radice ρ_1 , e così via.

Le precedenti considerazioni sono in sostanza quelle che si fanno nella teoria delle omografie per mostrare la possibilità di ridurre il modulo di una omografia a forma canonica ⁽¹⁾, ed era necessario di ripetere qui per il seguito.

2. Accanto all'omografia A consideriamo ora una qualunque delle omografie C che hanno per spazi caratteristici gli spazi α , per relativi punti caratteristici un gruppo di punti caratteristici di A che si trovano in quegli spazi, e per radici caratteristiche dei numeri arbitrari (differenti tra loro).

Ogni C è dunque un'omografia con spazi fondamentali di dimensione zero; e il suo modulo ridotto a forma canonica si ottiene da quello sopra ricordato di A sostituendo agli elementi che figurano sulla diagonale principale (cioè alle radici caratteristiche di A) dei numeri arbitrari soddisfacenti alla unica condizione che quelli relativi ad una stessa matrice parziale $C_i^{(v)}$ siano ancora uguali, ma quelli relativi a due differenti di tali matrici siano diversi.

Diciamo $C_i^{*(v)}$ le matrici parziali di C , ottenute dalle corrispondenti $C_i^{(v)}$ di A nel modo ora detto ⁽²⁾.

3. Consideriamo le f. r. i. di una C : per il modo com'è definita, ogni C ha, rispetto ad uno di quei sistemi di riferimento che riducono il modulo di A a forma canonica, come modulo, pure ridotto a forma canonica, una matrice che si ottiene da quella canonica di A sostituendo al posto delle $C_i^{(v)}$ le $C_i^{*(v)}$, sicchè le f. r. i. di ogni C , riferite a quel sistema di riferimento per cui la C ha modulo del tipo considerato, avranno il modulo formato da m matrici del tipo ⁽³⁾:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{c} f(C_0^{*(p+1)}) \\ f(C_0^{*(p+1)}) \cdot f(C_{h_1-1}^{*(2)}) \\ f(C_0^{*(p+1)}) \cdot f(C_{h_1-1}^{*(2)}) \cdot f(C_{h_1-1}^{*(1)}) \\ f(C_0^{*(p+1)}) \cdot f(C_{h_1-1}^{*(2)}) \cdot f(C_{h_1-1}^{*(1)}) \cdot f(C_{h-1}^{*(1)}) \end{array} \right|$$

dove

(1) Cfr. i lavori citati di BERTINI e PREDELLA e, se A è singolare, il mio lavoro pure citato.

(2) Ogni radice caratteristica di C ha dunque una sola catena relativa.

(3) Cfr. p. es.: CIPOLLA, *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra*. [«Rend. Cir. Mat. Palermo», vol. LVI, 1932, p. 3-4], oppure: TOGNETTI, *Sulle omografie iperspaziali che sono funzioni razionali di una data*. [«Atti Acc. Torino», vol. LXVII, 1932, p. 17].

$$f(C_i^{*(v)}) \equiv \begin{vmatrix} f(\rho_i^*) & f'(\rho_i^*) & \frac{1}{2!} f''(\rho_i^*) & \cdots & \frac{1}{(v-1)!} f^{(v-1)}(\rho_i^*) \\ 0 & f(\rho_i^*) & f'(\rho_i^*) & \cdots & \frac{1}{(v-2)!} f^{(v-2)}(\rho_i^*) \\ 0 & 0 & f(\rho_i^*) & \cdots & \frac{1}{(v-3)!} f^{(v-3)}(\rho_i^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f(\rho_i^*) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} i=0, 1, \dots, h-1 \\ v=p+1, p, \dots, 1 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo per f un polinomio, certamente esistente, di grado $\leq n-1$ (perchè, essendo l'equazione minima di C di grado n , ogni potenza di C di grado superiore ad $n-1$ è combinazione lineare delle precedenti) per il quale sia:

$$f(\rho_i^*) = \rho_i \quad , \quad f'(\rho_i^*) = 1 \quad , \quad f''(\rho_i^*) = f'''(\rho_i^*) = \cdots = f^{(v-1)}(\rho_i^*) = 0 \\ (i=0, 1, \dots, h-1)$$

relativamente al 1° spazio caratteristico di A ; e analogamente per tutti gli altri $m-1$, si vede che $f(C)$ coincide con il modulo ridotto a forma canonica di A , cioè A risulta f. r. i. di ogni C .

Concludiamo: *esistono infinite omografie con spazi fondamentali di dimensione zero di ognuna delle quali una data omografia A risulta funzione razionale intera.*

E si osservi inoltre che: *le C hanno la stessa caratteristica, perciò, scegliendo le stesse radici caratteristiche, le C risultano tutte proiettivamente identiche e la f risulta la stessa.*

4. Osserviamo ancora che:

1° Due qualunque C relative allo stesso gruppo di spazi α sono f. r. i. l'una dell'altra, come si scorge osservando che due siffatte C hanno, rispetto allo stesso sistema di riferimento, moduli del tipo di quelli considerati, pei quali si può ripetere quello che sopra s'è detto per A e per C .

Segue che tutte le C costruite a partire dallo stesso gruppo di spazi α sono contenute nelle omografie che si ottengono facendo le f. r. i. di una (qualunque) di esse.

2° Invece, due C costruite a partire da due distinti gruppi di spazi α sono diverse, e non risultano f. r. i. l'una dell'altra, perchè le f. r. i. di una omografia ne lasciano fissi gli spazi caratteristici⁽¹⁾.

Consideriamo ora tutte le f. r. i. di tutte le C : in forza della 1ª osservazione, esse possono ottenersi dalle C relative a gruppi di spazi α distinti

(1) Cfr. TOGNETTI, *Sulle omografie iperspaziali ecc.*, citato, n. 12, p. 23.

prendendo per tutte le stesse radici caratteristiche, cioè (n. 3) si possono ottenere facendo la stessa f. r. i. di omografie proiettivamente identiche.

Allora, tenendo conto che gli spazi α dipendono da $\Sigma h(h-1)$ (la somma essendo estesa a tutti gli h che figurano nella caratteristica di A) parametri⁽¹⁾, che le f. r. i. di una omografia con spazi fondamentali di dimensione zero formano un sistema lineare (gruppo abeliano) di dimensione $n-1$ ⁽²⁾, in forza della 2^a osservazione, si vede che tutte le f. r. i. di tutte le C dipendono da $\Sigma h(h-1) + n-1 = \Sigma h^2 - 1$ parametri e si distribuiscono in $\infty^{\Sigma h(h-1)}$ sistemi lineari distinti di dimensione $n-1$. E tutte queste omografie sono permutabili con A insieme alle loro matrici⁽³⁾.

5. D'altra parte è noto⁽⁴⁾ che le omografie permutabili con A, insieme alle loro matrici, formano un sistema lineare di dimensione $\Sigma h^2 - 1$, che possiamo rappresentare sui punti di uno spazio lineare $S_{\Sigma h^2 - 1}$. La totalità delle omografie sopra considerate sarà rappresentata da una varietà $V_{\Sigma h^2 - 1}$ di dimensione $\Sigma h^2 - 1$ appartenente a quello spazio e sarà formata da $\infty^{\Sigma h(h-1)}$ spazi lineari di dimensione $n-1$ passanti tutti per lo spazio $S_{\Sigma p_i + m - 1}$ (tra le f. r. i. di ogni C ci sono anche le f. r. i. di A) che rappresenta il sistema lineare delle omografie f. r. i. di A, spazio che ha dimensione $\Sigma p_i + m - 1$ perchè l'equazione minima di A è di grado $\Sigma p_i + m$.

Sicchè, potremo scegliere su $V_{\Sigma h^2 - 1}$ Σh^2 punti indipendenti di $S_{\Sigma h^2 - 1}$, ed ogni omografia B permutabile con A, insieme alle relative matrici, potrà pensarsi ottenuta come combinazione lineare omogenea di Σh^2 omografie linearmente indipendenti di $V_{\Sigma h^2 - 1}$:

$$B \equiv \lambda_{11} f_{11} (C_1) + \lambda_{12} f_{12} (C_1) + \dots + \lambda_{1i} t_i f_i (C_1) + \lambda_{21} f_{21} (C_2) + \dots + \lambda_{22} f_{22} (C_2) + \dots + \lambda_{k1} f_{k1} (C_k) + \lambda_{k2} f_{k2} (C_k) + \dots + \lambda_{kk} f_{kk} (C_k),$$

(1) Cfr. PREDELLA, loc. cit., § 8 (26).

(2) Perchè l'equazione minima di una tale omografia è di grado n , come risulta da un noto teorema di FROBENIUS-ROSATI.

(3) Se (A) e (B) sono due omografie permutabili e A e B due loro moduli riferiti allo stesso sistema di riferimento, si ha in generale $AB \equiv \epsilon BA$ [cfr. ROSATI, *Sulle corrispondenze permutabili...* (« Annali di Matematica », 1929), ma nel caso che (A) e (B) siano f. r. i. di una stessa omografia si ha $AB \equiv BA$ [cfr. TOGNETTI, *Sulle omografie iperspaziali...* nn. 1-4].

(4) Cfr. BERTINI, loc. cit., § 4, n. 20. Veramente risulta solo che sono tante le omografie non singolari, ma l'aggiunta delle singolari non aumenta la dimensione della totalità, bensì la completa. Se poi la data è singolare, vedi: TOGNETTI, *Sulle omografie singolari...* n. 4, dalla quale risulta che in questo caso si ha una totalità di dimensione Σh^2 , ma tale dimensione diminuisce di 1 se si considerano solo le omografie, permutabili con A insieme alle loro matrici, come mostrerò in un prossimo lavoro, dedicato alle omografie permutabili con una omografia singolare.

ma siccome una combinazione lineare omogenea di f. r. i. di una stessa omografia è ancora una f. r. i. della stessa, sarà:

$$B \equiv f_1(C_1) + f_2(C_2) + \dots + f_k(C_k)$$

e si ottiene il seguente teorema geometrico:

Se due omografie A e B sono permutabili, insieme alle loro matrici, è possibile trovare un certo numero k di omografie $C_1, C_2, \dots, C_k$ tali che una delle date, p. es. A, risulta la stessa funzione razionale intera di ciascuna di esse

$$A \equiv \varphi(C_1) \equiv \varphi(C_2) \equiv \dots \equiv \varphi(C_k)$$

e l'altra può ottenersi come somma

$$(4) \quad B \equiv f_1(C_1) + f_2(C_2) + \dots + f_k(C_k)$$

di opportune funzioni razionali intere delle $C_1, C_2, \dots, C_k$ medesime; di più: le $C_1, C_2, \dots, C_k$ sono proiettivamente identiche e ciascuna di esse ha spazi fondamentali di dimensione zero.

Ogni altra omografia M permutabile con A, insieme alle relative matrici, può ottenersi come la A con le stesse $C_1, C_2, \dots, C_k$; sicchè il gruppo G delle omografie permutabili con A, insieme alle loro matrici, può generarsi tutto mediante la (4) al variare delle $f_1, f_2, \dots, f_k$.

6. Ecco ora come dal precedente teorema geometrico si passa al teorema enunciato in principio.

Se A e B sono due matrici permutabili, saranno permutabili anche le omografie che hanno, rispetto ad uno stesso sistema di riferimento R, per moduli A e B. Il precedente teorema geometrico ci dice che, riferendo tutte le omografie che vi figurano ad uno stesso sistema di riferimento $\bar{R}$, che è precisamente uno qualunque di quelli che riducono A a forma canonica, le relazioni indicate dal teorema si verificano pei relativi moduli. Ma facendo quella trasformazione di coordinate occorrente per riferire di nuovo tutte le omografie al sistema R, si ritrovano le A e B, e le matrici delle $C_1, C_2, \dots, C_k$ riferite ad $\bar{R}$ si trasformano in altre, che sono quelle che figurano nello enunciato del teorema sotto forma algebrica. Se le due matrici A e B sono regolari, si sa⁽¹⁾ che esse sono f. r. i. di una stessa matrice.

Dalla dimostrazione del teorema discende la proprietà, pure nota⁽²⁾, che se una delle matrici A, B ha un solo divisore elementare per ogni radice caratteristica, l'altra è f. r. i. di questa.

(1) Cfr. ROSATI, *Sulle corrispondenze permutabili...* citato § II, n. 3, oppure: WEDDERBURN, *Lectures on Matrices* in « Colloquium Publications », vol. XVII, 1934, cap. II, 208, p. 27, Teorema 4.

(2) Cfr. CECIONI, *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici* [« Annali della Scuola N. Sup. di Pisa », 1909, cap. II, n. 16, p. 46], oppure: T. TURRI, *Sul sottogruppo commutativo...* [« Rend. Ist. Lomb. », vol. LXI, fasc. VI-X, 1928, p. 435].

Astronomia. — Orbita ellittica del Pianeta Maria Pia (1933 S. A.)⁽¹⁾. Nota di L. GIALANELLA, presentata⁽²⁾ dal Socio G. AR-MELLINI.

1. Il pianeta 1933 S. A. è stato scoperto fotograficamente all'*Observatoire Royal de Belgique* (Uccle) dall'astronomo E. Delporte la notte del 16 settembre 1933. Esso è stato osservato nei mesi successivi dal medesimo astro-nomo, il quale ha ricavato dai clichés presi con l'astrografo doppio Zeiss di 40 cm. le nove posizioni elencate nella seguente tabella I.

Il calcolo dell'orbita di questo Pianeta mi è stato consigliato dal pro-fessor G. Stracke dell'*Astronomisches Rechen-Institut* di Berlin-Dahlem; dietro mia domanda il prof. Delporte di Uccle mi ha gentilmente comunicato le nove posizioni della tabella I appositamente rimisurate con la più grande cura sulle lastre precedentemente ottenute.

A determinazione d'orbita eseguita, il Delporte mi ha permesso di as-segnare il nome al Pianeta, il quale finora è stato sempre designato prov-visoriamente con 1933 S. A.: io gli ho dato il nome di **Maria Pia**, nome che ho già comunicato al Delporte medesimo e al prof. Stracke⁽³⁾.

TABELLA I.

N.	Data (T. U.)	$\alpha_{1933.0}$	$\delta_{1933.0}$
1	1933 Sett. 16.008878	0 ^h 27 ^m 29 ^s .57	+ 12° 06' 54''.2
2	18.032157	0 25 50.69	+ 11 59 42 .4
3	26.001661	0 19 04.93	+ 11 26 18 .0
4	28.014207	0 17 20.84	+ 11 16 49 .1
5	Ott. 13.921348	0 04 19.73	+ 9 52 56 .7
6	19.884878	0 00 11.18	+ 9 20 38 .4
7	23.880535	23 57 45.07	+ 8 59 45 .6
8	Nov. 18.765565	23 50 05.54	+ 7 11 30 .7
9	19.769760	23 50 08.04	+ 7 10 54 .9

(1) Lavoro eseguito al R. Osservatorio Astronomico di Roma (sul Campidoglio).

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) Mi sia qui permesso di esprimere al prof. E. Delporte e al prof. G. Stracke i miei più vivi ringraziamenti per la loro cortesia e interessamento al mio lavoro.

Le misure dei clichés sono state fatte sulle stelle e sul Pianeta per mezzo della macchina da misurare *Genevoise* dell'Observatoire Royal de Uccle; le riduzioni di posizione della tabella precedente sono state ottenute col metodo delle dipendenze in collegamento a tre stelle fondamentali e controllate secondo le norme in vigore all'Observatoire⁽¹⁾.

2. Per la determinazione dell'orbita mi sono servito delle *tre* posizioni in corsivo che ho scelto come luoghi fondamentali: esse sono le due estreme del 16 settembre e 19 novembre e quella di mezzo del 19 ottobre. Queste posizioni — indicatemi dal prof. Delporte — sono state determinate con riferimento a stelle dei Cataloghi della Carta del Cielo, mentre le altre sono collegate a stelle di cataloghi meridiani (tenendo conto dei moti propri conosciuti).

Ho calcolato l'orbita usando il metodo di Gauss nella forma data da Oppolzer⁽²⁾, ed ho svolto il calcolo usando logaritmi a sei decimali.

Ridotte le osservazioni dei tre luoghi fondamentali scelti alle posizioni medie ed all'eclittica 1933.0, ho ottenuto per la longitudine λ e la latitudine β i seguenti valori:

	1933	λ	β
I. Settembre	16.008878	11° 06' 20'' .4	+ 8° 23' 27'' .4
II. Ottobre	19.884878	3 46 12 .3	+ 8 32 50 .0
III. Novembre	19.769760	0 35 37 .1	+ 7 33 59 .2

Alle tre date corrispondenti alle osservazioni si hanno le seguenti coordinate geocentriche solari (longitudine, latitudine e raggio vettore) ricavate dal « Berliner Jahrbuch »:

	1933	L_0	B_0	$\log R_0$
I. Sett.	16.008878	172° 40' 05'' .2	+ 0'' .23	0.002250
II. Ott.	19.884878	206 01 37 .8	— 0 .45	9.998093
III. Nov.	19.769760	236 58 00 .7	— 0 .38	9.994756

Sostituito poi al luogo di osservazione il *luogo fittizio* (Gauss), e dette L e R le coordinate del Sole rispetto a questo luogo fittizio ($B = 0$), ho ottenuto i seguenti elementi su cui ho basato tutto il calcolo dell'orbita:

	1933	λ	β	L	$\log R$
I. Sett.	16.008879	11° 06' 20'' .4	+ 8° 23' 27'' .4	172° 39' 55'' .9	0.002172
II. Ott.	19.884879	3 46 12 .3	+ 8 32 50 .4	206 01 54 .9	9.998105
III. Nov.	19.769762	0 35 37 .1	+ 7 33 59 .2	236 58 43 .6	9.994698

(1) Cfr. « Bulletin Astronomique de l'Observatoire Royal de Belgique », vol. I.

(2) TH. D'OPPOLZER, *Traité de la détermination des orbites*. Paris, Gauthier-Villars.

Son passato indi a determinare le distanze geocentriche del Pianeta ρ_1 e ρ_3 corrispondenti alle due posizioni estreme I e III, risolvendo per approssimazioni successive l'equazione di grado superiore che si presenta, e concludendo dopo due tentativi:

$$\log \rho_1 = 0.276632 \quad ; \quad \log \rho_3 = 0.326383$$

da cui ho ricavato gli elementi eliocentrici (l longitudine, b latitudine, r raggio vettore):

$$\begin{array}{ll} l_1 = 184^\circ 40' 53''.8 & l_3 = 17^\circ 50' 42''.2 \\ \operatorname{tg} b_1 = 8.987109_n & \operatorname{tg} b_3 = 9.002864 \\ \log r_1 = 0.455655 & \log r_3 = 0.445214. \end{array}$$

Le date corrette del tempo che la luce ha impiegato per giungere dal Pianeta all'osservatore son risultate:

$$\begin{array}{ll} T_1 = 1933 \text{ Settembre } 15.997967 \\ T_2 = 1933 \text{ Ottobre } 19.873274 \\ T_3 = 1933 \text{ Novembre } 19.757524 \end{array}$$

e gli argomenti di latitudine:

$$u_1 = 105^\circ 26' 38''.5 \quad ; \quad u_3 = 118^\circ 32' 49''.1$$

da cui le anomalie medie:

$$M_1 = 246^\circ 38' 01''.4 \quad ; \quad M_3 = 260^\circ 57' 58''.5.$$

Ne ho ricavato infine il sistema di elementi ellittici:

Pianeta **Maria Pia** (1933 S. A.).

Epoca: 1933 settembre 15.997967 T. U.

$$\begin{array}{ll} M_0 = 246^\circ 38' 01''.4 \\ \omega = 129^\circ 09' 45''.5 \\ \Omega = 259^\circ 09' 47''.0 \\ i = 5^\circ 45' 11''.0 \\ \varphi = 6^\circ 29' 29''.2 \\ e = 0.1130 \\ n = 796''.73 \\ \log a = 0.432470 \\ a = 2.7069 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Equinozio} \\ \text{medio} \\ 1933.0 \end{array}$$

3. La rappresentazione del luogo di mezzo ha fornito le differenze:

$$\Delta\lambda_2 = -0''.1 \quad ; \quad \Delta\beta_2 = +0''.5$$

mentre la rappresentazione di tutte le *nove* osservazioni mediante gli elementi ora trovati mi ha condotto ai seguenti O-C, calcolati in decimillesimi di grado:

TABELLA II.

N.	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1	0 ⁰ .0000	0 ⁰ .0000
2	- 0 .0007	- 0 .0016
3	+ 0 .0006	+ 0 .0009
4	+ 0 .0002	+ 0 .0004
5	- 0 .0001	- 0 .0001
6	0 .0000	0 .0000
7	- 0 .0009	+ 0 .0013
8	- 0 .0009	+ 0 .0020
9	0 .0000	0 .0000

Astronomia. — *Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934.* Nota di G. L. ANDRISSI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

Già in una precedente Nota ⁽²⁾ è stato detto che tra i lavori in corso nel R. Osservatorio Astronomico è la simultanea determinazione della latitudine in meridiano ed in primo verticale, al fine di portare un contributo alla discussione sulle anomalie del periodo della variazione delle latitudini, riscontrate nelle Stazioni Internazionali.

In questa prima Nota sono esposti i risultati ottenuti dalle mie osservazioni di latitudine allo strumento dei passaggi Bamberg, stabilito in meridiano usando il ben noto metodo di Horrebow-Talcott; mentre in una Nota successiva esporrò i risultati della discussione delle latitudini sino ad ora ottenute al R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio e che comprendono circa quattordici anni di osservazioni.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) G. L. ANDRISSI, *Determinazione di latitudine in primo verticale.* Questi « Rendiconti », vol. XIX, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 5.

Nella Tabella I sono contenute le *coppie* del programma di osservazione. Nella prima colonna è il numero della coppia. Nella seconda colonna sono i nomi delle stelle, od i numeri corrispondenti a quelli del Catalogo di Boss (*Preliminary General Catalogue*, Washington, 1910): le stelle senza asterisco sono quelle le cui effemeridi sono date dal « Berl. Astr. Jahr. »; quelle contrassegnate con un solo asterisco sono pure contenute nel « Berl. Astr. Jahr. », ma che sono state ridotte al luogo apparente; infine quelle contrassegnate con due asterischi sono date dal catalogo del Boss e sono state ridotte al luogo apparente usando le costanti del « Berl. Astr. Jahr. ».

Nella Tabella II sono dati i risultati delle osservazioni. Nella prima colonna è la data; nella seconda colonna è indicata la posizione dell'oculare all'inizio delle osservazioni; nella terza colonna è il numero della coppia osservata; nella quarta colonna è la semi-somma delle declinazioni.

Le declinazioni delle stelle sono ridotte al sistema fondamentale del Boss applicando alle declinazioni date dal « Berl. Astr. Jahr. », le correzioni sistematiche ricavate da « Astronomical Papers », vol. X, part. I, Washington, 1925.

Nella quinta colonna è la semi-somma della media delle letture micrometriche, per ogni stella vennero eseguite tre collimazioni, rispettivamente: al filo centrale dei tre fasci di cinque fili che costituiscono il reticolo, e per valore di una divisione delle vite del micrometro si è adottato il valore medio di $0'',5675$; nella colonna sesta è la correzione C_1 per l'inclinazione i dell'asse di rotazione dell'istrumento (come valore medio di una divisione delle due livelle talcottiane si è adottato $1'',142$); nella settima colonna è la correzione C_2 per la rifrazione verticale e nella ottava colonna è la correzione C_3 per la curvatura del parallelo, la quale è stata ricavata dall'Albrecht: « Formeln und Hilfstafeln »; per il calcolo della curvatura del parallelo si è adottato per la distanza media dei due fili laterali dal filo centrale del reticolo, il valore di $23'',75$. Infine nella nona colonna è il valore φ della latitudine. Nella Tabella III sono dati: nella prima colonna il numero della coppia osservata; nella seconda colonna la media dei valori ottenuti per ogni coppia e nella terza colonna il numero delle sere di osservazione, per ciascuna coppia.

TABELLA I.

Stella	Mag.	Ascensione 1931.0	Declinazione 1931.0	Stella	Mag.	Ascensione 1931.0	Declinazione 1931.0
1 { 8 Tauri . .	3.9	4 ^h 18 ^m 57 ^s .17	+ 17° 22' 55".36	14 { σ Leonis . .	4.2	11 ^h 17 ^m 34 ^s .77	+ 6° 24' 27".9
1 { 9 Camelop . .	4.4	4 47 10.60	66 13 40 .98	14 { Gbr. 1852* . .	6.1	12 1 46 .15	77 17 29 .53
2 { 19H Camelop	5.2	5 11 8.86	79 9 22 .37	15 { 3190** . . .	3.3	12 0 1.23	57 24 57 .00
2 { 8 Monoc. . .	4.5	6 20 6.73	4 37 45 .23	15 { 3224** . . .	4.9	12 19 2.38	26 13 43 .91
3 { 17 Camelop	5.8	5 23 38.83	63 0 43 .45	16 { 3322** . . .	5.6	12 41 53 .59	45 49 1 .44
3 { ζ Tauri . .	3.0	5 33 31.21	21 6 7 .13	16 { 3343** . . .	6.1	12 46 54 .11	37 53 31 .10
4 { ν Orionis . .	4.4	6 3 37.96	14 46 41 .06	17 { 3439** . . .	5.9	13 12 25 .93	41 13 7 .77
4 { 22H Camelop	4.7	6 11 14.81	69 20 49 .60	17 { 3500** . . .	6.3	13 28 16 .30	42 27 39 .95
5 { ε Gemini . .	3.2	6 39 41.31	25 12 3 .80	18 { 3561** . . .	5.8	13 44 1.34	54 46 26 .93
5 { 15 Lyncis . .	4.5	6 51 18.48	58 30 53 .63	18 { 3591** . . .	6.1	13 50 2.50	28 59 12 .67
6 { 19 Lyncis . .	5.6	7 17 14.71	55 24 48 .29	19 { η Bootis . .	2.8	13 51 23 .96	18 44 34 .47
6 { ι Gemini . .	3.9	7 21 26.66	27 56 12 .49	19 { α Draconis .	3.6	14 2 31.21	64 42 18 .81
7 { 24 Lyncis . .	5.0	7 37 10.79	58 52 25 .81	20 { 3703** . . .	6.5	14 22 40.24	38 42 14 .99
7 { χ Gemino . .	3.7	7 40 17.11	24 33 53 .76	20 { 3744** . . .	5.5	14 36 16 .15	44 42 5 .58
8 { Grb. 1374 . .	5.6	7 51 58.37	74 6 18 .32	21 { 3822** . . .	5.9	14 54 5.61	49 54 36 .62
8 { β Cancrì . .	3.8	8 12 46.51	9 23 57 .82	21 { 3887** . . .	3.4	15 12 43.26	33 34 16 .60
9 { Grb. 1460* .	6.0	8 34 11.51	52 57 11 .57	22 { 3911** . . .	5.9	15 18 3.38	52 12 22 .46
9 { σ ² Cancrì* .	5.6	8 50 2.39	30 50 30 .66	22 { 3953** . . .	4.3	15 30 8.79	31 35 27 .16
10 Ursa Maj. .	4.1	8 56 10.16	42 3 25 .46	23 { 4007** . . .	5.8	15 41 58.70	5 39 34 .92
11 { ε Leonis . .	3.1	9 41 56.34	24 3 34 .02	23 { 4035** . . .	4.5	15 46 28.94	78 0 27 .36
11 { υ Ursa Maj.	3.9	9 46 6.03	59 21 51 .67	24 { 4124** . . .	6.8	16 8 9.95	44 0 6 .02
12 μ Ursa Maj.	3.2	10 18 13.59	41 50 49 .62	24 { 4161** . . .	5.7	16 17 33.35	39 32 20 .97
13 { 9H Draconis	5.0	10 29 16.88	76 4 9 .48	25 { 4217** . . .	7.1	16 30 47.73	30 38 33 .13
13 { χ Leonis . .	4.7	11 1 27.55	7 42 33 .90	25 { 4232** . . .	5.4	16 34 35.82	53 3 44 .69
				26 { 4247** . . .	6.1	16 38 48.70	27 2 55 .11
				26 { 4270** . . .	5.0	16 43 59.17	56 54 16 .33
				27 { 4391** . . .	4.8	17 15 17.40	37 21 45 .53
				27 { 4408** . . .	5.8	17 18 24.11	46 18 27 .35

TABELLA II.

Data	Oculare	Coppia	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$	$\frac{1}{2}\Delta L$	C_1	C_2	C_3	φ
1931								
12-1	W	2	+41° 53' 45".40	— 0' 13".07	+ 0".23	— 0".01	+ 0".55	+41° 53' 33".10
12-1	W	5	53 37 .31	+ 1 55 .55	+ 0 .23	+ 0 .04	+ 0 .16	32 .79
17-1	W	1	48 31 .45	+ 5 2 .13	— 0 .10	+ 0 .12	+ 0 .27	33 .87
17-1	W	4	63 55 .87	— 10 21 .18	— 1 .37	— 0 .22	+ 0 .30	33 .40
17-1	W	5	51 37 .77	+ 1 55 .25	+ 0 .17	+ 0 .04	+ 0 .16	33 .39
2-2	W	5	51 39 .93	+ 1 53 .51	— 0 .23	+ 0 .04	+ 0 .16	33 .41
2-2	W	8	45 13 .97	+ 8 18 .92	— 0 .31	+ 0 .20	+ 0 .38	33 .16
5-2	W	4	63 57 .75	— 10 24 .62	+ 0 .70	— 0 .22	+ 0 .30	33 .91
9-2	W	5	51 40 .78	+ 1 52 .65	+ 0 .06	+ 0 .04	+ 0 .16	33 .79
9-2	W	6	40 39 .54	+ 12 53 .53	— 0 .51	+ 0 .18	+ 0 .21	32 .95
9-2	W	7	33 17 .52	+ 10 15 .51	0 .00	+ 0 .19	+ 0 .20	33 .42
9-2	W	8	45 14 .91	+ 8 17 .89	— 0 .35	+ 0 .20	+ 0 .38	33 .03
10-2	W	5	51 40 .85	+ 1 53 .22	— 0 .74	+ 0 .04	+ 0 .16	33 .53
10-2	W	6	40 39 .65	+ 12 52 .40	+ 0 .91	+ 0 .18	+ 0 .21	33 .35
10-2	W	7	43 17 .63	+ 10 14 .40	+ 0 .46	+ 0 .19	+ 0 .20	33 .38
10-2	W	8	45 15 .07	+ 8 20 .22	— 2 .28	+ 0 .20	+ 0 .38	33 .59
10-2	E	10	63 30 .45	— 9 50 .96	— 5 .42	0 .00	+ 0 .19	33 .26
10-2	W	12	50 47 .24	+ 2 46 .31	— 0 .23	0 .00	+ 0 .19	33 .51
14-3	E	11	43 45 .16	+ 9 47 .76	— 0 .28	+ 0 .19	+ 0 .21	33 .04
27-3	W	11	43 47 .14	+ 9 45 .71	+ 0 .05	+ 0 .19	+ 0 .21	33 .30
27-3	E	12	50 51 .54	+ 2 44 .80	— 3 .08	0 .00	+ 0 .19	33 .45
27-3	W	13	53 21 .64	+ 11 .55	— 0 .23	+ 0 .01	+ 0 .43	33 .40
8-4	E	13	53 23 .16	+ 9 .60	+ 0 .28	+ 0 .01	+ 0 .43	33 .34
8-4	W	14	50 54 .67	+ 2 38 .39	+ 0 .23	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .84
9-4	E	12	50 53 .70	+ 2 36 .52	+ 2 .41	0 .00	+ 0 .19	32 .90
9-4	W	13	53 23 .39	+ 9 .45	+ 0 .03	+ 0 .01	+ 0 .43	33 .31
9-4	E	14	50 54 .84	+ 2 39 .35	— 0 .91	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .83
11-4	W	13	53 23 .63	+ 9 .59	+ 0 .23	+ 0 .01	+ 0 .43	33 .49
11-4	E	14	50 55 .16	+ 2 36 .72	+ 1 .14	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .57
14-4	W	13	53 23 .87	+ 9 .99	— 0 .63	+ 0 .01	+ 0 .43	33 .76
14-4	E	14	50 55 .63	+ 2 37 .51	— 0 .40	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .69

segue Tabella II.

Data	Oculare	Coppia	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$	$\frac{1}{2}\Delta L$	C_1	C_2	C_3	φ
16-4	E	13	+41°53'24".23	+ 9".00	- 0".23	+ 0".01	+ 0".43	+ 41°53'33".44
16-4	W	14	50 55 .95	+ 2 37 .34	- 0 .34	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .50
17-4	W	14	50 56 .13	+ 2 36 .75	+ 0 .40	+ 0 .08	+ 0 .47	33 .87
17-4	E	15	49 15 .93	+ 4 16 .46	+ 0 .28	+ 0 .08	+ 0 .22	32 .97
17-4	W	16	51 9 .00	+ 2 23 .41	+ 0 .25	+ 0 .04	+ 0 .15	32 .86
28-4	E	16	51 11 .40	+ 2 21 .34	+ 0 .17	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .10
4-5	W	15	49 19 .18	+ 4 14 .35	- 0 .23	+ 0 .08	+ 0 .22	33 .50
4-5	E	16	51 12 .68	+ 2 19 .63	+ 0 .34	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .84
4-5	W	17	50 16 .26	+ 3 16 .29	+ 0 .28	+ 0 .07	+ 0 .16	33 .05
4-5	E	18	52 46 .18	+ 46 .90	- 0 .17	+ 0 .02	+ 0 .21	33 .14
4-5	W	19	43 17 .28	+ 10 14 .98	+ 0 .34	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .07
4-5	W	21	44 11 .78	+ 9 20 .55	+ 0 .11	+ 0 .17	+ 0 .20	32 .81
12-5	W	16	51 14 .30	+ 2 18 .86	- 0 .28	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .07
12-5	E	17	50 18 .05	+ 3 14 .79	+ 0 .34	+ 0 .07	+ 0 .16	33 .41
12-5	W	18	52 48 .02	+ 44 .38	+ 0 .34	+ 0 .02	+ 0 .21	32 .97
12-5	E	19	43 18 .96	+ 10 14 .28	0 .00	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .71
13-5	W	16	51 14 .48	+ 2 18 .76	0 .00	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .43
13-5	E	17	50 18 .27	+ 3 15 .43	- 0 .40	+ 0 .07	+ 0 .16	33 .53
13-5	W	18	52 48 .29	+ 44 .01	+ 0 .40	+ 0 .02	+ 0 .21	32 .93
13-5	E	19	43 19 .18	+ 10 14 .04	- 0 .11	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .58
13-5	W	20	42 50 .57	+ 11 31 .98	+ 0 .40	+ 0 .17	+ 0 .19	33 .32
13-5	E	21	44 14 .12	+ 9 19 .09	0 .00	+ 0 .17	+ 0 .20	33 .58
13-5	W	22	53 41 .53	- 8 8 .32	+ 0 .11	+ 0 .01	+ 0 .20	33 .51
15-5	W	17	50 18 .71	+ 3 14 .64	+ 0 .40	+ 0 .07	+ 0 .16	33 .98
15-5	E	18	52 48 .69	+ 44 .94	- 0 .28	+ 0 .07	+ 0 .21	33 .63
15-5	W	19	43 19 .64	+ 10 22 .72	+ 0 .17	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .10
15-5	E	20	42 1 .08	+ 11 30 .50	+ 1 .34	+ 0 .17	+ 0 .19	34 .28
15-5	W	21	44 14 .65	+ 9 19 .03	- 0 .74	+ 0 .17	+ 0 .20	33 .31
15-5	E	22	53 42 .06	- 9 .23	+ 0 .23	- 0 .01	+ 0 .20	33 .25
16-5	W	16	15 14 .94	+ 2 18 .02	0 .00	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .15
16-5	E	17	50 18 .92	+ 3 14 .72	0 .00	+ 0 .07	+ 0 .16	33 .87
16-5	W	18	52 48 .92	+ 43 .64	+ 0 .40	+ 0 .02	+ 0 .21	33 .19
16-5	W	20	42 1 .33	+ 11 32 .80	- 0 .34	+ 0 .17	+ 0 .19	33 .15

segue Tabella II.

Data	Oculare	Coppia	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$	$\frac{1}{2}\Delta L$	C_1	C_2	C_3	φ
16-5	E	21	+41° 44' 14".91	+ 9' 18".25	+ 0".23	+ 0".17	+ 0".20	+41° 53' 33".76
16-5	W	22	53 42 .28	— 9 .36	+ 0 .03	— 0 .01	+ 0 .20	33 .16
21-5	E	16	51 15 .90	+ 2 15 .63	+ 1 .37	+ 0 .04	+ 0 .15	33 .09
21-5	E	18	52 49 .99	+ 43 .07	— 0 .11	+ 0 .02	+ 0 .21	33 .18
21-5	W	19	43 20 .90	+ 10 12 .47	+ 0 .28	+ 0 .20	+ 0 .27	34 .12
21-5	E	20	42 2 .53	+ 11 30 .49	— 0 .34	+ 0 .17	+ 0 .19	33 .04
22-5	W	17	50 20 .15	+ 3 12 .35	+ 0 .14	+ 0 .07	+ 0 .16	32 .82
22-5	E	18	52 50 .20	+ 42 .42	0 .00	+ 0 .02	+ 0 .21	32 .85
22-5	W	19	43 21 .09	+ 10 12 .64	— 0 .17	+ 0 .20	+ 0 .27	34 .03
22-5	W	21	44 16 .57	+ 9 17 .35	— 0 .11	+ 0 .17	+ 0 .20	34 .18
22-5	E	21	53 43 .91	— 10 .08	0 .00	— 0 .01	+ 0 .20	34 .02
28-5	W	18	52 51 .37	+ 41 .18	0 .00	+ 0 .02	+ 0 .21	32 .78
28-5	E	19	43 22 .01	+ 10 11 .42	0 .00	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .90
28-5	W	20	42 4 .23	+ 11 28 .45	+ 0 .63	+ 0 .17	+ 0 .19	33 .67
28-5	E	21	44 18 .08	+ 9 14 .70	0 .00	+ 0 .17	+ 0 .20	33 .15
28-5	W	22	53 45 .48	— 12 .20	+ 0 .05	— 0 .01	+ 0 .20	33 .32
2-6	E	18	52 52 .38	+ 41 .25	0 .00	+ 0 .02	+ 0 .21	33 .86
2-6	W	19	43 22 .29	+ 10 11 .37	0 .00	+ 0 .20	+ 0 .27	34 .13
2-6	E	20	42 5 .39	+ 11 27 .86	— 0 .01	+ 0 .17	+ 0 .19	33 .60
2-6	W	21	44 19 .19	+ 9 13 .23	0 .00	+ 0 .17	+ 0 .20	32 .79
2-6	E	22	53 46 .77	— 13 .63	+ 0 .01	— 0 .01	+ 0 .20	33 .34
3-6	W	18	52 52 .57	+ 40 .33	0 .00	+ 0 .02	+ 0 .21	33 .16
3-6	E	19	43 23 .16	+ 10 10 .08	— 0 .23	+ 0 .20	+ 0 .27	33 .48
3-6	W	20	42 5 .59	+ 11 28 .23	— 0 .11	+ 0 .17	+ 0 .19	34 .07
3-6	E	21	44 19 .42	+ 9 13 .23	0 .00	+ 0 .17	+ 0 .20	33 .02
3-6	W	22	53 46 .99	— 13 .99	+ 0 .23	— 0 .01	+ 0 .20	33 .42
25-6	E	22	53 52 .06	— 19 .52	+ 0 .34	— 0 .01	+ 0 .20	33 .07
25-6	W	24	56 8 .92	— 2 36 .00	— 0 .11	+ 0 .08	+ 0 .51	33 .40
27-6	E	22	53 52 .52	— 18 .98	— 0 .91	— 0 .01	+ 0 .20	32 .82
27-6	W	26	58 28 .32	— 4 55 .66	+ 0 .98	— 0 .08	+ 0 .22	33 .78
1-7	E	27	50 1 .52	+ 3 31 .49	0 .00	+ 0 .07	+ 0 .19	33 .28
9-7	E	26	58 30 .26	— 4 57 .59	+ 0 .11	— 0 .08	+ 0 .22	32 .92
9-7	W	27	50 3 .66	+ 3 29 .15	0 .00	+ 0 .07	+ 0 .19	33 .07

TABELLA III.

Coppia	φ	n	Coppia	φ	n
1	$41^{\circ} 53' 33''.87$	1	15	$41^{\circ} 53' 33''.23$	2
2	33 .10	1	16	33 .22	7
4	33 .65	2	17	33 .44	6
5	33 .38	5	18	33 .16	10
6	33 .15	2	19	33 .68	9
7	33 .40	2	20	33 .57	7
8	33 .26	3	21	33 .32	8
10	33 .26	1	22	33 .32	9
11	33 .17	2	24	33 .40	1
12	33 .29	3	26	33 .35	2
13	33 .46	6	27	33 .18	2
14	33 .72	6			

Assegnando ad ogni valore di φ dato nella tabella III, un peso proporzionale al numero delle osservazioni, si ha come media pesata delle 97 osservazioni per la latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio, riferita al centro dell'istrumento Bamberg in meridiano ed al sistema di declinazioni del Boss:

$$1931.30 = + 41^{\circ} 53' 33''.39 \pm 0''.041.$$

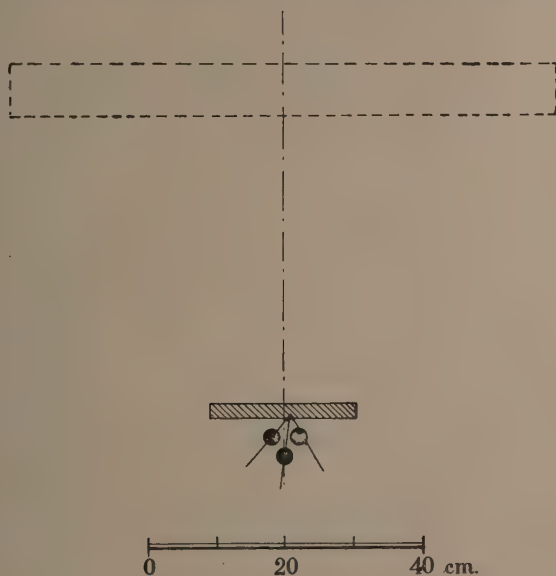
Applicando la riduzione⁽¹⁾ al polo medio si ha

$$\varphi = 41^{\circ} 53' 33''.46.$$

(1) *Report upon the Work of the International Latitude Service during the Period 1930.0-1933.0*, by H. KIMURA.

Fisica. — *Influenza del filtraggio sulle proprietà della radiazione produttrice degli sciami.* Nota di B. ROSSI e G. ALOCCO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. FERMI.

L'analisi dei fenomeni secondari che prendono origine nella materia colpita dai raggi cosmici e che si manifestano mediante l'apparizione simultanea di più particelle ionizzanti (i così detti « sciami »), ha condotto uno di noi a concludere che questi fenomeni sono prodotti o da una radiazione relativamente molle, generata alla sua volta nella materia da una radiazione assai più dura (per es. dalla radiazione cospuscolare penetrante primaria),



o da due diverse componenti della radiazione cosmica primaria, una di piccolo, una di grande potere di penetrazione ⁽²⁾. Recenti esperienze di Rossi e De Benedetti ⁽³⁾ appoggiano il secondo punto di vista; con questo sono pure in accordo i risultati delle ricerche che formano l'oggetto della presente

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) B. ROSSI, « Nature », 132, 173, 1933 e « Rendiconti Congresso di Londra », ottobre 1934.

(3) B. ROSSI e S. DE BENEDETTI, « Ricerca Scient. », 5-11, 119, 1934.

Nota, le quali rivelano inoltre una caratteristica differenza nelle proprietà delle due radiazioni produttrici degli sciami.

Col metodo dei contatori a triangolo, schematicamente illustrato dalla figura, venne misurato il numero degli sciami emergenti da schermi di vario numero atomico, successivamente in tre diverse condizioni di filtraggio della radiazione cosmica. Precisamente, le esperienze vennero eseguite:

A) in un locale situato all'ultimo piano del palazzo centrale della R. Università di Padova (spessore complessivo del soffitto e del tetto sovrastanti: circa 20 g/cm^2);

B) nel medesimo locale, sotto uno schermo orizzontale di piombo di $7,5 \text{ cm.}$ di spessore (85 g/cm^2), posto a 46 cm. dagli assi dei due contatori superiori (dimensioni dello schermo: $\text{cm}^2 80 \times 85$);

C) in un locale situato a pian terreno del medesimo fabbricato, sotto una spessa volta di muratura e rovinacci (lo spessore complessivo della volta, dei solai e del tetto sovrastanti è stato valutato a 270 g/cm^2 con un possibile errore di $\pm 15 \%$).

I contatori avevano una lunghezza utile di 25 cm. ed un diametro interno di $2,4 \text{ cm.}$; i loro assi erano orizzontali e formavano gli spigoli di un prisma triangolare a sezione equilatera di $3,5 \text{ cm.}$ di lato. La distanza del baricentro dello schermo dal piano degli assi dei contatori superiori era di $3,5 \text{ cm.}$ Vennero usati schermi di Pb, Sn, Al, aventi tutti una superficie di $\text{cm}^2 21 \times 32$ e masse superficiali assai prossime; i risultati finali vennero poi ridotti alla massa superficiale dello schermo di Pb. Il potere risolutivo della registrazione delle coincidenze era dell'ordine di $0,5 \cdot 10^{-3}$.

Nella seguente tabella sono riassunti i risultati delle tre serie di misure (gli errori indicati sono gli errori statistici probabili).

La prima serie di misure, quella cioè eseguita nella condizione di minimo filtraggio, riconferma la già nota differenza nel comportamento dei mezzi di diverso numero atomico rispetto alla produzione degli sciami: il numero degli sciami emergenti da schermi di egual massa superficiale (rapresentato dall'incremento delle coincidenze prodotto dagli schermi stessi) aumenta cioè rapidamente all'aumentare del loro numero atomico.

Le due serie successive di misure provano ora che tale differenza si attenua fino quasi ad annullarsi, quando si filtri preventivamente la radiazione cosmica attraverso strati di materia di sufficiente spessore, sia di basso, sia di elevato numero atomico.

Come abbiamo accennato fin da principio, la spiegazione più semplice di tutto ciò si ha nell'ipotesi che gli sciami vengano prodotti da due radiazioni diverse. Le nostre esperienze conducono ora ad attribuire soltanto alla più molle di queste due radiazioni la proprietà di generare in eguali masse di diversi elementi un numero di sciami rapidamente crescente col loro numero atomico, mentre la più dura genererebbe in esse un numero di sciami pressochè costante. Conseguentemente, la prima radiazione deve subire un

TABELLA

		Senza schermo	Al ($Z = 13$) g/cm ² 9,80	Sn ($Z = 50$) g/cm ² 9,54	Pb ($Z = 82$) g/cm ² 9,73
Esperienza A Filtro di 20 g/cm ² di elementi leggeri	Durata delle osservazioni	70 ^h 32 ^m	70 ^h 32 ^m	70 ^h 32 ^m	70 ^h 32 ^m
	Coincidenze triple osservate	389	1189	2150	2650
	Aumento della frequenza delle coincidenze prodotto dagli schermi (per ora)	—	11,3 ± 0,4	25,0 ± 0,4	32,1 ± 0,5
	idem per uno schermo di g/cm ² 9,73	—	11,2 ± 0,4	25,5 ± 0,4	32,1 ± 0,5
Esperienza B Filtro di 20 g/cm ² di elementi leggeri + 85 g/cm ² di Pb	Durata delle osservazioni	94 ^h 20 ^m	94 ^h 20 ^m	94 ^h 20 ^m	94 ^h 20 ^m
	Coincidenze triple osservate	665	1540	1823	1688
	Aumento della frequenza delle coincidenze prodotto dagli schermi (per ora)	—	9,3 ± 0,3	12,3 ± 0,3	10,8 ± 0,3
	idem per uno schermo di g/cm ² 9,73	—	9,2 ± 0,3	12,6 ± 0,3	10,8 ± 0,3
Esperienza C Filtro di 270 g/cm ² di elementi leggeri	Durata delle osservazioni	94 ^h 32 ^m	94 ^h 32 ^m	94 ^h 32 ^m	94 ^h 32 ^m
	Coincidenze triple osservate	372	1021	1170	1298
	Aumento della frequenza delle coincidenze prodotto dagli schermi (per ora)	—	6,9 ± 0,3	8,5 ± 0,3	9,8 ± 0,3
	idem per uno schermo di g/cm ² 9,73	—	6,8 ± 0,3	8,7 ± 0,3	9,8 ± 0,3

assorbimento selettivo da parte delle sostanze di numero atomico elevato, mentre la seconda deve venire assorbita da tutte le sostanze in misura approssimativamente proporzionale alla massa.

All'aria libera o sotto strati di materia di piccolo spessore (non più di pochi g/cm² se si tratta di elementi di elevato numero atomico, fino a qualche decina di g/cm² se si tratta di elementi di basso numero atomico) predomina la componente molle ed il numero di sciami emergenti da uno schermo mostra una spiccata dipendenza dal suo numero atomico; sotto strati di materia di maggior spessore predomina invece la componente dura e le sostanze di diverso numero atomico mostrano quindi approssimativamente il medesimo comportamento.

Fisica. — *Teoria dei raggi β e momento magnetico del protone.*
Nota di G. C. WICK, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. FERMI.

INTRODUZIONE. — Scopo di questo lavoro è di riattaccare i risultati di due differenti linee di ricerca, e cioè i risultati di Heisenberg ⁽²⁾ e Majorana ⁽³⁾ sulle forze di legame nei nuclei con quelli di Fermi ⁽⁴⁾ sulla disintegrazione β , per gettare un po' di luce sulla questione del momento magnetico del protone.

La situazione è, brevemente, la seguente: il protone ha un momento angolare intrinseco $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ come l'elettrone. Sorge quindi naturale l'idea di applicare al protone l'equazione relativistica di Dirac per l'elettrone, naturalmente cambiando il segno della carica. Ne segue automaticamente un momento magnetico intrinseco:

$$\mu_n = \frac{e}{2Mc} \frac{h}{2\pi} \quad (= 0,5 \times 10^{-23} \text{ CGS})$$

uguale alla 1840^{esima} parte del magnetone di Bohr, e generalmente denominato: magnetone nucleare.

Ora le misure di R. Frisch e O. Stern ⁽⁵⁾ e di Rabi ⁽⁶⁾ hanno mostrato che il momento magnetico intrinseco del protone non è uguale a μ_n , ma circa tre volte più grande.

La ragione di questa discrepanza può venir cercata, come ora mostriamo, nella possibilità che ha il protone di scindersi momentaneamente in

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) W. HEISENBERG, «Zs. f. Phys.», 77, 1, 1932; 78, 156, 1932; 80, 587, 1933.

(3) E. MAJORANA, «Zs. f. Phys.», 82, 137, 1933.

(4) E. FERMI, «N. Cim.», 11, 1, 34.

(5) R. FRISCH e O. STERN, «Zs. Phys.», 85, 4, 1933.

(6) I. RABI, «Phys. Rev.», 46, 157, 1934.

un neutrone + un positrone + un neutrino, per poi ricadere immediatamente allo stato di protone (una transizione permanente non può avvenire, poichè contraria alla conservazione dell'energia, se, com'è probabile, la massa del protone è inferiore alla somma delle masse delle altre tre particelle). Possiamo allora supporre che allo stato non dissociato il protone possieda un momento magnetico di un magnetone nucleare, secondo le previsioni della teoria di Dirac, mentre il momento magnetico che si osserva sperimentalmente è la media:

$$\frac{\mu_n + \tau \mu}{1 + \tau}$$

dove τ è la frazione dell'unità di tempo che il protone passa allo stato dissociato e μ il momento magnetico medio degli stati dissociati.

Noi ci contenteremo di mostrare che non è $\tau \ll 1$; ciò dimostra che il meccanismo qui considerato dà una perturbazione del momento magnetico, che è di un ordine di grandezza sufficiente. Una trattazione quantitativa del problema non è per ora possibile.

Le transizioni del tipo da noi considerato sono precisamente quelle che compaiono nella teoria dei raggi β (le transizioni considerate da Fermi, loc. cit., sono veramente creazioni e distruzioni di elettroni *negativi*, ma non è difficile passare, per mezzo del formalismo della teoria dell'elettrone positivo di Dirac, alle transizioni che ci interessano⁽¹⁾). Esse possono venire introdotte formalmente mediante termini di perturbazione nella funzione Hamiltoniana. Questi termini danno origine, oltre che alla perturbazione del momento magnetico, anche a un'energia intrinseca delle particelle pesanti (protone, neutrone) e a un'interazione di scambio tra protone e neutrone. I. Tamm⁽²⁾ ha mostrato che la forma particolare di perturbazione scelta provvisoriamente da Fermi dà un'interazione di scambio che è di parecchi ordini di grandezza inferiore a quella dedotta dalle energie di legame dei nuclei, se si determina il valore della costante g , come fa Fermi, dai valori delle vite medie per disintegrazione β .

Noi analizzeremo più avanti le ragioni di questo disaccordo. Sarebbe evidentemente un notevole progresso poter trattare interazione di scambio e teoria dei raggi β da un punto di vista unitario. Perciò noi riterremo tutte le ipotesi essenziali e la forma generale della teoria di Fermi, ma ne abbandoneremo la forma particolare, adottata dall'autore stesso solo in via provvisoria e per ragioni di semplicità. Noi cercheremo anzi di condurre il ragionamento in modo indipendente da qualsiasi forma particolare dell'Hamiltoniana; supporremo soltanto che questa sia scelta in modo da render conto correttamente dell'interazione tra neutrone e protone.

(1) G. C. WICK, « Rend. Lincei », 19, 319, 34.

(2) I. G. TAMM, « Nature », 133, 981, 1934; v. anche A. NORDSIECK, « Phys. Rev. », 46, 234, 1934.

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI. — Ammetteremo con Fermi che la perturbazione è data da elementi di matrice $V_{no}(P)$ che producono transizioni da uno stato o in cui esiste solo un protone nel punto P , con gli stati n in cui esiste un neutrone pure nel punto P + un elettrone positivo e un neutrino con impulsi qualsiasi. Terremo conto degli elementi di matrice V mediante un calcolo delle perturbazioni, fino alla seconda approssimazione.

Allora, ragionando come Tamm, si può mostrare che esiste un'interazione di scambio tra protone e neutrone, che dipende dalla distanza secondo la legge:

$$(1) \quad J(r) = \sum_n \frac{V_{on}(P) V_{no}(P')}{E_n - E_o} \quad ; \quad r = |P - P'|$$

In questa espressione devono essere trascurati sistematicamente i termini dell'ordine $\frac{m}{M} = \frac{1}{1840}$. Trascureremo perciò le energie cinetiche delle particelle pesanti sia in E_o che in E_n . Perciò $E_o = Mc^2$ e $E_n = Mc^2 +$ + energia dell'elettrone e del neutrino.

$J(r)$ è (sperimentalmente) grande solo per valori di r dell'ordine del raggio dell'elettrone e forse anche alquanto minori; dobbiamo quindi aspettarci una particolare importanza delle lunghezze d'onda di quest'ordine, cioè di impulsi dell'ordine di $137mc$ o maggiori. Vediamo ora chiaramente la ragione del fallimento del tentativo di Tamm. Noi abbiamo per ora il diritto di pretendere dalla teoria il giusto ordine di grandezza soltanto in quei risultati che non dipendono troppo dalla forma particolare scelta per la Hamiltoniana. Non è gran meraviglia che estrapolando dalle energie dei raggi β a energie più di 100 volte maggiori non si ottengano risultati corretti.

Heisenberg ha notato che l'interazione calcolata da Tamm non solo non ha l'ordine di grandezza desiderato, ma anche nella forma corrisponde a uno scambio « alla Heisenberg », mentre vi sono forti ragioni ⁽¹⁾ per ritenere che lo scambio sia « alla Majorana ». Vediamo così a maggior ragione come non sia conveniente nel seguito attenersi allo schema più ristretto della teoria dei raggi β , ma lasciare piuttosto aperte varie possibilità.

Vogliamo ora calcolare il valore di τ , omettendo ancora sistematicamente termini dell'ordine di $\frac{m}{M}$.

Abbiamo descritto precedentemente la storia di un protone come una successione di transizioni dallo stato o agli stati n e viceversa. Più correttamente, ciò che noi osserviamo è uno stato stazionario che è una miscela di o con gli n , e precisamente quello stato stazionario che si ottiene a partire da o introducendo adiabaticamente la perturbazione V . Naturalmente

(1) V. il lavoro citato di MAJORANA.

τ è la probabilità di trovare il sistema in uno qualsiasi degli stati n . Secondo la teoria delle perturbazioni l'ampiezza di probabilità dello stato n è data da:

$$a_n = \frac{V_{n0}}{E_n - E_0}$$

perciò sarà:

$$(2) \quad \tau = \sum_n |a_n|^2 = \sum_n |V_{n0}(P)|^2 / (E_n - E_0)^2.$$

Non è difficile stabilire una relazione di ordini di grandezza tra (1) e (2). Ricordando che il contributo maggiore alla somma (1) è dato da stati aventi energie dell'ordine di $137 mc^2$, troviamo:

$$\tau \sim \frac{1}{137 mc^2} J(O)$$

La funzione $J(r)$ non è conosciuta accuratamente; sappiamo tuttavia che $J(O)$ è probabilmente⁽¹⁾ dell'ordine di parecchie decine di milioni di volt-elettroni. τ è quindi dell'ordine dell'unità (può naturalmente essere $1/20$ oppure $1/2$), il che è più che sufficiente a dare una correzione del momento magnetico del protone dell'ordine desiderato.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario.* Nota I di M. MANARINI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

Questa Nota anzitutto ha lo scopo di risolvere in modo diretto alcune importanti questioni, come ad es. la ricerca della condizione d'integrabilità dell'equazione $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{a}$, essendo $\mathbf{a}$ un bivettore e l'impostazione delle equazioni del campo elettromagnetico stazionario in forma indipendente da qualunque sistema di coordinate e aventi significato qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio. Questi risultati, che qui si ottengono mediante l'introduzione di un concetto di divergenza di un campo bivettoriale, furono conseguiti finora soltanto col metodo tensoriale, perchè nel calcolo vettoriale si presentavano difficoltà di estensione per certe operazioni e concetti già adottati per lo spazio S_3 . È senza dubbio importante estendere agli spazi più generali il metodo vettoriale intrinseco, in guisa che lo studio dei problemi geometrici e fisici e la ricerca delle leggi indipendenti dalle coordinate,

(1) E. WIGNER, « Phys. Rev. », 43, 252, 1933; G. C. WICK, « N. Cim. », 11, 227, 1934.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

possa farsi in *maniera diretta*. Questo lavoro ha anche per fine di mettere in rilievo lo stretto legame che intercede fra il metodo vettoriale (assoluto) e quello tensoriale.

Farò uso del concetto di iperomografia, od omografia di ordine n , della quale, per comodità del lettore, mi permetto di richiamare soltanto la definizione, rimandando per la teoria alle ben note opere vettoriali degli Autori italiani. Qui accenno a qualche complemento.

Chiamasi omografia di ordine n l'operatore lineare che trasforma una n -pla di vettori in un vettore; equivale quindi ad una corrispondenza fra n -ple di punti e punti.

Le omografie vettoriali ordinarie sono del 1° ordine e consistono in trasformazioni lineari per i vettori.

Le omografie vettoriali di ogni ordine possono essere considerate sia in uno spazio affine che in uno spazio metrico. Si può constatare che nello spazio affine, e necessariamente per trasformazioni lineari delle coordinate affini, rappresentano tensori di ordine $n + 1$ con un solo indice di contravarianza ed n di covarianza.

Nello spazio metrico possono venire rappresentate da tensori di ordine $n + 1$ puramente covarianti o contravarianti o misti. Qui avendo di mira altre considerazioni non procedo, per limitazione di spazio, alla verifica di queste affermazioni. Aggiungerò soltanto che le forme lineari o plurilineari di vettori, usate per sviluppare il calcolo tensoriale, sono particolari iperomografie rispettivamente del 2° e del 3° ordine; in particolare la forma metrica fondamentale, che completa la geometria affine, dando luogo alla geometria metrica, è una speciale omografia del 3° ordine, notevolmente importante per lo sviluppo della geometria metrica stessa. Relativamente a questa forma metrica, scelta anche *a priori*, rimane subordinato il concetto di « congruenza » che è in stretto legame con speciali omografie dette « isomerie » estensione di quelle ordinarie.

Per varietà qualunque, amorse, con connessione affine o metriche, le omografie di ordine qualunque si possono definire, punto per punto, negli spazi affini tangenti ed in coordinate rappresentano, punto per punto, tensori della stessa specie accennata sopra, rispetto alle trasformazioni generali delle variabili. Nelle varietà riemanniane continua a valere, punto per punto, l'algoritmo vettoriale affine, metrico e differenziale tenendo presente la teoria della derivazione intrinseca ⁽¹⁾.

In questo lavoro tratto in modo particolare una questione di analisi vettoriale nello spazio metrico euclideo o riemanniano in vista dei risultati che mi sono proposto di ottenere e di cui ho già detto di sopra.

(1) Cfr. M. MANARINI, *Considerazioni sul Calcolo vettoriale assoluto in una V_3 e sui tensori doppi a divergenza unica*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XIX, ser. 6ª, 1° sem., 1934, pp. 301-305.

Osservo infine che l'algoritmo vettoriale assoluto da me adoperato si differenzia da quello degli altri Autori per l'uso sistematico del calcolo plurivettoriale per il quale rimando il lettore alla mia Memoria: *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi* ⁽¹⁾.

1. Indicherò con l'indice 2 scritto al disotto di lettere greche le omografie del 2° ordine e con sole lettere greche le omografie ordinarie del 1° ordine. Sia data l'omografia del 2° ordine α e siano a, b, c tre vettori arbitrari dello spazio, per il quale non è necessario fissare il numero delle dimensioni. Indichiamo con $\bar{K}$ l'operatore fra omografie del 2° ordine per il quale si abbia

$$(1) \quad \alpha a b \times c = \bar{K} \alpha b c \times a.$$

Questo operatore $\bar{K}$ equivale al prodotto $k k'$ ($\neq k' k$) degli operatori k, k' usati dai proff. Boggio e Burali-Forti ⁽²⁾ ed è pertanto un operatore lineare (come del resto si verifica subito anche direttamente) univocamente determinato. Si verifica subito che è

$$\bar{K}^3 = 1.$$

Posto ciò, consideriamo l'omografia ordinaria α funzione dei punti P in un certo dominio dello spazio S_n ed ancora consideriamo l'omografia del 2° ordine $\frac{d\alpha}{dP}$, supposte soddisfatte le condizioni analitiche per α affinché esista.

Corrispondentemente all'omografia del 2° ordine $\frac{d\alpha}{dP}$ consideriamo l'omografia del 2° ordine

$$(2) \quad \gamma(\alpha) = \frac{d\alpha}{dP} + \bar{K} \frac{d\alpha}{dP} + \bar{K}^2 \frac{d\alpha}{dP},$$

funzione, punto per punto, soltanto di α .

Se α è un'omografia qualunque, l'omografia $\gamma(\alpha)$ ammette in generale una simmetria ciclica:

$$(3) \quad \gamma a b \times c = \gamma b c \times a = \gamma c a \times b,$$

e ciò dipende dal fatto che è

$$\bar{K} \gamma = \bar{K}^2 \gamma = \gamma.$$

(1) « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. XII (1933-34), pp. 75-115.

(2) Cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces courbes. Critique de la relativité*, p. 32; P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, vol. II dell' *Analisi vettoriale generale*, p. 150; per lo spazio S_3 , si può vedere: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, vol. I della collezione precedente, p. 138.

Nel caso particolarmente, importante di α omografia assiale, $\gamma(\alpha)$ risulta un'omografia emisimmetrica nel senso che, se nell'espressione $\gamma \underset{2}{ab} \times c$ si scambiano i vettori a, b, c , si ottiene lo stesso valore od un valore che differisce soltanto per il segno a seconda che si opera una permutazione di classe pari o dispari rispetto alla permutazione iniziale. L'importanza dell'iperomografia (2) risulta dalle considerazioni seguenti.

Si abbia un vettore $u(P)$, funzione dei punti P in un certo dominio dello spazio S_n . In altro lavoro ⁽¹⁾ ho esteso il concetto di rotazionale del vettore u che vettorialmente aveva significato soltanto nello spazio ordinario a tre dimensioni. Il $\text{rot } u$ in S_n risulta un $(n-2)$ -vettore che è pure determinato dal bivettore supplementare ⁽²⁾, il quale, in base alla corrispondenza biunivoca fra bivettori (semplici e multipli) e le assiali (semplici e multiple), ha per corrispondente l'assiale

$$\frac{du}{dP} - K \frac{du}{dP},$$

dove $K \frac{du}{dP}$ è la coniugata dell'omografia $\frac{du}{dP}$.

Se per omografia α nella (2) prendiamo quest'assiale, corrispondente al bivettore $\text{rot } u$, essa risulta nulla, verificandosi abbastanza facilmente che è

$$(4) \quad \gamma \left(\frac{du}{dP} - K \frac{du}{dP} \right) = 0.$$

2. Prima di mostrare l'utilità che ha nelle applicazioni l'impiego dell'iperomografia (2), vogliamo riferirci alle coordinate anche per collegare con le corrispondenti questioni e operazioni del calcolo tensoriale.

A tal uopo, presupposto per semplicità lo spazio metrico euclideo S_n , sia $i_1, i_2 \dots i_n$ una n -pla di vettori fondamentali unitari ortogonali a due a due, e diciamo, rispetto ad essa,

$$a_{pqr} = \alpha \underset{2}{i_p i_q} \times i_r \quad (p, q, r = 1, 2 \dots n)$$

le n^3 componenti di α , a'_{pqr} quelle dell'iperomografia $\bar{K} \alpha$; essendo

$$\alpha \underset{2}{i_p i_q} \times i_r = \bar{K} \alpha \underset{2}{i_q i_r} \times i_p,$$

(1) Cfr. M. MANARINI, *Rotazionale di un vettore negli spazi S_n* : « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XVII, ser. 6^a, 1° sem. 1933, pp. 706-712.

(2) Svincolandomi dall'algoritmo vettoriale ordinariamente seguito in S_3 , ed esteso in coerenza nei miei lavori citati, qui preferisco determinare il $\text{rot } u$ mediante bivettore anziché con l' $(n-2)$ -vettore, ottenendo una definizione che vale, anche formalmente, qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio. Lo stesso criterio serve per i concetti di vettore di una omografia e di prodotto vettoriale $\alpha \wedge b$, che risultano così determinati da bivettori.

vediamo che le componenti di $\bar{K} \alpha$ si ricavano da quelle di α mediante la relazione

$$(5) \quad a'_{qrp} = a_{pqr}.$$

Stabilito mediante l' n -pla suaccennata un sistema di coordinate cartesiane $x_1, x_2, \dots, x_n$, diciamo

$$a_{rs} = \alpha \, i_r \times i_s \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

le componenti di α che, supposta α funzione di P , risulteranno funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Dette a_{pqr} le componenti di $\frac{d\alpha}{dP}$, in funzione delle componenti a_{rs} dell'omografia α , esse sono date da

$$(6) \quad a_{pqr} = \frac{d\alpha}{dP} \, i_p \, i_q \times i_r = \frac{\partial a_{qr}}{\partial x_p}.$$

Se indichiamo con $\bar{a}_{pqr}$ le componenti di $\bar{K} \frac{d\alpha}{dP}$ si ha per le (5) e (6)

$$(7) \quad \bar{a}_{pqr} = \frac{\partial a_{pq}}{\partial x_r}.$$

Analogamente, dette $\bar{\bar{a}}_{pqr}$ le componenti di $\bar{K}^2 \frac{d\alpha}{dP}$, abbiamo

$$(8) \quad \bar{\bar{a}}_{pqr} = a_{qrp} = \frac{\partial a_{rp}}{\partial x_q}.$$

Cio posto, le componenti di $\gamma_2(\alpha)$ definita dalla (2), in funzione delle componenti a_{rs} di α , per le (6), (7) e (8), sono date da

$$(9) \quad \gamma_{ikl} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Nel caso particolare notevole che α sia un'omografia assiale si ha

$$a_{rs} = -a_{sr},$$

e queste componenti rappresentano un tensore emisimmetrico del 2° ordine, naturalmente nello spazio metrico, giacchè le assiali per loro natura appartengono alla geometria metrica.

Esso è detto anche *tensore lineare* del 2° ordine potendo anche essere determinato da una *forma lineare di bivettore*. In questo caso le componenti

γ_{pqr} date dalle (9) costituiscono un tensore triplo emisimmetrico detto anche *tensore lineare del 3° ordine* essendo determinato anche da una *forma lineare di trivettore*. Queste proprietà possono tradursi anche in un linguaggio puramente algebrico.

L'omografia del 2° ordine $\gamma(\alpha)$ definita dalla (2) nel caso di α assiale, è dunque l'operazione vettoriale assoluta corrispondente all'importante operazione sui campi tensoriali lineari del 2° ordine rappresentata dalle relazioni (9) e che conduce ad un tensore del 3° ordine pure lineare⁽¹⁾; le relazioni (9) sono, per quanto dimostra il calcolo tensoriale, invariantive rispetto alle trasformazioni delle coordinate. Nel caso del vettore $u(P)$, al bivettore $\text{rot } u$ corrisponde nel calcolo tensoriale un tensore doppio lineare che, posto $u = \sum u_r i_r$, ha per componenti

$$a_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \frac{\partial u_s}{\partial x_r}, \quad (r, s = 1, 2 \dots n).$$

Si scorge subito che il tensore lineare del 3° ordine formato mediante l'operazione (9), con questo particolare tensore doppio lineare è nullo, avendosi immediatamente

$$\gamma_{pqr} = 0 \quad \text{per} \quad p, q, r = 1, 2 \dots n.$$

Ciò conferma quanto constatammo col metodo diretto alla fine del numero precedente verificando la (4).

(1) Cfr. H. WEYL, *Temps, espace, matière*, 1922, p. 51.

Fisica (Fisica-Matematica). — *L'opérateur S — opérateur de Schrödinger.* Nota di RUY LUIS GOMES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si nous désignons par H l'opérateur hamiltonien tiré de la fonction correspondante selon la règle connue: substitution des moments p_j par les opérateurs différentiels $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_j}$ nous savons que les états dynamiques ψ satisfont à l'équation de Schrödinger

$$(1) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0$$

dans laquelle h représente la constante de Planck.

C'est donc cette équation qui régit l'évolution dans le temps de tout état quelconque ψ d'un système mécanique.

Si l'opérateur H était réduit à un opérateur indépendant du temps t , ou s'il agissait comme tel, lorsqu'il est appliqué à des fonctions déterminées (ce qui arrive par exemple, quand on l'applique à l'une de ses fonctions fondamentales), nous aurions évidemment

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} H t} \psi_0.$$

C'est à dire que, l'état ψ à un certain moment t , serait le produit de l'état initial ψ_0 par la fonction exponentielle $e^{-\frac{2\pi i}{h} H t}$:

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} H t} \psi_0.$$

Mais quand il ne s'agit d'aucune de ces hypothèses, c'est à dire, quand H se comporte comme un opérateur différentiel, dépendant du temps, il n'est plus possible de dire que ψ est le produit de ce facteur exponentiel par ψ_0 . Mais il est possible de déterminer un *opérateur exponentiel*:

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} S}$$

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

et une fonction φ , indépendante du temps, tels que la solution de (1) initialement égale à ψ_0 soit donnée par la formule

$$(2) \quad \psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi:$$

opérateur $e^{-\frac{2\pi i}{h} S}$ appliqué à la fonction φ .

En réalité, en substituant l'opérateur exponentiel par le développement en série qui sert à le définir

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi = \varphi - \frac{2\pi i}{h} S \varphi + \left(-\frac{2\pi i}{h} \right)^2 \frac{S^2}{2!} \varphi + \dots + \left(-\frac{2\pi i}{h} \right)^n \frac{S^n}{n!} \varphi + \dots$$

et en effectuant la première dérivation par rapport au temps, on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} \varphi - \frac{2\pi i}{h} \frac{S \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} S}{2!} \varphi + \dots \right\}.$$

Si donc nous déterminons l'opérateur S par les deux équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = H \\ SH - HS = 0 \end{cases}$$

nous avons

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} H \left\{ \varphi - \frac{2\pi i}{h} S \varphi + \dots \right\}$$

ou

$$H\psi + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

La fonction ψ définie par (2) satisfait donc à l'équation de Schrödinger.

L'opérateur S (que nous appellerons de Schrödinger) que nous venons de définir comme solution de (3) c'est donc de la forme générale:

$$S = P(H) + A,$$

en représentant par $P(H)$ une primitive par rapport au paramètre t , de l'opérateur H et par A un opérateur indépendant du temps, tel que

$$HA - AH = P(H)H - HP(H).$$

Et il est toujours possible de déterminer un opérateur A dans ces conditions, vu que t ne figure en H que comme paramètre exclusivement, n'ayant donc aucune influence sur la non permutabilité de S avec un autre

opérateur quelconque et spécialement avec H . En admettant, par exemple, l'analyticité de l'opérateur H , c'est à dire, en supposant que

$$H = H_0 + H_1 t + \dots + H_n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

avec

$$H_n = \left(\frac{\partial^n H}{\partial t^n} \right)_0$$

nous pouvons écrire

$$S = A + H_0 t + H_1 \frac{t^2}{2!} + \dots + H_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

$$S = A + \mathcal{H},$$

c'est à dire

$$P(H) = \mathcal{H} = H_0 t + \dots + H_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

A sera déterminée par la condition

$$(A + \mathcal{H})H - H(A + \mathcal{H}) = 0.$$

Voyons maintenant la fonction φ introduite dans la formule (2). Si nous y faisons $t = 0$, nous aurons

$$(4) \quad \psi(q, 0) = \psi_0 = e^{-\frac{2\pi i}{b} S} \varphi = e^{-\frac{2\pi i}{b} A} \varphi,$$

puisque

$$S_0 = \mathcal{H}_0 + A = A.$$

En appliquant à présent aux deux membres de (4), à gauche, l'opérateur $e^{+\frac{2\pi i}{b} A}$ on a, comme il est facile de voir,

$$\varphi = e^{\frac{2\pi i}{b} A} \psi_0.$$

La fonction φ est ainsi déterminée et il est alors légitime d'écrire

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{b} S} \left(e^{+\frac{2\pi i}{b} A} \psi_0 \right)$$

en mettant en évidence la valeur initial de ψ :

$$\psi(q, 0) = \psi_0.$$

Nous obtenons ainsi l'expression générale des solutions de l'équation de Schrödinger (1): 1) comme résultat de l'application de l'opérateur exponentiel

$$e^{-\frac{2\pi i}{h}S}$$

à la fonction φ ; 2) comme résultat de l'application des deux opérateurs

$$e^{\frac{2\pi i}{h}A}, \quad e^{-\frac{2\pi i}{h}S},$$

dans ce même ordre, à l'état initial ψ_0 .

De

$$S = \mathcal{H} + A$$

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}(\mathcal{H}+A)} \left(e^{\frac{2\pi i}{h}A} \psi_0 \right),$$

nous aurions pu être induit à écrire, par erreur, très simplement:

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H}} \psi_0.$$

Il suffit cependant d'observer que A ne commute pas avec H pour voir l'illégitimité de l'extension aux opérateurs exponentiels de ce qui est seulement une propriété des opérateurs exponentiels commutatifs, c'est à dire, de ceux qui vérifient la relation:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

Cas particulier:

H ne dépend pas de t .

Dans ce cas, étant donné que

$$H_0 = H; H_1 = \dots = H_n = 0$$

nous aurons

$$S = Ht + A$$

et, d'après l'équation

$$(A + \mathcal{H})H - H(A + \mathcal{H}) = 0$$

on conclut que A commute avec H .

Donc,

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}S} e^{\frac{2\pi i}{h}A} \psi_0$$

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}[A - A + Ht]} \psi_0$$

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}Ht} \cdot \psi_0$$

si H ne contient pas le temps, l'état φ , solution générale de (1), est obtenu par simple application de l'opérateur exponentiel

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} H t}$$

à l'état initial ψ_0 (1).

Si, particulièrement, ψ , est un état fondamental de H , c'est à dire,

$$H\psi = E\psi$$

alors,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2\pi i}{h} H t} \psi_0 &= \psi_0 - \frac{2\pi i}{h} t H \psi_0 + \dots + \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)^n \frac{t^n}{n!} H^n \psi_0 + \dots \\ &= \psi_0 - \frac{2\pi i}{h} t E \psi_0 + \dots + \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)^n \frac{t^n}{n!} E^n \psi_0 + \dots \\ &= e^{-\frac{2\pi i}{h} E t} \cdot \psi_0. \end{aligned}$$

C'est à dire que ψ_0 est l'état fondamental de l'opérateur exponentiel

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} H t}$$

et que sa valeur propre est

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} E t}.$$

2. Considérons maintenant deux solutions différentes de (1)

$$\psi_1, \psi_2.$$

et formons leur produit intérieur :

$$(\psi_1, \psi_2).$$

Comme

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1 ; & \varphi_1 &= e^{\frac{2\pi i}{h} A} \psi_1^0 \\ \psi_2 &= e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_2 ; & \varphi_2 &= e^{\frac{2\pi i}{h} A} \psi_2^0 \end{aligned}$$

(1) C'est un résultat bien connu déjà. Voir, par exemple, VON NEUMANN, *Quantenmechanik*, p. 108.

nous aurons

$$\begin{aligned}(\psi_1, \psi_2) &= \left(e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1, e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_2 \right) \\&= (\varphi_1, \varphi_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{h} A} \psi_1^0, e^{\frac{2\pi i}{h} A} \psi_2^0 \right) \\(\psi_1, \psi_2) &= (\psi_1^0, \psi_2^0).\end{aligned}$$

Si particulièrement, nous partons d'un système orthonormal ψ_j^0 , c'est à dire, d'un système tel que

$$(\psi_j^0, \psi_k^0) = \delta_{jk}$$

nous aurons également

$$(\psi_j, \psi_k) = \delta_{jk}.$$

L'orthonormalité se maintient à travers le temps.

Et si le système initial ψ_j^0 , orthonormal, est, en outre, complet, le système ψ_j le sera également. En réalité, s'il n'en était pas ainsi, il existerait à un moment donné t' , une fonction $\tau(q)$ orthonormal à tous les $\psi_j(q, t')$.

Or, si nous construisons la solution de (1)

$$\theta(q, t) = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \theta_1(q)$$

qui coïncide avec τ au moment t' , c'est à dire, si nous déterminons θ_1 , par la condition

$$\theta(q, t') = e^{-\frac{2\pi i}{h} (S)_{t'}} \theta_1 = \tau$$

et si nous formons maintenant le produit des deux fonctions $\psi_j(q, t)$ et $\theta(q, t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(\psi_j(q, t), \theta(q, t)) &= (\psi_j(q, t'), \theta(q, t')) \\&= ((\psi_j(q, 0), \theta(q, 0))\end{aligned}$$

d'où

$$(\psi_j, \theta)_0 = 0$$

vu que, par hypothèse, nous avons

$$(\psi_j, \theta)_{t'} = 0.$$

La fonction $\theta(q, 0)$ serait donc orthogonale aux ψ_j^0 , ce qui est absurde, attendu qu'il s'agit d'un système complet.

Le système ψ_i reste donc orthonormal complet, quel que soit t .

Ces résultats, énoncés et démontrés pour la première fois par Fock⁽¹⁾, nous semblent donc être la conséquence immédiate, naturelle de l'exponentialité de l'opérateur qui régit l'évolution dans le temps en mécanique ondulatoire.

La notion d'intégrale de l'équation de Schrödinger.

Commençons par déduire la condition nécessaire et suffisante pour que $B^{(2)}$ appliqué à ψ soit une nouvelle solution de (1).

Comme

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi$$

nous avons

$$B\psi = B e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi.$$

Mais si $B\psi$ est aussi une solution de (1), nous avons également

$$(5) \quad B\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1.$$

Donc

$$B e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1.$$

En dérivant par rapport à t , partiellement, bien entendu, on a

$$\frac{\partial B}{\partial t} e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi - \frac{2\pi i}{h} B H e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi = -\frac{2\pi i}{h} H e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1$$

et en substituant, dans le second membre, $e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi_1$ par sa valeur $B e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi$, on a

$$(6) \quad \left[\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h} (BH - HB) \right] e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi = 0$$

on finalement

$$(7) \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (HB - BH) = 0$$

vu que φ est quelconque.

Et, comme (5) et (6) sont équivalents, nous aurons⁽³⁾: la condition né-

(1) «Zeit. für Physik», Band 49, 5. und 6. Heft, p. 323-328, 1928.

(2) Un opérateur quelconque.

(3) Voir, par exemple, VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quanten-Mechanik*, pp. 4, 5.

cessaire et suffisante pour que $B\psi$ soit une solution de (1), en même temps que ψ , est que B satisfasse à l'équation (7).

Si particulièrement, nous avons

$$B\psi_i = \lambda_i \psi_i$$

avec λ_i constant, pour un système complet de ψ_i , il est évident que B satisfait l'équation (7).

Observons que si ψ_i est le résultat de l'application de l'opérateur exponentiel :

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} S}$$

à une fonction indépendante de t , il en est de même de la fonction $\lambda\psi_i$ pour le cas où λ est constant.

Dans l'hypothèse que nous considérons

$$B\psi_i = \lambda_i \psi_i$$

nous disons que B est une intégrale de l'équation de Schrödinger.

Les intégrales vérifient donc l'équation (7).

Dérivée d'un opérateur B (1).

Supposons maintenant que ψ est une solution de (1) et, simultanément, une fonction propre de B , c'est à dire

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} S} \varphi$$

$$B\psi = \lambda(t) \psi.$$

En dérivant les deux membres par rapport à t , on a

$$\left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (HB - BH) \right] \psi = \frac{d\lambda}{dt} \psi.$$

La dérivée totale de B est donc

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (HB - BH).$$

(1) Voir les livres sur *Quantisme*, en particulier, DIRAC, *Quantum Mechanics*, p. 98, BROGLIE, VAN DER WAERDEN.

Geologia. — *Sulla presenza di nuovi affioramenti oligocenici a sud del Gebel Cirenaico.* Nota di M. MARCHETTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. D'ACHIARDI.

Nella campagna di rilievo geologico da me condotta in Cirenaica nella primavera del 1934 ho avuto occasione di riconoscere una estensione dei terreni Oligocenici molto maggiore di quanto non sia stato rappresentato nelle precedenti carte geologiche⁽²⁾ e di quanto non sia stato segnalato nei resoconti degli itinerari esplorativi da altri condotti in queste regioni.

Tralasciando di soffermarmi su alcuni piccoli nuovi lembi rinvenuti ad esempio nella zona di Heiraul-Agaba (a sud di Gerdes el Abid) e di Abiar Bu Sfeia (a SE di Gerdes ul Gerrari), dei quali ho già dato altrove sommariamente notizia⁽³⁾, mi limiterò a descrivere il grande affioramento oligocenico, esteso in gran parte a SE di Mechili, che presenta un certo interesse anche per i caratteri litologici, faunistici e di facies che lo allontanano di molto dall'aspetto generalmente noto per questi terreni in Cirenaica.

Per una certa estensione questa zona oligocenica si manifesta anche ad ovest di Mechili, dove è più riccamente fossilifera, specialmente in corrispondenza della scarpata che si inizia presso la Ridotta, a partire dal cucuzolo di Ras Mechili (Miocene)⁽⁴⁾, e che si estende verso ovest interrotta dalle incisioni degli U. Ramla, Aguas, Belater ecc. Fra queste si presenta di maggiore entità (circa 10 m.) quella formata dall'U. Belater, dove questo sfocia nella piana, ricoperta da una coltre di materiale alluvionale in prevalenza terroso; qui si può osservare un grosso banco di calcari grossolani coralligeni, dei quali i cespugli di coralli formano parte predominante in basso, gremiti di fossili di gasteropodi, prevalenti per numero e varietà di forme, con pochi lamellibranchi conservati in genere come modelli.

Ai calcari grossolani seguono in alto, con esiguo spessore, calcari bianchi compatti a piccoli modelli costituenti la superficie del ripiano, più o meno ricoperti da antiche alluvioni ciottolose incoerenti o conglomerate.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) J. W. GREGORY, *The geology of Cyrenaica*. (« Quart. Journ. Geol. Society of London », vol. XLVII), 1911; G. STEFANINI, *Struttura geologica della Cirenaica e cenni descrittivi a corredo dello schizzo geologico dimostrativo della Cirenaica*. (« La Cirenaica geografica, economica, politica »), Milano, 1923.

(3) M. MARCHETTI, *Note illustrative per un abbozzo di carta geologica della Cirenaica*. (« Boll. Soc. Geol. », II, vol. LIII), 1934.

(4) A. DESIO, *Nuovi dati sulla Geologia della Libia*. (« Mem. Geol. Geogr. », di G. Dainelli, vol. III, 1932), Firenze, 1933.

Gli strati sono sub-orizzontali e nel fianco destrò dell'Uadi, a poca distanza dal ciglione, si osserva nettissima una faglia, alla quale seguono fino al margine della scarpata strati fratturati e brecciati con notevole immersione verso sud; questo assetto tettonico e uno sguardo d'insieme mostrano chiaramente l'esistenza di una faglia marginale che rende tettonicamente oltre che morfologicamente depressa la zona pianeggiante prossima al piede del gradino.

Nel banco coralligeno, presso il letto dell'Uadi, ho potuto raccogliere una discreta quantità di fossili che si trovano anche perfettamente isolati, sparsi in gran copia sul terreno. Da un esame sommario della fauna posso trarre il seguente elenco di specie:

- Conus* cfr. *Grateloupi* D'Orb.
- Conus* sp. pl.
- Melongena* cfr. *basilica* Bell.
- Cypraea* sp.
- Strombus problematicus* Micht.
- Strombus irregularis* Fuchs.
- Strombus* sp.
- Cerithium Meneguzzoi* Fuchs.
- Cerithium Meneguzzoi* var. *trinitense* Fuchs.
- Potamides* sp. ind. (an. nova).
- Turritella* (*Haustator*) *conofasciata* Rov.
- Turritella* (*Haustator*) *subaequicincta* Rov.
- Turritella* sp. pl.
- Natica auricolata* Grat.
- Megatylotus crassatinus* Lmk.
- Crommium angustatum* Cossm.
- Trochus* aff. *Boscianus* Brongn.
- Trochus Lucasianus* Brongn.
- Trochus stampinensis* Cossm. et Lamb. var.
- Trochus* sp. ind. (an nova).
- Delphinula scobina* Brongn. var. *appenninica* Sacco.
- Globularia suturata* Fuchs.
- Chlamys*. sp.
- Arca exbarbata* Rov.
- Cardita Laurae* Brongn.
- Venericardia* cfr. *Basteroti* Desh.
- Crassatella* cfr. *subtumida* Sacco var. *oligocenica* Rov.
- Diplodonta aliena* Rov.
- Lucina* sp. pl.
- Linga oligocaenica* Cossm.
- Laevicardium anormale* Math.

Cardium gaasense Tourn.

Coralliophaga sp.

Chione Aglaurae Brongn.

Tellina sp.

Questa fauna, malgrado non presenti una proporzione molto grande di forme esattamente determinate, pure mostra chiaramente la sua appartenenza all'Oligocene, e notevoli analogie in special modo con giacimenti del Trentino, della Liguria e con quelli dei bacini meridionali francesi. Nel corso di queste determinazioni, anche se sommarie, è apparso che non molte sono le specie esattamente riferibili a quelle delle località europee sopra citate e che piuttosto numerose debbano considerarsi quelle nuove che, anche avvicinandosi molto a forme note, pure sembrano costituire un ben definito gruppo di varietà locali proprie di questa parte più meridionale del mare oligocenico.

Da questa località prendendo la pista per Z. el Hamama (5 Km. a sud del ciglione) che corre nella piana quasi parallela al piede del gradino, si incontra, dopo 14 Km., a el Rfeisa, presso Garet el Gafsa, un piccolo affioramento di calcari grossolani con modelli di gasteropodi forse riferibile allo stesso livello di U. Belater.

Lasciando la pista e proseguendo verso sud si hanno dopo 4 Km. ancora calcari grossolani con cristalli di gesso che si ritrovano abbondantemente sparsi sul terreno, e a questi seguono calcari giallastri compatti e infine calcari cristallini grigi sub-saccaroidi (a oriente di Balet Bu Rgheis)⁽¹⁾.

In un altro itinerario spinto da Mechili verso sud ho incontrati nuovamente calcari grossolani con coralli in un piccolo affioramento presso il margine nord-occidentale di Balet Ramla, seguiti, al limite della « balta », da calcari cristallini grigi in posizione stratigrafica non ben definita rispetto ai precedenti. I calcari grossolani sono ricchissimi di Nummuliti (*N. intermedius*) che si trovano in gran parte sparse sul terreno, isolate dal disfacciamento meteorico, e più raramente incluse nella roccia⁽²⁾.

Dopo la balta, fino a Bir Hamarin, si hanno ancora calcari grossolani, con qualche cristallo di gesso, ricchissimi di coralli in grosse colonie perfettamente conservate e di modelli di *Strombus* di grandi dimensioni a cui si aggiungono rare nummuliti oligoceniche. Scarsi e mal conservati sono gli altri fossili fra cui ricorderò:

(1) A occidente di U. Belater (15 km.), l'Oligocene si continua nell'affioramento di U. Cherna già segnalato da DESIO (op. cit., p. 210).

(2) Alla presenza di un affioramento oligocenico in località imprecisata presso Balet Ramla viene accennato di sfuggita dal CREMA in: *Le trivellazioni nei dintorni di Tobruch*. (« Riv. Colonie Ital. », n. 3), Roma, 1926.

Nummulites intermedius D'Arch.

Cypraea sp.

Ostrea sp.

Chlamys sp.

Crassatella cfr. *carcarensis* Micht.

Nella piccola scarpata di Bir Hamarin (m. 5 circa) si nota alla base dei calcari grossolani qualche termine più marnoso e infine uno straterello di argilla verdastra. A sud, fin presso Bir Tengeder, seguono calcari compatti sub-saccaroidi grigi e giallastri, probabilmente sottostanti ai precedenti e pertanto ascrivibili ugualmente all'Oligocene.

Nelle piccole scarpate circostanti Bir Tengeder si hanno calcari grossolani marnosi, candidi, quasi privi di fossili e, al di sopra, calcari grossolani con brutti modelli non esattamente determinabili; dopo un lungo percorso su terreno steppico talora simile a un « serir » si giunge da Bir Tengeder (verso SE) al ciglione di U. Mra (Musran el Muffëtten). Nella scarpata sono presenti calcari compatti a noduli di selce con scarsi fossili raramente ben conservati (*Divaricella ornata* Sacco) e con alla base termini più marnosi a disfacimento globulare. Ritenendo questi calcari riferibili al Miocene, anche in base a raffronti litologici con quanto di simile è stato osservato da Desio ⁽¹⁾ fra Bir Tengeder e Bir Hacheim, il limite meridionale dell'Oligocene resterebbe localizzato più a nord nei pressi di Bir Tengeder, probabilmente con una digitazione nella zona depressa corrispondente alla foce dell'U. Mra; quivi, 28 Km. a NNO del Musran el Muffëtten, riaffiorano i calcari compatti sub-saccaroidi grigi già riferiti all'Oligocene. Questi sembrano continuarsi ampiamente verso Gare Meriem mentre poco ad est, fino a Balet Laulab ed Haleg, ricompaiono calcari con selce e conchigliacei riferibili al Miocene.

Nella sezione offerta dal fianco di Gare Meriem si ritrovano invece calcari grossolani a coralli e modelli con termini più marnosi e arenacei alla base; la facies è in tutto simile a quella di Bir Hamarin ma i rari fossili sono mal conservati e difficilmente determinabili (*Ostrea oligoplicata* Sacco var. *meridionalis* Rov., *Cypraea* sp.); sottostanti a questi terreni, a poca distanza dal piede della « gara », si ritrovano anche qui i calcari compatti cristallini grigi già segnalati.

Proseguendo verso ovest lungo il Trigh Enver Bey, si continua, come nei pressi di Gare Meriem, la solita morfologia a « balte » e « gare », costituite dagli stessi calcari grossolani che a circa 50 Km. da Mechili si mostrano più ricchi di coralli e di fossili discretamente conservati, analogamente al descritto affioramento di U. Belater.

(1) Op. cit., p. 209.

Le stesse analogie si hanno nella fauna della quale ricorderò:

Strombus sp. (abbondante).
Potamides sp. ind. (an nova).
Trochus Lucasianus Brongn.
Megatylotus crassatinus Lmk.
Natica auricolata Fuchs.
Lucina sp.
Cardium gaasense Tourn.
Laevicardium anomale Math.
Chione Aglaurae Brongn.
Tellina sp.

A circa 45 Km. da Mechili si risale una piccola scarpata e da qui si prosegue fino alla Ridotta su un ripiano steppico generalmente coperto e con poca roccia affiorante, che, per analogia con quella osservata nel vicino itinerario Mechili-Tmimi, credo sia da riferirsi al Miocene.

Restano in conclusione segnalate le località fossilifere oligoceniche di U. Belater, Balet Ramla, Bir Hamarin e Trigh Enver Bey (Km. 50 da Mechili) fino a Garet Meriem, in corrispondenza di una fascia di calcari coralligeni riferibili all'Oligocene Superiore e litologicamente identici in tutta l'estensione; viene attribuita all'Oligocene anche la vasta placca di calcari compatti generalmente cristallini, grigi e giallastri estesi a sud della zona coralligena ed a questa sottostanti; viene posto il limite meridionale dell'affioramento presso a poco all'altezza di Bir Tengeder con continuazione verso NE e viene compreso fra la pista Mechili-Tmimi e il Trigh Enver Bey il limite settentrionale, che tuttavia presso Mechili è compreso fra questo ultimo e Bir Hamarin.

Mancano dati per il limite orientale e quello occidentale; il primo si può forse porre all'altezza del Golfo di Bomba⁽¹⁾ mentre verso occidente i terreni oligocenici si estendono forse a comprendere la parte meridionale delle «balte» poste a sud del Sirual.

(1) M. MARCHETTI, op. cit.

Chimica biologica. — *Trasformazione enzimatica dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico per mezzo dei germogli del « Sorghum saccharatum ».* Nota di C. ANTONIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. MENOZZI.

Il possibile significato biologico dell'acido fosfoglicerico, già intravisto da C. Neuberg alcuni anni or sono in base al comportamento del prodotto preparato per sintesi ⁽²⁾ ha trovato in questi ultimi tempi una conferma in vari ordini di fatti. La fermentazione dell'exoso-di-fosfato mediante sistemi enzimatici parzialmente inattivati, sia di muscolo che di lievito, porta, come è noto, alla formazione di acido fosfoglicerico ⁽³⁾. D'altra parte l'acido fosfoglicerico può essere trasformato per via biochimica in acido piruvico ⁽⁴⁾ secondo un interessante meccanismo di reazione di cui ebbi, in linea puramente teorica, ad occuparmi io stesso in un mio precedente lavoro ⁽⁵⁾ e che è ora in gran parte chiarito per merito delle fruttuose ricerche di K. Lohmann e O. Meyerhof ⁽⁶⁾. Anche se, sino ad ora, nessuna prova ci dimostri la partecipazione diretta dell'acido fosfoglicerico ai processi naturali di fermentazione glucidica, siamo in ogni caso e indubbiamente di fronte a fatti di alto interesse, che rendono sempre più verosimile la partecipazione degli esteri trioso-fosforici al metabolismo intermedio delle fermentazioni, riportando in onore, con interpretazioni nuove, osservazioni e ipotesi di vecchia data ⁽⁷⁾.

Segnalo in questa Nota la trasformazione biochimica dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico per opera degli enzimi dei germogli del *Sorghum saccharatum*. Tale trasformazione, già dimostrata nel campo vegetale pei semi

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) C. NEUBERG, F. WEINMANN e M. VOGT, « Bio. Z. », 199, 248, 1928; C. NEUBERG e M. KOBEL, idem, 216, 493, 1929; M. VOGT, idem, 211, 1, 1929; C. NEUBERG e M. KOBEL, idem, 219, 490, 1930.

(3) R. NILSSON, « Ark. f. Kemi, Mineralogi och Geologi », 10 A, 121, 1930; G. EMBDEN, H. J. DEUTICKE e G. KRAFT, « Klin. Wochenschr. », 12, 213, 1933; O. MEYERHOF e D. MC. EACHERN, « Bio. Z. », 260, 144, 1933; C. NEUBERG e M. KOBEL, idem, 264, 456, 1933; I. BABA, idem, 267, 452, 1933; C. CATTANEO, idem, 267, 456, 1933.

(4) C. NEUBERG e M. KOBEL, « Bio. Z. », 260, 241, 1933; 263, 219, 1933; C. ANTONIANI, idem, 267, 376, 1933; C. CATTANEO, idem, 270, 382, 1934.

(5) C. ANTONIANI, « Biochimica e Ter. Sperim. », XXI, 1934.

(6) K. LOHMANN e O. MEYERHOF, « Bio. Z. », 273, 60, 1934.

(7) IWANOV, « Centralbl. f. Bakter. », Abt. II, 24, 1, 1909; LEBEDEV, « Chem. Ber. », 44, 2932, 1911; EULER, « Chemie der Enzyme », I, 336, 1925.

di alcune dicotiledoni⁽¹⁾, acquista con ciò una nuova prova del suo carattere di generalità.

Come appare dai dati esposti nella parte sperimentale, e come del resto già ebbi occasione di rilevare in altra comunicazione⁽²⁾, la quantità di acido piruvico formatosi non equivale alla frazione di acido fosfoglicerico defosforilato. All'attività del sistema enzimatico operante la trasposizione molecolare, si sovrappone evidentemente un'azione fosfatasica che si limita all'idrolisi dell'acido fosfoglicerico. Dal punto di vista fisiologico, ed anche enzimologico, può essere interessante rilevare come il rapporto tra acido piruvico formatosi e grado di defosforilizzazione vari col variare dello stadio di sviluppo dei germogli impiegati. La conferma e una più netta valutazione di questo fatto potrebbero contribuire a chiarire la natura delle attività enzimatiche determinanti questa interessante trasformazione, che si prospetta sin d'ora di importanza biologica generale.

PARTE SPERIMENTALE.

Substrato. — Soluzione acquosa di fosfoglicerato sodico contenente mg. 1.13 di P. totale per cc. preparata per trasformazione in sale sodico del corrispondente sale di bario. Grado di acidità della soluzione: pH 6.5 (previa parziale neutralizzazione con NaOH).

Preparato enzimatico. — Embrioni di sorgo, germogliato alla luce in ambiente sterile, accuratamente recisi dalla cariosside e privati delle radichette. Vennero eseguite due esperienze con embrioni di diverso stadio di sviluppo.

Esperienza n. 1.

a) g. 3.0 embrioni allo stato fresco della lunghezza media di cm. 0.5 circa, finemente sminuzzati in mortaio.

cc. 50 soluzione di fosfoglicerato sodico contenente complessivamente mg. 56.5 di P. totale pari a mg. 338 di acido fosfoglicerico.

cc. 2 toluolo.

b) g. 3.0 embrioni come sopra.

cc. 50 H₂O.

cc. 2 toluolo.

Temperatura 37° C.

(1) C. NEUBERG e M. KOBEL, «Bio. Z.», 272, 457, 1934.

(2) C. ANTONIANI, «Biochimica e Ter. Sperim.», XXI, 1934.

Andamento della defosforilizzazione.

	mg. P. inorganico per cc.		Defosforilizzazione
	a)	b)	
All' inizio	0.031	0.031	—
dopo 16 ore.	0.502	0.073	38.0% (1)
dopo 40 ore.	0.967	0.082	78.5%

L'acido piruvico venne separato e dosato come 2.4-di-nitrofenilidrazone secondo il metodo di C. Neuberg e M. Kobel⁽²⁾.

cc. 33 del filtrato, dopo precipitazione delle proteine con ugual volume di acido tricloroacetico 5%, diedero mg. 80 di idrazone, praticamente tutto solubile in carbonato sodico. Da tale quantità di idrazone si calcolano mg. 26.2 di acido piruvico, cioè mg. 40 di acido piruvico per l'intera quantità di acido fosfoglicerico posta in reazione. Rendimento rispetto all'acido fosfoglicerico totale: 25% del teorico; rispetto alla frazione defosforilata: 31.5%.

Esperienza n. 2.

a) g. 3.0 embrioni allo stato fresco della lunghezza media di cm. 1.0 circa, finemente spappolati in cc. 20 H₂O.

cc. 50 soluzione di fosfoglicerato sodico come nell'esperienza precedente.

cc. 5 toluolo.

b) g. 3.0 embrioni come sopra.

cc. 50 H₂O.

cc. 5 toluolo.

Volume complessivo di ciascuna delle due soluzioni in esperimento, escluso il toluolo, cc. 70. Temperatura 37° C.

Andamento della defosforilizzazione.

	mg. P. inorganico per cc.		Defosforilizzazione
	a)	b)	
All' inizio	0.024	0.024	—
dopo 24 ore.	0.613	0.043	75.8%

(1) Dedotto il contenuto in fosforo della prova in bianco.

(2) C. NEUBERG e M. KOBEL, «Ber.», 63, 1988, 1930.

cc. 50 della soluzione, dopo eliminazione delle proteine, diedero mg. 95 di dinitrofenilidrazone praticamente tutto solubile in carbonato sodico, pari a mg. 31.2 di acido piruvico e quindi a mg. 43.5 di acido piruvico totale. Rendimento rispetto all'acido fosfoglicerico totale: 27.0 %; rispetto alla frazione defosforilata: 36.0 %.

Per ciascuna delle due esperienze non si osservò formazione di acido piruvico nella prova in bianco.

Ringrazio sentitamente il prof. C. Neuberg per l'invio di una quantità notevole di fosfoglicerato di bario.

Biologia. — *Il glutatione nella estivazione della « Helix aperta Born. »*⁽¹⁾. Nota di F. DULZETTO presentata⁽²⁾ dal Socio A. RUSSO.

Non avendo potuto estendere ai Mammiferi — per la difficoltà di procurarmi il materiale — le ricerche che, alcuni anni fa, avevo intrapreso sul comportamento del glutatione durante il letargo, ho rivolto la mia attenzione agli Invertebrati, e nella scorsa estate ho preso in esame un Mollusco gasteropode, *Helix aperta*, che nel nostro mercato si trova in abbondanza a cominciare dal mese di maggio, epoca in cui cade in letargo, per ritornare a vita attiva con le prime piogge autunnali. Sicchè, contrariamente a quanto avviene per altre specie, la *H. aperta* entra in letargo nella stagione calda, fenomeno che Giard⁽³⁾ attribuisce alla progressiva disidratazione, cui l'animale va incontro.

Bellion^(4, 5) ha fatto alcune osservazioni sulle modificazioni che il letargo apporta nelle riserve fisiologiche e negli scambi respiratori di *Helix pomatia* L. Ed è venuto alla conclusione che durante la ibernazione si ha notevole rallentamento degli scambi respiratori, diminuzione di peso e consumo delle riserve di grasso, cui si accompagna accumolo di glicogeno nel fegato, produzione di glucosio nel fegato e nei muscoli, scomparsa dello zucchero dal sangue. Nella *H. opercolata* ha constatato inoltre una sensibile disidratazione dei tessuti, ed un accumolo di anidride carbonica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) A. GIARD, *L'anhydrobiose ou ralentissement des phénomènes vitaux sous l'influence de la déshydratation progressive*. « C. R. Soc. Biol. », vol. 46, 1894, p. 497.

(4) M. BELLION, *Les échanges respiratoires chez l'Escargot « Helix pomatia L. »*. « C. R. Soc. Biol. », vol. 66, 1909, p. 917.

(5) M. BELLION, *Note sur l'hibernation de l'Escargot « Helix pomatia L. »*. « Ibid. », p. 964.

Ora mi è sembrato interessante vedere come varia, in queste particolari condizioni, il contenuto in glutatione, poichè dalle ricerche di Blanchetière e Melon ⁽¹⁾ si sapeva solo che esso è presente in alcuni Lamellibranchi e Gasteropodi marini.

Gli animali, che provenivano dalle vicinanze di Catania, sono stati divisi in due lotti, di cui uno è stato sacrificato nel mese di agosto, e cioè in periodo di pieno letargo, e l'altro all'inizio del risveglio. Asportato rapidamente l'epifragma ed il guscio, venivano isolati il piede, l'epatopancreas e la ghiandola dell'albume, sui quali la ricerca del glutatione è stata eseguita mediante estrazione, e per via istologica.

Gli organi, appena prelevati, venivano finemente triturati con sabbia di quarzo, e successivamente trattati con una soluzione di acido tricloracetico al 10 %, sino ad esaurimento. La ricerca del glutatione veniva fatta sul liquido estrattivo, impiegando una soluzione di nitroprussiato sodico al 5 % in presenza di ammoniaca. Sin dalle prime osservazioni si rilevò che dei tre organi presi in esame, il piede conteneva delle piccole quantità di glutatione ridotto, mentre l'epatopancreas e la ghiandola dell'albume ne erano privi. Questi risultati furono controllati e confermati mediante l'esame istologico, eseguito con la stessa tecnica che avevo adoperato in precedenti ricerche ^(2 3).

Il risultato negativo ottenuto per l'epatopancreas e la ghiandola dell'albume mi fece nascere il sospetto che il glutatione si trovasse nella forma ossidata, disulfurica, che non dà col nitroprussiato sodico alcuna reazione cromatica. Sicchè ho lasciato per circa un quarto d'ora questi organi in presenza di una soluzione di cianuro di potassio al 10 %, e successivamente ho eseguito la reazione al nitroprussiato sul tessuto dilacerato e sulla soluzione di cianuro di potassio, in cui gli organi erano stati immersi, ottenendo nell'un caso e nell'altro reazione nettamente positiva. Era evidente quindi che, mentre nel piede il glutatione si trova nella forma ridotta, nell'epatopancreas e nella ghiandola dell'albume si trova invece nella forma ossidata, disulfurica.

Dati questi risultati, ero venuto nelle determinazioni di procedere alla titolazione del glutatione ridotto contenuto nel piede, nonostante si incontrasse qualche difficoltà per la esigua quantità in esso contenuta. Mentre per l'epatopancreas e la ghiandola dell'albume — dato che in questi organi il glutatione si trova nella forma ossidata — avevo cominciato a tentare la estrazione con una soluzione di cianuro di potassio, anzicchè con la solu-

(1) A. BLANCHETIÈRE et L. MELON, *Sur la diffusion du glutathion dans le règne animal*. « C. R. Soc. Biol. », vol. 97, 1927, p. 1231.

(2) P. DI MATTEI e F. DULZETTO, *Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi*. « Rendic. R. Acc. Lincei », vol. 8, ser. 6^a, 1928, p. 317.

(3) F. DULZETTO, *Il glutatione nelle ova di « Paracentrotus lividus » durante la fecondazione*. « Archives de Biol. », vol. 41, 1931, p. 221.

zione di acido tricloracetico. Trattavo la poltiglia ottenuta, tritando l'organo con polvere di quarzo, con una soluzione al 10% di cianuro di potassio, ed eseguivo la reazione al nitroprussiato sodico sul filtrato. Ed il metodo sembrava rispondere bene, come potei rilevare sin dalle prime esperienze eseguite a scopo di orientamento. Ma quando avevo iniziato il lavoro di titolazione, mentre tritavo l'epatopancreas in un mortaio di porcellana in presenza della soluzione di cianuro di potassio, notai lo sviluppo di tracce di acido cianidrico, che mi provocarono dei disturbi, cui non diedi eccessiva importanza. Il giorno successivo, assicurandomi che la reazione del tessuto era neutra, iniziai il trattamento con la soluzione di cianuro di potassio. Ma questa volta, forse per lo sviluppo di una maggiore quantità di acido cianidrico, i disturbi assunsero il carattere di un vero avvelenamento, essi andarono infatti — nonostante avessi lasciato subito il Laboratorio — sempre più aggravandosi, e se riuscii ad essere salvato, per più di due mesi fui tormentato da gravi disturbi, che mi misero nella impossibilità di portare a compimento le ricerche iniziate.

I dati raccolti mi permettono intanto di potere stabilire che nella *Helix aperta* in piena estivazione il glutatione ridotto è presente, sebbene in piccola quantità, nel piede, dove, all'esame istologico, si rileva che è localizzato nei fasci muscolari. Questo reperto ha richiamato la mia attenzione per il fatto che nei Vertebrati la muscolatura è generalmente scarsa di contenuto in glutatione. Esso però trova riscontro nei risultati delle ricerche eseguite da Blanchetière e Melon⁽¹⁾, i quali hanno trovato che nei muscoli di alcuni Molluschi (*Pinna nobilis*, *Mytilus edulis* e *Triton nodifer*) il tenore in glutatione è più elevato di quello dei Mammiferi.

Nell'epatopancreas e nella ghiandola dell'albume il glutatione si rinviene invece nella forma ossidata, sicchè per rivelarne la presenza è necessario trattare gli organi con cianuro di potassio, che, come ha dimostrato Mauthner⁽²⁾, trasforma la cistina in cisteina.

Intanto verso la fine di ottobre il secondo lotto di *Helix* cominciava a ritornare a vita attiva, e, per quanto non mi fossi ancora del tutto rimesso, ho eseguito alcune ricerche istologiche, riservandomi di riprendere in esame tutto il problema nella prossima estate, anche perchè durante l'inverno non è possibile procurarsi del materiale. In questa seconda serie di ricerche ho anche impiegato il metodo consigliato da Giroud e Bulliard⁽³⁾ per stabilizzare la reazione al nitroprussiato, che, come è noto, presenta l'inconveniente di essere fugace, e quindi non sempre riesce agevole fare le osservazioni. Le sezioni degli organi, ottenute per congelazione, venivano

(1) Loc. cit.

(2) J. MAUTHNER, *Ueber Cystin*. «Hoppe-Seyler's Zeitschr. physiol. Chem.», vol. 78, 1912.

(3) A. GIROUD et H. BULLIARD, *Sur une réaction des substances à fonction sulphydryle*. «Bulletin Soc. de Chimie biol.», vol. 14, 1932, p. 278.

immerse per pochi secondi in una soluzione al 5 % di acetato di zinco, e successivamente trattate, dopo rapido lavaggio in acqua distillata, con la soluzione di nitroprussiato sodico al 5 %. Avvenuta la reazione, venivano mentate in balsamo, previa disidratazione e trattamento con xilolo. Ho potuto constatare che con questo metodo si hanno delle immagini, che sono perfettamente sovrapponibili a quelle ottenute con la tecnica ordinaria, salvo una certa differenza di colore, che di fatto non presenta alcun inconveniente. Ho dei preparati che, tenuti al buio, dopo due mesi non si sono scolorati. Ho ripreso così in esame il piede, l'epatopancreas e la ghiandola dell'albume. Nel piede, per quanto è possibile rilevare dalla intensità della reazione cromatica — criterio che in certo modo risponde a quello quantitativo — non si ha nel risveglio aumento sensibile del glutatione ridotto. Solo si rileva che, mentre nei fasci muscolari la reazione cromatica è più debole di quella che si ha nello stato di estivazione, l'epidermide appare intensamente colorata, contrariamente a quanto avviene durante il letargo.

Nell'epatopancreas il glutatione ridotto manca anche nello stato di risveglio. Per le ragioni sopra accennate non ho potuto procedere al trattamento con cianuro di potassio. Nella ghiandola dell'albume invece, col ritorno alla vita attiva, si ha la comparsa del glutatione ridotto, probabilmente per il passaggio di una certa quantità di tripeptide dalla forma ossidata a quella ridotta. Esso è localizzato nella parte basale delle cellule ghiandolari, in quella zona di protoplasma, con aspetto finemente granulare, che si riscontra al disopra del nucleo.

Biologia. — Una nuova specie di « *Ceratostomella* » (« *Ceratostomella catoniana* » G. Goid. n. sp.) vivente sul pero. Nota di G. GOIDÀNICH, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

Il genere *Ceratostomella* Sacc. ha in questi ultimi tempi assunto una importanza fitopatologica veramente rilevante. È noto che diverse specie di esso (*C. caerulea* Münch, *C. cana* Münch, *C. fagi* Loos, *C. ips* Rumb., *C. pluriannulata* Hedge., *C. pini* Münch e alcune altre) sono state riconosciute come i principali agenti delle colorazioni bleu, marrone, nere, grigie del legno da opera, di conifere ed anche di latifolie (« blaüfäule » dei tedeschi, « blueing » degli inglesi ⁽²⁾); alterazioni, queste, diffuse specialmente nei paesi del Nord Europa e dell'America e la cui importanza economica giustifica il gran numero di lavori comparsi e di ricerche fatte, dagli studiosi di patologia forestale di quei paesi, su questo argomento.

È parimenti noto che la forma perfetta, sessuata, del fungo *Graphium ulmi* Schwarz, il parassita dell'Olmo, di tristissima fama anche per la nostra agricoltura, è essa pure un ascomicete appartenente al genere *Ceratostomella*, e precisamente la *C. ulmi* Buis.

Recentemente, poi, è stata descritta in Jugoslavia dal Georgevitch, una diffusa malattia delle quercie, dai tessuti legnosi alterati delle quali l'A. ha potuto isolare una nuova specie di *Ceratostomella*: *C. merolinensis* Georg. Questo fungo è, secondo l'autore, un parassita virulento e vive nei vasi legnosi delle piante, in cui induce una forte formazione di tilli; si comporta, cioè, come la *Ceratostomella ulmi* ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) Si noti che mentre tali denominazioni tradotte letteralmente significherebbero « marciume o colorazione bleu » si usano anche quando le colorazioni prodotte da questi funghi non sono bleu, ma ad es. nere, marrone, grigie; con una estensione, cioè, di un termine, dato originariamente ad una determinata alterazione, anche ad altre similari, cosa che seppure errata è abbastanza frequente nel campo fitopatologico.

(3) Con vero rincrescimento non ho potuto consultare il lavoro che il GEORGEVITCH ha scritto su questa malattia e di cui ho notizia solo attraverso brevi riassunti comparsi in alcune riviste (e anche questi, se non erro, si riferiscono non al lavoro originale, ma ad un riassunto di esso comparso in « Botanisches Centralblatt », n. F., Bd. 18, 1931, p. 57, a firma del GEORGEVITCH stesso!). Nonostante i miei ripetutissimi tentativi per procurarmelo, non sono riuscito nell'intento, tanto da essere costretto a dichiarare la *Ceratostomella*, che io descrivo, come una specie nuova senza averla prima confrontata con quella che è descritta nel sunnominato lavoro. È vero che poche sono le probabilità che questi due funghi si possano tra di loro identificare, dato che la *C. merolinensis*, fungo parassita della quercia, difficilmente si adatterebbe ad attaccare un ospite così distante sistematicamente come il pero.

Mi pare pertanto sia cosa interessante segnalare la presenza di una nuova *Ceratostomella*, isolata da piante deperienti di pero. Le ricerche fin'ora fatte non mi permettono di dire con sicurezza se questa *Ceratostomella* sia effettivamente un parassita ed in tal caso se di grande o di scarsa virulenza. È certo, però, che almeno dalle piante esaminate (piante che si mostravano gravemente deperienti ed in parte disseccate) ho isolato con prevalenza la *Ceratostomella* e che i tessuti legnosi in cui viveva questo fungo erano gravemente alterati, sì da lasciare facilmente supporre che le condizioni patologiche in cui si trovavano quei peri fossero proprio la conseguenza di questa alterazione e che quindi fosse la presenza della *Ceratostomella*, se non l'unica, una delle maggiori cause del deperimento delle piante stesse, almeno nei casi esaminati.

Il materiale di studio mi fu con grande cortesia inviato dal prof. G. Catoni, direttore dell'Osservatorio per le malattie delle piante di Trento, che ringrazio vivamente.

Il prof. Catoni mi comunicava anche che molte piante così ammalate si trovano nell'alta Valle di Sole, in Val di Non e a Madiano di Bergine. Anche i meli sarebbero colpiti.

Le piante che io ebbi in esame erano dei giovani peri di due anni: il legno era ancora verde fino a circa 30 cm. da terra, al disopra era secco ed invaso dall'insetto *Xyleborus dispar* F. che vi aveva scavato numerose gallerie⁽¹⁾. Quali caratteri patologici si osservano: una colorazione marrone nel legno, marcata specialmente verso l'alto, meno verso il colletto ed il fittone radicale. Questa colorazione non interessava tutta la sezione del tronco, ma certi settori, ben distintamente delimitati, erano normali. Nei tessuti alterati, mediante esame microscopico, ho potuto osservare la presenza del micelio (ed in taluni casi anche in abbastanza abbondante quantità) e, seppure raramente, qualche fruttificazione con le spore del fungo. Si osserva inoltre un imbrunimento di alcune cellule del parenchima legnoso, dei raggi midollari, di alcuni vasi che appaiono occlusi da una sostanza gommosa.

Il fungo, come ho detto sopra, è una specie nuova che io chiamo *Ceratostomella catoniana*, dedicandola al prof. Catoni che rilevò per primo la presenza di tale *Ceratostomella* sui peri e me ne inviò alcune culture fino dal settembre 1934.

Non mi intrattengo a lungo sulla descrizione dei caratteri sistematici di questa specie, argomento che assieme ad alcuni altri troverà il dovuto svolgimento in altra pubblicazione; riporto solo alcune particolarità in essa rilevate e che io ritengo di speciale interesse.

(1) Secondo il prof. Catoni questo insetto sarebbe la causa prima della malattia e i funghi sarebbero dei parassiti secondari. Non è però, a mio parere, improbabile che anche in questo caso ci troviamo di fronte ad un fenomeno di simbiosi mutualistica fra i due organismi: fungo ed insetto. Fenomeni che, in special modo nei riguardi di funghi del tipo della *Ceratostomella* e di insetti del tipo dello *Xyleborus*, sono assai frequenti e ben noti.

Questo fungo possiede costantemente oltre la forma perfetta, sessuata (*Ceratostomella*), due forme di riproduzione agamica, asessuata. Una di queste, quella che compare per prima, consiste in fruttificazioni ramificate, composte di conidi unicellulari di forma varia: fruttificazioni che nel loro insieme ricordano quelle del genere *Cladosporium*. L'altra è una fruttificazione coremiale appartenente al genere *Graphium*, che per alcune sue caratteristiche ritengo opportuno indicarla come una specie nuova col nome *Gr. pirinum* G. Goid.

Dal punto di vista della sessualità la *Ceratostomella catoniana* è omotallica: di 20 isolamenti monosporici fatti, non uno ha mancato di dar luogo alla produzione dei periteci. Il fatto se le *Ceratostomelle* siano funghi omotetotallici è un argomento ancora molto discusso: ricerche di certi autori, alcune delle quali per il vero non molto convincenti, starebbero a dimostrare che in certi casi si tratta di funghi eterotallici, in altri casi del contrario. Sarebbe opportuno che, a questo riguardo, fosse compiuto uno studio completo comparativo di tutte le forme del genere.

Nella prossima primavera è mia intenzione eseguire delle inoculazioni di *Ceratostomella catoniana* su peri e su meli, per studiare il comportamento di questo fungo sull'ospite: per vedere, cioè, se si tratta di un parassita virulento, o di un parassita ad azione secondaria o di un saprofita.

È veramente augurabile che, nel caso si tratti di un parassita vero e proprio, non assuma esso una diffusione eccessiva, perchè in tal caso con ogni probabilità avrà uno sviluppo tracheicolo e son ben noti gli effetti letali che i funghi con questo particolare *habitat* producono sulle piante che essi aggrediscono ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

(1) Recentemente molte specie del genere *Ceratostomella* sono state passate al genere *Ophiostoma* v. Höhnelt. In una mia prossima pubblicazione esaminerò se, come è possibile, anche la *Ceratostomella catoniana* deve rientrare in quest'ultimo genere.

(2) Dopo che la presente Nota era già stampata ho potuto esaminare la diagnosi della *Ceratostomella merolinensis* Georg.: questa specie non è identificabile con la *Ceratostomella catoniana*.

Biologia. — *Risultati della separazione dei due primi blastomeri dell'uovo di Lampreda* (« *Lampetra* [*Petromyzon*] *fluvialis* L. »)⁽¹⁾. Nota di A. M. MACCAGNO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

La separazione dei blastomeri della Lampreda fu ottenuta da E. Bataillon⁽³⁾ sottoponendo le uova, dopo la fecondazione, a soluzioni ipertoniche di zucchero, o di sale. Egli descrisse lo sviluppo indipendente dei due blastomeri, fino alla formazione di piccoli embrioni perfettamente conformati. Poichè, dall'epoca della comparsa delle due Note del Bataillon ad oggi la

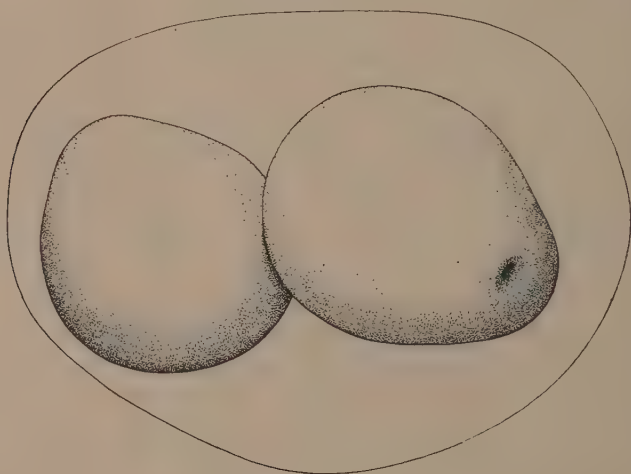


Fig. 1. — Due gastrule provenienti dai due primi blastomeri separati.

questione della potenza dei primi blastomeri è stata oggetto di ampie e fruttuose ricerche, su altro materiale, e notevoli contributi sperimentali e teorici hanno portato nuova luce su quei problemi, ho creduto utile di riprendere in esame l'argomento, sperimentando su questo materiale, tanto adatto a simil genere di studi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) E. BATAILLON, « C. R. Ac. Sc. », Paris, to. CXXX (1900), p. 1201; *ibid.*, to. CXXXI (1900), p. 1480.

La separazione dei blastomeri fu ottenuta con metodo analogo a quello proposto dal Bataillon (la tecnica sarà descritta più particolarmente nel lavoro in esteso) su uova fecondate artificialmente.

La prima serie di esperimenti (1933) si può dividere in vari tipi a seconda del numero e delle dimensioni dei blastomeri di cui si è ottenuta la separazione in seguito all'azione della soluzione zuccherina.

Tipo A (due blastomeri di eguali dimensioni): su 26 uova, due hanno dato una sola gastrula, mentre l'altro blastomero è morto, dopo essersi segmentato; 24 hanno mostrato un completo potere regolativo con la gastrulazione e lo sviluppo normale e indipendente di ambedue.

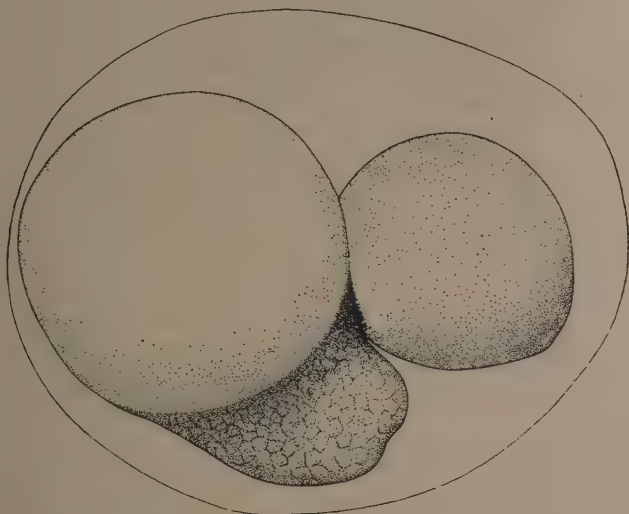


Fig. 2. — Una gastrula (a destra) e una exogastrula (a sinistra).

Tipo B (due blastomeri di dimensioni un po' diverse): su 56 uova, 27 hanno dato due embrioni, 29 hanno dato un solo embrione da uno dei blastomeri, mentre l'altro è morto senza riuscire a gastrulare, pur essendosi segmentato; in 18 casi l'unico embrione si è sviluppato dal blastomero più piccolo, in 5 dal più grande, in 6 non fu potuta stabilire la dimensione del blastomero sviluppatosi.

La seconda serie di esperimenti (1934) ha dato i seguenti risultati: su 286 uova, 186 hanno dato due embrioni, 100 uno solo, mentre l'altro blastomero non è riuscito a gastrulare.

In totale quindi, su 368 uova, nel 64% si è avuta la gastrulazione di ambedue i blastomeri, nel 36% di uno solo.

Lo stadio di sviluppo raggiunto dagli embrioni derivanti da 1/2 blastomero, è diverso secondo i casi, ma nella maggioranza si è ottenuto lo

sviluppo fino a larvette che hanno completamente riassorbito il tuorlo, stadio oltre il quale non è possibile condurre neppure le larve normali. Gli embrioni e le larve ottenuti da 1/2 blastomero sono per lo più assolutamente normali, difettano soltanto per le dimensioni; il loro volume è circa metà di quello dei controlli.

I due blastomeri, per lo più, procedono nello sviluppo in modo perfettamente simile fino alla gastrulazione. A questo stadio cominciano a manifestarsi le differenze. In alcune uova, ambedue le blastule gastrulano regolarmente e procedono oltre nello sviluppo; in altre una sola subisce la gastrulazione in modo normale, mentre l'altra assume l'aspetto indicato dalla figura a sinistra della fig. 2. Queste formazioni possono definirsi « exogastrule » come quelle che sono state ottenute da uova di Echinodermi, di Anfibi, e di Ciclostomi, in varie condizioni sperimentali. Alcune delle exogastrule poi si regolano, invaginandosi, e dando luogo ad un embrione gemello di quello formato dall'altro blastomero, solo un po' più arretrato, ma che può raggiungere infine il termine dello sviluppo; altre invece muoiono senza aver dato luogo ad una ontogenesi regolare. Nel 64 % di uova in cui ambedue i blastomeri si sviluppano bisogna quindi comprendere questi casi di embrioni derivanti da una exogastrula che si è successivamente regolata.

La più plausibile interpretazione di questi fenomeni è quella già offerta dallo Spemann per le uova di *Triton*⁽¹⁾, che mette in relazione la maggiore o minore capacità di sviluppo dei due blastomeri con la maggiore o minore quantità di materiale del futuro labbro dorsale del blastoporo (organizzatore) che si trova in ciascuno dei due blastomeri, in conseguenza dell'angolo che il piano del primo solco fa con il futuro piano di simmetria dell'embrione.

Che questo angolo possa essere di qualsiasi ampiezza è stato dimostrato da M. Pitotti⁽²⁾: è quindi logico supporre che, quando sia minore di 45°, ambedue i blastomeri ricevano quantità sufficienti di materiale del labbro dorsale per regolarsi ciascuno in un embrione, quando sia maggiore di 45° i due blastomeri ricevano quantità molto diverse di tale materiale, sì che uno può svilupparsi facilmente, l'altro più o meno difficilmente. Quando l'angolo è vicino a 90° uno dei due blastomeri riceve tutto l'organizzatore, l'altro nulla, ed è incapace di dare luogo a una ontogenesi regolare.

Si conclude pertanto, che *i due primi blastomeri dell'uovo di lampreda non sono sempre totipotenti* (come s'era affermato in seguito agli esperimenti del Bataillon), *ma soltanto nel 64 % circa dei casi; e la loro maggiore o minore capacità regolativa dipende verosimilmente dal modo come il materiale del futuro labbro dorsale del blastoporo viene ripartito fra di essi.*

(1) H. SPEMANN, « Arch. f. Entw.-Mech. », XII (1901), XV (1902), XVI (1903); G. RUUD, *ibid.*, CV (1925).

(2) Questi « Rendiconti », questo fascicolo.

Biologia. — *Relazione del primo piano di segmentazione con il piano di simmetria dell'embrione di Lampreda* (« *Lampetra* [*Petromyzon*] *fluviatilis* L. »). ⁽¹⁾ Nota di MILENA PITOTTI, presentata ⁽²⁾ dal CORRISP. F. RAFFAELE.

Il metodo delle colorazioni vitali localizzate, usato con tanto successo dal Vogt per determinare la topografia degli abbozzi degli organi nelle uova di Anfibi, fu applicato anche alle uova di Lampreda da R. Weissenberg (1926-33). Alcune ricerche in corso in questo Istituto, consigliarono però di intraprendere nuove serie di esperimenti sul materiale a nostra disposizione, per cercare di decidere alcune questioni che non sembravano interamente risolte dagli studi di quell'Autore. In primo luogo interessava la posizione del primo piano di segmentazione rispetto al piano di simmetria del futuro embrione, per sapere quali materiali venivano a trovarsi nei due primi blastomeri, che, nelle ricerche di A. Maccagno ⁽³⁾, venivano isolati. Il Weissenberg ⁽⁴⁾ in una serie di esperimenti eseguiti su *Lampetra planeri* e *L. fluviatilis*, nel 1926 e 1927, su un totale di 100 uova, trovò che in 68 il primo piano di segmentazione coincideva con il piano di simmetria, in 22 era orientato a 90° rispetto a questo (il quale coincideva quindi con il 2° piano di segmentazione) e in 10 era obliquo.

Concluse quindi che il primo solco, nell'uovo di Lampreda, non fa un angolo qualsiasi con il futuro piano di simmetria (come avviene invece, secondo il Vogt, negli Urodeli) ma coincide con questo nella maggior parte dei casi, e soltanto in 1/4-1/3 dei casi è orientato a 90°.

In una prima serie di esperimenti, eseguiti nella primavera del 1933, coloravo con solfato di Bleu Nilo (la tecnica sarà meglio indicata nel lavoro in esteso) il centro di uno dei due primi blastomeri, su una superficie il più possibile ristretta. Su un totale di 37 uova che gastrularono normalmente, e in cui mi fu possibile riconoscere la colorazione e la posizione del blastoporo rispetto ad essa, 5 sole mostrarono il blastoporo sul 1° solco; nelle altre 32 esso si era formato o sul secondo solco, o in posizione intermedia, ma più prossima a questo (cfr. fig. 1). Mi avvidi tuttavia della difficoltà (già segnalata dal Vogt nella discussione dei risultati del Weissen-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) Questi « Rendiconti », questo fascicolo.

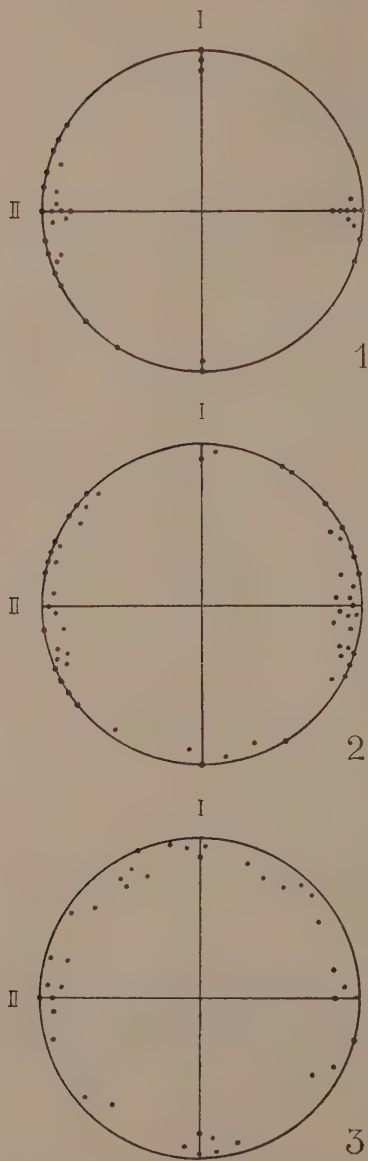
(4) R. WEISSENBERG, « Verhandl. d. Anat. Gesell. », *Ergänzungsheft zum Anat. Anz.*, Bd. LXIII (1927), pp. 26-35.

berg (1927)) di valutare con precisione gli angoli rispetto ad un contrassegno che, con il progredire della segmentazione e dello sviluppo, andava diffondendosi e perdendo di chiarezza.

In una seconda serie di esperimenti (1934) misi perciò un contrassegno in mezzo a ciascuno dei due primi blastomeri, in posizione equatoriale, col solfato di Bleu Nilo in uno e con la Vesuvina nell'altro. I risultati ottenuti dalle 59 uova che si sono regolarmente sviluppate, sono indicati schematicamente nella fig. 2, e si vede che raramente il blastoporo si forma esattamente sul piano del 1° o del 2° solco, più spesso in posizione intermedia, ma sempre piuttosto in prossimità del 2° che non del 1° solco.

Una terza serie di esperimenti (1934), in cui, oltre al centro dei due primi blastomeri, era contrassegnato pure il punto d'incrocio dei due primi solchi al polo animale, mi diede risultati un poco differenti (cfr. fig. 3) nel senso che la posizione del blastoporo appare anche più irregolare, rispetto ai due primi solchi. Nelle 39 uova esaminate, il blastoporo si è formato in tutte le posizioni possibili della circonferenza equatoriale, senza mostrare alcuna preferenza per i piani dell'uno o l'altro solco.

Nella interpretazione dei risultati di questi esperimenti, occorre tener conto della difficoltà notevole di una esatta valutazione degli angoli, rispetto a contrassegni che, per la natura stessa del materiale (a differenza dell'uovo degli Anfibi, la membrana è, nella lampreda, molto discosta dalla superficie dell'uovo e mi è stato impossibile toglierla) sono piuttosto diffusi. Delle tre serie di esperimenti, quella in cui gli



Schemi indicanti la posizione del blastoporo rispetto ai primi solchi (I e II) nelle tre serie di esperimenti descritte nel testo.

angoli furono valutati con maggior precisione è senza dubbio l'ultima. Perciò mi pare che l'unica conclusione che si possa ragionevolmente trarre dalle ricerche descritte, le quali sono state condotte su uova provenienti da diverse femmine di *Lampetra fluviatilis*, è che il primo piano di segmentazione può fare qualsiasi angolo con il piano di simmetria dell'embrione futuro, analogamente a quanto avviene negli Urodeli. Sembrano però prevalere, contrariamente a quanto risulta dalle citate ricerche del Weissenberg, le orientazioni più prossime alla ortogonale rispetto al primo solco. Non è da escludersi che, fra le uova provenienti da diverse femmine, vi siano differenze più o meno costanti, per quanto riguarda la posizione del 1° solco.

Altri risultati che si possono trarre dall'esame dei miei protocolli si riferiscono alla posizione del blastoporo rispetto all'equatore, e alla posizione del piano di simmetria rispetto al polo animale. Presa come punto di riferimento la macula polare, cioè quell'area da cui geme il plasma polare (cfr. Montalenti, 1934)⁽¹⁾, e in cui entra lo spermio, e considerato coincidente con il polo animale, rimane definito di conseguenza l'equatore. Risulta dalle colorazioni da me eseguite che il blastoporo può formarsi, o sull'equatore, o poco sopra o sotto di esso, in una zona, la cui ampiezza fu stimata di circa 15°-20°. D'altra parte, il piano di simmetria, non sempre passa per il polo animale (cioè per la macula polare, la cui posizione in alcune serie di esperimenti è stata contrassegnata con la colorazione) ma può oscillare alquanto intorno ad essa, facendo cioè un angolo (sempre piuttosto piccolo) con l'asse che unisce il polo animale a quello vegetativo. La regione del polo animale corrisponde alla regione cefalica del futuro embrione; infatti le colorazioni che vi si pongono si ritrovano poi o nell'encefalo o nell'ectoderma cefalico.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XX, ser. 6^a (1934), pp. 54-56.

Biologia vegetale. — *Come aumenta il numero dei cromosomi nei nuclei inferiori del sacco embrionale di « Myricaria germanica Desv. »* ⁽¹⁾. Nota di BIANCA ZABBAN, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Lo sviluppo embriologico della *Myricaria germanica* è stato già studiato dal naturalista svedese Frisendahl, il quale lo ha esposto ampiamente in un suo importante lavoro ⁽³⁾ pubblicato nel 1912; ma poichè l'interpretazione da lui data ad alcune delle figure che aveva osservate non era molto convincente, e poichè d'altra parte questa forma di sviluppo sembrava potersi confrontare con quella di altre piante studiate più recentemente all'Istituto Botanico di Roma, io ho ripreso queste osservazioni e sono giunta infatti a conclusioni che non collimano con quelle del Frisendahl.

La *Myricaria germanica* è una pianta spontanea in tutta Europa e nell'Asia occidentale. Da noi si trova nell'Italia settentrionale è centrale, dalla regione submontana all'alpina, e cresce lungo i corsi d'acqua e nell'alveo dei torrenti asciutti. Fiorisce da maggio a luglio, con fiori piccoli raccolti in spighe che costituiscono nell'insieme una pannocchia piramidale terminale; spesso una seconda fioritura segue a quella primaverile.

Il pistillo consta di un ovario triloculare, ovale e allungato, sormontato da uno stimma sessile e trilobo. Il frutto è una capsula conica contenente numerosi semi, provvisti di una resta piumosa che ne favorisce il trasporto per opera del vento.

Nel giardino dell'Istituto Botanico dell'Università di Roma sono coltivate alcune piante di *Myricaria* che hanno fiorito sempre regolarmente, benchè da due anni a questa parte si siano andate impoverendo fino quasi a disseccarsi. Su materiale raccolto da questi esemplari, fissato e colorato, io ho osservato e seguito tutto lo sviluppo del gametofito, come adesso esporrò, mettendo a confronto l'interpretazione data da me, con quella del Frisendahl.

Nella giovane nucella ho notato, come anch'egli ha fatto, che la cellula madre delle macrospore si differenzia ben presto nella regione micropilare, ingrossa notevolmente, quindi entra in divisione. Sia dopo la prima divisione (*eterotipica*) che dopo la seconda (*omeotipica*) non si forma alcuna parete divisoria tra i nuclei, ma tutte e quattro le macrospore con-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) FRISENDAHL A., *Cytologische und entwicklungsgeschichtliche Studien an Myricaria germanica*, « Akademische Abhandlung », Upsala, 1912.

corrono alla formazione del sacco embrionale. Tale comportamento è simile a quello riscontrato in *Euphorbia dulcis*, in *Lilium* e in *Fritillaria persica*. Ciò che desta particolare interesse però è il comportamento dei cromosomi di questi nuclei, il cui numero aploide è 12. Nello stadio di 4 nuclei macrosporiali, si passa da figure in cui i quattro nuclei sono tutti eguali fra di loro, distribuiti in croce nella massa di citoplasma comune della primitiva cellula madre, e con numero aploide di cromosomi, a figure che presentano due nuclei posti alla estremità micropilare della nucella e due a quella calazale, non più di grossezza eguale ma molto più grossi questi di quelli, e aventi un numero di cromosomi più che raddoppiato. È appunto nell'interpretazione dello stadio rappresentato da questa figura che il mio parere è discorde da quello del Frisendahl.

Secondo questo autore il numero dei cromosomi nei due nuclei calazali aumenterebbe per questo meccanismo: che i granuli di cromatina nei quali, come sempre avviene, i cromosomi si sono scomposti nella fase di riposo, non si riuniscono più in gran numero a dare all'inizio della successiva divisione i cromosomi normali; ma si ravvicinano tra loro a due a due, costituendo un numero molto grande di coppie, e i due granuli di ogni coppia si fondono poi insieme costituendo così un cromosomo, che risulterà di lunghezza molto minore, metà circa di quella dei cromosomi dei nuclei superiori del sacco; questo porterebbe quindi a un numero di cromosomi molto maggiore (da 40 a 70) del numero aploide 12 che rimane negli altri due nuclei. La disposizione normale dei nuclei nella cellula madre, che direttamente diviene sacco embrionale, sarebbe dunque, secondo Frisendahl, quella di due coppie di nuclei, tra le quali si formano dei vacuoli che vengono a convergere in un unico grande vacuolo centrale, nel mentre che alla zona calazale avviene il suddetto ingrossamento dei nuclei; la terza divisione, che si compie quasi contemporaneamente nella coppia superiore e in quella inferiore, porta dallo stadio di 4 nuclei allo stadio 8-nucleato, che sarà in tutto simile a quello di un gametofito adulto e completo. Frisendahl ha bensì notato anche il caso in cui dei quattro nuclei macrosporiali ne vada solo uno al polo micropilare e gli altri tre vadano al polo calazale; in tal caso egli non ha riscontrato che avvenisse la moltiplicazione dei cromosomi, ma i tre nuclei inferiori potevano entrare in divisione e giungere fino allo stadio di fuso: i tre fusi anzi accennavano ad avvicinarsi tra di loro, ma egli non ha potuto seguire il loro divenire, ed ammette che questo comportamento appartenga ad un tipo di sacco embrionale 5-nucleato che si formerebbe solo nei fiori della seconda fioritura. In questi ovuli dunque, similmente a quello che Miss Sargent suppone avvenga in *Lilium martagon*, dallo stadio di profase i tre nuclei calazali tornerebbero allo stadio di riposo, perchè la loro divisione completa è impedita dal fatto che essi sono compressi tra il vacuolo centrale e la parete del sacco; e intanto il nucleo superiore si dividerebbe una volta, dando luogo a un gametofito adulto

risultante di 5 nuclei, che poi disponendosi in un modo piuttosto che in un altro, darebbero, sempre secondo Frisendahl, tre tipi diversi di sacco embrionale.

Da Autori diversi è stato notato in alcune Liliacee, che presentano un tipo di sviluppo del gametofito femminile diverso dal tipo normale delle Angiosperme, un aumento nel numero dei cromosomi in alcuni nuclei del sacco embrionale, con conseguente aumento della grossezza di essi in confronto con i rimanenti. Diverse sono le interpretazioni date a questo fatto; ricordo, perchè mi pare la più attendibile e perchè si riferisce al caso che più si riavvicina al caso di *Myricaria germanica*, quella che il Carano ha dato per la *Euphorbia dulcis*, e confermata dalla Bambacioni per *Fritillaria persica*, *Lilium candidum*, *Tulipa Gesneriana*, ecc. In queste piante in cui i quattro nuclei macrosporiali partecipano tutti e quattro alla formazione del gametofito, distribuendosi uno al micropilo e tre alla calaza, è stato osservato un avvicinamento dei tre nuclei calazali tra di loro, che porta nell'*Euphorbia* a una parziale saldatura dalla quale si formano poi due nuclei molto più voluminosi, e in *Fritillaria*, *Lilium*, *Tulipa*, ecc., a una figura cariocinetica avente l'aspetto di un fuso tripolare, che poi si risolve in un normale fuso bipolare avente i cromosomi risultanti dall'unione dei tre spiremi.

Ebbene, in *Myricaria* la disposizione in croce dei quattro nuclei macrosporiali, dei quali poi uno andrà al polo superiore e tre al polo inferiore, risulta a me come uno stadio ordinario, normale di questo sviluppo: pur avendo sezionato abbondante materiale non ho mai osservato una disposizione $2 + 2$ che si possa attribuire, come ritiene il Frisendahl, alla fase che segue subito la divisione omeotipica. Le figure con due nuclei a ciascuna estremità del sacco, frequentissime, presentano infatti sempre un grosso vacuolo centrale e grossezza diversa nelle due coppie di nuclei e nelle dimensioni complessive della nucella; il che indica che siamo in una fase molto più avanzata, che egli nello studio degli stadi successivi si è lasciato sfuggire.

Chiaramente ho potuto vedere la fase in cui il nucleo superiore entra in divisione, mentre al polo inferiore i tre nuclei iniziano anch'essi la cariocinesi, e al momento della metafase sono vicinissimi tra loro in modo che i singoli fusi confluiscono in un fuso solo.

Inoltre in parecchi preparati ho incontrato un altro stadio molto importante, derivante senza dubbio dal precedente, e che presenta alla calaza una unica piastra equatoriale con un numero grandissimo di cromosomi, e in altri preparati ancora l'anafase, di dimensioni molto maggiori di quella che si compie simultaneamente al polo superiore, e infine la formazione di due nuclei voluminosi alla calaza. La fase di riposo dopo la terza divisione porta quindi due nuclei al polo superiore disposti un po' obliquamente, e, separati da questi da un enorme vacuolo, i due nuclei al polo inferiore contenenti più nucleoli. Questa è appunto la figura che il Frisendahl rite-

neva di poter porre come immediatamente successiva a quella delle quattro macrospore disposte in croce, senza che avvenisse fra le due fasi alcuna divisione nucleare; mentre da quanto ho esposto si deve ammettere che la terza divisione non sia che un passaggio dallo stadio di quattro nuclei macrosporiali a quello di questi nuovi quattro nuclei, di diversa formazione, poichè quelli inferiori risultano dalla unione e successiva divisione in due dei tre nuclei calazali.

Presto le due coppie iniziano un'altra divisione che è la quarta di questo sviluppo; i fusi alla regione micropilare si presentano perpendicolari od obliqui tra di loro, e quelli alla regione calazale sono di fianco l'uno all'altro, e su un piano diverso da quelli superiori. Le fasi non sono simultanee ai due poli, ma la divisione dei nuclei superiori si inizia un poco prima che negli inferiori.

Biologia vegetale. — *Risultati di alcune culture « in vitro » di cellule vegetali isolate.* Nota di LUISA MAROTTA⁽¹⁾, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Haberlandt nel 1902 per primo si è occupato di culture di cellule vegetali isolate⁽³⁾. Il Winkler, nello stesso anno, ha potuto vedere divisioni normali in cellule parenchimatiche di radici di *Vicia faba*, avendo aggiunto alla soluzione Knop e glucosio il 0,002% di solfato di cobalto; però non s'indugia a descrivere il processo, che nessuno dopo di lui è riuscito ad ottenere. Le osservazioni del Winkler avrebbero importanza fondamentale, poichè permetterebbero di parlare anche per le cellule vegetali isolate « in vitro » (come già per quelle animali) di vere culture, intendendo con tal nome la persistenza, fuori dell'organismo, di frammenti di tessuto o di cellule isolate, che possono moltiplicarsi prendendo dall'ambiente artificiale, in cui sono messe, il materiale nutritivo necessario.

In pratica è difficile ottenere cellule vegetali integre e sane, tali da potersi coltivare « in vitro » e poterne vedere le eventuali modificazioni. L'ambiente di cultura, la temperatura, l'umidità, la pressione osmotica devono avvicinarsi il più possibile al normale. Per eseguire esperimenti in questo campo occorre dare alle cellule isolate condizioni che corrispondano il più possibile a quelle dell'ambiente naturale e cercare di evitare lesioni o danni durante l'isolamento.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(3) G. HABERLANDT, *Culturversuche mit isolierten Pflanzenzellen.* « Sitzungsberichte der mathematisch-naturwiss. Classe der Akad. Wissensch. Berlin », CXI. Bd., I. Abteil., 1902, pp. 69-90.

Solo con la pratica si possono attuare questi principi. I diversi autori hanno adottato svariati metodi che si prestano più o meno bene, a seconda del materiale e del tempo in cui si esperimenta, sia per l'isolamento sia per la cultura delle cellule vegetali « in vitro ».

Per l'isolamento vi è il *metodo meccanico* (Bobiliooff), che consiste nello sminuzzare con aghi sterilizzati un piccolo pezzo di foglia giovane finchè al microscopio non appaiono cellule sane isolate ⁽¹⁾; il *metodo fisiologico* (Czech) che consiste nel trattare con soluzioni centinormali di KCl o $MgCl_2$ i pezzetti di foglia giovane finchè le cellule non si disgiungano l'una dall'altra ⁽²⁾; il metodo del *distacco spontaneo* (Korschelt) che si attua ogni volta che si voglia sperimentare su cellule di parenchima lenticellare di talee di salice, dopo averle tenute in acqua per molto tempo (anche un mese, durante l'inverno) ⁽³⁾.

I mezzi di cultura impiegati sono stati diversi: liquidi (soluzione di Knop con o senza zucchero), semisolidi e solidi (soluzione di Knop con varie proporzioni di agar). Bobiliooff adopera per le sue culture anche altre soluzioni oltre a quella di Knop (d'Artari ecc.). L'ambiente di cultura deve essere in ogni caso sterilizzato.

Da vario tempo ho iniziato esperienze su questo argomento e, quantunque le mie ricerche non siano ancora ultimate, ritengo utile riassumere in questa Nota i risultati finora ottenuti. Per l'isolamento delle cellule ho adottato i vari metodi sopra indicati, sebbene ben presto mi sia dovuta accorgere che il metodo meccanico è il più adatto; il metodo fisiologico di Czech non è privo di inconvenienti. Infatti ritengo che cellule isolate col metodo delle soluzioni centinormali di KCl e $MgCl_2$ non siano esenti da eventuali danni che ne deteriorano il contenuto prima ancora di esser sottoposte ad esperimento, come accade per cellule verdi, nelle quali « in vitro » non si ha processo di organizzazione. Il distacco spontaneo l'ho adottato per cellule isolate di parenchima lenticellare di salice. Come mezzi di cultura ho in ogni caso adoperato, nelle culture liquide, soluzione di Knop con o senza glucosio o saccarosio in diverse percentuali e, nelle culture solide, la stessa soluzione con aggiunta di agar all'1,5%. Ma, veramente, al contrario di quanto afferma Bobiliooff, per cellule isolate la cultura solida non mi pare tanto adatta, dato che è molto difficile il trapianto del materiale da un substrato all'altro. — Inoltre ho eseguito le mie esperienze a diverse temperature: dalla temperatura ambiente di 13°–14° C, a quella del termostato di 30°–33°.

Le maggiori difficoltà incontrate nelle mie esperienze sono state quelle di dover conciliare con una completa sterilità una temperatura relativamente elevata (come quella del termostato), che, mentre favorisce la buona riuscita

(1) BOBILIOFF-PREISSER, *Beobachtungen an isolierten Palisaden- und Schwammparenchymzellen*. « Beihefte zum bot. Centralblatt », Bd. XXXIII, 1917, p. 248.

(2) H. CZECH, *Kultur von pflanzlichen Gewebezellen*. « Archiv für experimentelle Zellforschung », Bd. III, 1927, p. 176.

(3) E. KORSCHOLT, *Regeneration und Transplantation*. Berlin, 1931, Bd. II, Teil I, p. 417.

dell'esperimento, facilita d'altra parte lo sviluppo di microrganismi, esiziali per tali culture.

Eseguite con diverso materiale e in diversa maniera, posso così riassumere le mie esperienze:

a) *cellule di parenchima lenticellare di salice* (ottenute col metodo del distacco spontaneo) mostrano in cultura (fatta quasi sempre in goccia sospesa) marcata sopravvivenza, evidente accrescimento ed ispessimento della membrana. Queste cellule durano in vita fino a qualche mese. Ottimamente s'è prestata per queste culture la soluzione Knop con l'aggiunta dell'1,5 % di glucosio. Le cellule di parenchima lenticellare di salice misurano in media una lunghezza da 74 a 110 μ per una larghezza da 39 a 60 μ . L'accrescimento, anche se minimo (come in alcuni casi), si nota sempre e compare gradualmente. Dopo oltre un mese di sopravvivenza in cultura, queste cellule cominciano a presentare fenomeni d'involuzione: l'accrescimento cessa e qualche volta l'interno della cellula si riempie di globetti rifrangenti, che possono dipendere da alterazioni di massa protoplasmatica o da depositi colloidali.

b) *Cellule del tessuto a palizzata e spugnoso di foglie giovani di Lamium purpureum*: secondo le vedute del Haberlandt espresse nella sua opera sopracitata, ho ripreso alcuni esperimenti da lui attuati sotto altro indirizzo, ma adoperando il suo medesimo materiale. Oltre ai fenomeni suddetti per cellule parenchimatiche di salice, queste cellule di *Lamium* presentano, quando sono isolate «in vitro», evidente e prolungato il processo fotosintetico, cioè comparsa di amido, dopo essere state esposte a luce diffusa del giorno, e migrazione di esso durante la notte. Nel periodo di cultura i cloroplasti delle cellule a palizzata tendono a portarsi tutti verso il centro e la membrana aumenta di spessore; invece i cloroplasti delle cellule del tessuto spugnoso rimangono alla periferia contro la membrana ispessita, mentre la cellula tende ad arrotondarsi. Queste culture possono conservarsi per oltre tre mesi dall'isolamento delle cellule: la diversità di sopravvivenza è in rapporto alle condizioni intrinseche delle singole cellule. — Durante tutto il periodo di cultura esse presentano un accrescimento (sia pure lento), movimento del plasma, organizzazione. Quando cominciano a manifestarsi fenomeni di stanchezza, si scolorano i cloroplasti, le cellule perdono il turgore, dimostrando tutti i caratteri di una incipiente degenerazione.

c) *Cellule verdi di foglie giovani di Vicia faba* hanno dimostrato al principio della cultura i medesimi fenomeni di quelle di *Lamium*: esse però resistono solo pochi giorni; presto i cloroplasti assumono una colorazione bruna. La membrana cellulare rimane sottile; tuttavia, nel breve periodo di cultura, queste cellule mostrano cambiamenti di forma, perchè si arrotondano, ed anche lieve accrescimento.

d) *Cellule isolate del tessuto a palizzata e spugnoso di Viola odorata* hanno una sopravvivenza maggiore di quelle di *Vicia faba*. Nei primi giorni di cultura presentano cambiamenti di forma e in seguito un accrescimento

accompagnato da ispessimento della membrana: la loro durata « in vitro » è di due mesi. Queste cellule presentano il fenomeno dell'organizzazione, finchè i cloroplasti, essendo invecchiata la cellula, ingialliscono e s'impiccoliscono, raggruppandosi intorno al nucleo per il fenomeno di « sistrofe ».

e) *Cellule di chiusura degli stomi* isolate hanno lunga sopravvivenza. Ho adoperato l'epidermide della pagina inferiore di foglie di *Lanium purpureum* e di *Tradescantia zebrina*. Su cellule stomatiche di foglie di *T. zebrina* ho fissato maggiormente la mia attenzione. Dopo qualche giorno di cultura artificiale gli stomi presentano un manifesto accrescimento: al decimo giorno si hanno le massime dimensioni, poi l'accrescimento s'arresta, mentre le misurazioni dei successivi giorni oscillano con alternanza di cifre, fino ad una stasi che porta ad un arrotondamento completo dello stoma dopo un mese di cultura. Il nucleo presenta spostamenti tra una misurazione e l'altra. Inoltre queste cellule, fornite di cloroplasti, sono capaci di organizzare; anzi talvolta ho osservato che l'organizzazione si presenta con intensità maggiore in cellule stomatiche in cultura che in cellule stomatiche di fresco separate dalla foglia. Ciò è forse dovuto al fatto che le cellule isolate in cultura sono sottratte all'influenza regolatrice dell'organo. Anche dopo terminato l'accrescimento le cellule stomatiche sopravvivono (mantenendo la cultura « pura ») fino a due mesi.

f) *Cellule isolate della cuffia* di apici radicali di diverse piantine germinanti (*Pisum sativum*, *Vicia faba*, *Lupinus albus*, *Zea mais*, *Helianthus grandiflorus*, *Vicia sativa*) resistono e sopravvivono in cultura nutritiva adatta. Presentano accrescimento, cambiamenti di forma e ispessimento della membrana. Ho coltivato non solo cellule della cuffia di radici primarie, ma anche quelle di radici laterali, volgendo questo studio particolarmente alle radici di *Zea mais*, le cui cellule della cuffia si prestano bene ad essere coltivate. Esse durano « in vitro » due mesi, quando l'ambiente è sterile. All'inizio della cultura queste cellule presentano un certo incurvamento che, dopo qualche settimana non si nota più. Caratteristico è il comportamento dei vacuoli: dopo 15-20 giorni di cultura in Knop e glucosio all'1,5 %, i vacuoli diventano più rinfrangenti del citoplasma e presentano l'aspetto di piccolissime gocce, forse ripiene di sostanze colloidali molto concentrate, come ha notato il Gautheret⁽¹⁾. Molto bene si lasciano coltivare le cellule della cuffia di *Lupinus albus*.

g) *Cellule di peli staminali di alcune specie di Tradescantia* (*T. zebrina*; *T. fluminensis*) si prestano bene ad essere coltivate « in vitro », perchè si possono isolare a gruppi di 2-3-4 cellule messe in pila; quindi si possono seguire facilmente e trapiantare senza difficoltà da un substrato all'altro.

(1) R. I. GAUTHERET, *Culture de cellules détachées de la coiffe*. « C. R. Soc. Biol. », to. CIX, n. 14, 1930; id., *Nouvelles recherches sur la culture des cellules de la coiffe*. « C. R. Acc. Sc. Paris », to. 197, 1931.

Queste cellule coltivate cambiano di forma (spesso acquistano forma clavata) e presentano movimento del nucleo e della massa plasmatica per diverso tempo. Inoltre le cellule di peli staminali contengono leucoplasti che appaiono addensati intorno al nucleo o anche sparsi per la cellula.

Concludendo: in tutte le numerose esperienze eseguite su diverso materiale le cellule isolate hanno dimostrato in cultura pura e in ambiente sterile, sopravvivenza, accrescimento, organizzazione, ma **mai** fenomeni di divisione, poichè, almeno per le piante esaminate, non ho mai potuto osservare figure cariocinetiche.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE annunzia la morte recentemente avvenuta del professore EMANUELE PATERNÒ e ricorda brevemente la figura dello Scomparso con le seguenti parole:

« Un grave lutto ha colpito la Scienza italiana con la perdita del professore Emanuele Paternò, che era il più anziano dei Soci della nostra Classe.

« La figura di Emanuele Paternò ebbe un tale rilievo, nel nostro come nel mondo scientifico internazionale, che io non ho bisogno di ricordare a voi quale orma profonda Egli abbia lasciato nella Storia della Chimica. Se l'opera fu vasta e feconda in tanti campi della Scienza da Lui coltivata, dalle sintesi in Chimica organica, alla fondazione della Stereochimica, alle indagini sulla natura e sulle proprietà delle soluzioni, l'Uomo fu per potenza e prontezza d'ingegno anche superiore alla stessa Sua opera; cosicchè Egli potè godere, attraverso ai frequenti contatti personali, l'amicizia, la stima e l'ammirazione dei più eminenti Scienziati del Mondo.

« I posti coperti nelle più grandi Accademie di tutti i Paesi mostrano quale prestigio accompagnasse il Suo nome, e quanta ragione di gloria ne derivasse alla Scienza italiana.

« La Scuola che fece capo a Lui è degna delle tradizioni create dal di Lui grande Maestro, Stanislao Cannizzaro; spetta al Paternò soprattutto il merito di avere rapidamente intuito in quali nuovi campi di studio bisognava avviare l'attività dei numerosi allievi, e il merito non minore di aver sentito che l'Uomo di Scienza non può dimenticare che il Mondo sorregge la Scienza non soltanto per il semplice soddisfacimento di una curiosità filosofica, ma perchè con le applicazioni ne venga un aumento di benessere all'Umanità. E pertanto Egli fu in continuo e fecondo contatto con tutte le produzioni chimiche aventi carattere e interesse industriale.

« Dell'Uomo non parlerò a voi, che tutti lo conosceste nella esplicazione energica delle Sue qualità, per le quali non conobbe limiti di affetto e di sacrificio nella devozione alla famiglia e alla Patria; non misurò l'azione e non curò il rischio e il suo danno nel sorreggere gli amici e nell'opporli agli avversari.

« E così quando, acciaccato dagli anni e dalle minorazioni che gli anni procurano, si ritirò nella Sua amata Palermo, tutti sentimmo che una immensa forza d'intelletto e di animo si immergeva nell'ombra; e da lungi la Sua figura ci parve, com'era, più grande e più degna.

« Alla Sua memoria, in nome vostro, io invio con affetto quasi di figlio un saluto riverente e devoto ».

Dà anche comunicazione alla Classe della morte del Socio A. DELLA VALLE alla cui memoria invia un reverente saluto.

Il Socio N. PARRAVANO a nome dei Chimici italiani e in particolar modo dell'Istituto di Chimica dell'Università di Roma si associa alle parole pronunziate dal PRESIDENTE in memoria di E. PATERNÒ, e ricorda come anche nel campo delle applicazioni della chimica non ci sia stata istituzione di carattere nazionale cui Egli non abbia dato valido impulso.

Il PRESIDENTE informa, quindi, i Colleghi delle notizie soddisfacenti avute sulle condizioni di salute del Socio E. MARCHIAFAVA, da qualche tempo indisposto.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BIANCHI presenta in omaggio un gruppo di pubblicazioni dell'Osservatorio di Milano e di Merate, illustrandone il contenuto.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando alcune Note del defunto Socio A. DELLA VALLE; « La renaissance de la médecine humorale » di A. LUMIÈRE; « Observations de l'intensité de la Pesanteur » dell'Istituto Geodetico di Danimarca.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci: ARMELLINI, BAGLIONI, BLANC, CARANO, CESARIS-DEMEI, CORBINO, LEVI-CIVITA, SEVERI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3. febbraio 1935

- PUA GAETANO. — Esperimenti del 1933 con sostanze attrattive per la mosca delle olive. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Superiore agrario di Portici ». Serie III, vol. VI, pp. 125-145). Spoleto, 1934. 8°.
- DE CRISTO GIUSEPPE. — Sui giacimenti a nitrato di potassio in provincia di Reggio Calabria. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica Italiana ». Vol. LIII, fasc. 2°, pp. 299-302). Roma, 1934. 8°.
- DELLA VALLE ANTONIO. — Analisi descrittiva e comparazioni critiche intorno alla fase notale negli omeotermi. Parte I. Analisi e descrizioni con 4 tavole. Napoli, 1927. 4°, pp. 1-41.
- DELLA VALLE ANTONIO. — La nota primitiva e le sue adiacenze nella prima formazione dell'embrione dei vertebrati. I. La nota nella somatogenesi. (Estr. dai « Rend. della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Serie III, vol. XXVI). Napoli, 1921. 8°, pp. 1-8.
- DELLA VALLE ANTONIO. — La prima formazione dell'embrione degli omeotermi durante la fase della nota primitiva. (Estr. dai « Rend. della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Serie 3ª, vol. XXIX, pp. 141-145). Napoli, 1923. 8°.
- DELLA VALLE ANTONIO. — Onoranze ad Antonio Della Valle nel giubileo del suo insegnamento. Napoli, 1926. 8°, pp. 1-32.
- DOBELL CLIFFORD. — Researches on the intestinal protozoa of monkeys and man. VI. Experiments with the Trichomonads of man and the macaques. (From « Parasitology ». Vol. XXVI, N° 4, 9, pp. 531-577). Cambridge, 1934. 8°.
- FAZZINI SERAFINO. — La partecipazione dell'atmosfera nella vita e morte dei continenti. Roma, 1934. 4°, pp. 1-27.
- FISHER WILLARD J. — Excavated meteors. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLII, N.º 9), s. I, 1934. 8°, pp. 1-4.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — La renaissance de la médecine humorale. Lyon, 1935. 8°, pp. 1-XI, 1-204.
- NÖRLUND N. E. — Landesbericht für Dänemark. (Sonderabdr. aus « N. E. Nörlund, Dänemark », pp. 58-66), s. I. e. d.
- NÖRLUND N. E. — Observations de l'intensité de la pesanteur avec le nouveau modèle de pendule Holweck-Lejay. (« Mémoires de l'Institut Géodésique de Danemark », III série, tome I). Copenhague, 1934. 4°, pp. 1-163.
- PEARL RAYMOND. — Second progress report on a study of family limitation. (Reprinted from the « Milbank Memorial Fund Quarterly ». Vol. XII, n° 3), s. I, 1934. 8°, pp. 1-21.
- SARRA RAFFAELE. — Notizie biologiche della Platycleis Grisea F. (Orth. Phasganuridae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVIII, pp. 197-209). Portici, 1934. 8°.
- SHAPLEY HARLOW. — On some structural features of the Metagalaxy. George Darwin Lecture 1934 May 11. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 94, n° 9, pp. 791-816). Edinburg, 1934. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Chilopoda-Lepismidae (Thysanura). (Sonderdruck aus « Wissenschaftliche Ergebnisse der Niederländischen Expeditionen in den Karakorum und die angrenzenden Gebiete 1922, 1925 und 1929-30. pp. 194-204, 205-208). Leipzig, 1935. 8°.
- STERNE T. E. — Errors in the periods of variable stars. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLII, n. 10), s. I, 1934. 8°, pp. 1-14.
- STERNE T. E. — The accuracy of least squares solutions. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XX, n° 11, pp. 505-571). Cambridge, 1934. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 febbraio 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisiologia. — *Le variazioni fisiologiche della curva glicemica e i fattori che le determinano.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. S. BAGLIONI.

La quantità relativa di glicosio presente nel sangue (*tasso glicemico o glicemia*) è divenuta oggi uno dei dati più importanti per giudicare del metabolismo glicidico in condizioni normali e patologiche. I micrometodi che permettono di stabilire con grande esattezza tale quantità, sono stati escogitati e perfezionati dai vari autori, in modo da poter garantire, se eseguiti scrupolosamente, da ogni errore tecnico. Specialmente mi riferisco per lunga esperienza al micrometodo di Bang.

Ben si conoscono gli effetti di una carenza, come di un eccesso di glicosio nel sangue, caratterizzanti le ipo- e le iperglicemie. Si sa che la quantità di glicosio presente nel sangue normale può oscillare entro limiti abbastanza estesi, prima di varcare la soglia inferiore e superiore patologica. Si ammette infatti nei comuni trattati che il tasso glicemico del sangue capillare della grande circolazione (attinto ordinariamente al polpastrello delle dita o al lobulo dell'orecchio) può variare in condizioni normali tra 0.50 e 1.20₁₀₀. Queste variazioni sono abbastanza forti, specialmente se si confrontano con altri costanti fisico-chimiche del sangue stesso (punto di congelazione, pH, idremia, ecc.).

D'altra parte è utile, per non dire indispensabile, stabilire con precisione questi limiti superiore e inferiore e i fattori che li determinano in condizioni fisiologiche, prima di passare all'applicazione pratica nei casi morbosì.

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1935.

Nella copiosa letteratura che si occupa dell'argomento non si trova una serie di ricerche sistematiche e esaurienti che stabiliscano le variazioni della glicemia nelle diverse ore del giorno e della notte, in individui normali, mediante una vera curva giornaliera e notturna del tasso glicemico. I vari autori si limitano tutt'al più a controllare la glicemia per due o tre ore di seguito (quando non si contentano di fare un solo esame a digiuno, come si suol fare comunemente a scopo di indagine clinica, per vedere se esiste iperglicemia diabetica).

Ciò non vuol dire d'altro canto che non siano già riconosciuti diversi fattori che modificano la glicemia, anche in condizioni fisiologiche.

Le variazioni *regionali* sono le meglio stabilite e le più importanti dal punto di vista del consumo e del destino del glicosio del sangue. Nel sangue arterioso della grande circolazione la quantità di glicosio è superiore a quella del sangue capillare e del sangue venoso; la quantità minore si ha nel sangue venoso refluò dai tessuti dove il glicosio è in parte fissato. La glicemia segue pertanto lo stesso comportamento dell'ossigeno del sangue.

Significative eccezioni si hanno pel sangue venoso del fegato: nelle vene sopraepatiche la quantità di glicosio è costantemente superiore a quella del sangue arterioso di ogni altra regione del corpo, in dipendenza della funzione glicogenetica del fegato stesso. Nel sangue venoso della porta la quantità di glicosio oscilla entro limiti molto più ampi, in dipendenza dell'assorbimento intestinale del glicosio proveniente dagli alimenti e destinato ad essere fissato dal fegato per la sua funzione amilogenetica.

Se si considera il contenuto del glicosio del sangue appartenente allo stesso territorio (arterioso, venoso, capillare), queste oscillazioni scompaiono o almeno sono di molto attenuate. Vi compaiono oscillazioni di altra natura, tra cui specialmente due sono state sinora considerate, quelle indotte dalla alimentazione e quelle provenienti dall'attività muscolare.

In condizioni perfettamente normali e a pasti non eccessivamente ricchi l'iperglicemia alimentare non deve comparire, nel senso che il tasso glicemico pur presentando qualche aumento, questo non raggiunge mai o non supera il limite ritenuto fisiologicamente superiore (ossia del 1.2 ‰ nel sangue capillare). Nei casi di incipiente insufficienza funzionale amilogenetica epatica si presenta l'iperglicemia alimentare, che assume pertanto il significato di un importante sintomo clinico. Poco note sono invece le variazioni glicemiche in dipendenza del digiuno o di particolari condizioni alimentari, sebbene l'argomento abbia grande importanza allo stato odierno.

E. M. Greisheimer⁽¹⁾ (1934), in undici persone normali, che in sessanta-quattro ore non ingerivano che acqua, caffè nero e thè leggero, vide dopo trentasei ore la glicemia discendere di 21.63 % nelle donne, e di 13.8 % negli uomini (in confronto della diminuzione che si aveva dopo dodici ore

(1) E. M. GREISHEIMER, « Amer. Journ. of Physiol. », luglio 1934, p. 45.

di digiuno); dopo sessanta ore la diminuzione era rispettivamente di 30.52 e di 25.17%.

Negli individui normali a digiuno e a riposo, secondo Gilbert e Baudouin (1908) la glicemia si può considerare costante; mentre secondo Neumark (1930) e Karen-Marie Hausen (1932) si possono avere nello stesso individuo oscillazioni di 0.45 a 0.55 per mille. P. Mauriac, P. Broustet e A. Dupin (1933), eseguendo su 13 individui normali (o affetti da malattie non diabetiche) il dosaggio della glicemia per due ore consecutive, ogni 15 minuti, a digiuno e a riposo, trovano oscillazioni in media di 0.10 a 0.20 grammi per mille ⁽¹⁾.

Le variazioni dovute all'attività muscolare sono state oggetto di studio da parte di vari autori, che però non sono giunti a risultati perfettamente concordi.

A. Buerger (1920), riassumendo i più importanti lavori sull'argomento afferma che il lavoro abbassa lo zucchero del sangue. Chauveau e Kauffmann (1887) e Quinquaud (1886) negli animali e Weiland (1908) nell'uomo trovarono nel sangue venoso una quantità di zucchero minore durante e dopo il lavoro muscolare che nel riposo. Lichtwitz (1914) trovò invece che nelle persone normali un lavoro breve ma intenso, non in tutti i casi fa diminuire la glicemia. Buerger (1916) contribuì a chiarire questa discordanza, dimostrando con determinazioni a serie che una sola determinazione non può dare risultati completi sull'azione del lavoro sulla glicemia, insorgendo variazioni del valore glicemico in persone diverse e uguale lavoro in tempi diversi non prevedibili. Dopo un lavoro medio di 122 minuti e un valore di 24000 kgm (salite di scalini) la glicemia discendeva in media del 28% in confronto col valore del riposo, se le persone erano rimaste a digiuno dalla sera precedente alla fine del lavoro. In tali condizioni l'ipoglicemia da lavoro in individui a digiuno sorpassava di ore la durata del lavoro; spesso in individui normali era preceduta da una breve iperglicemia.

Contro queste osservazioni il Buerger ricorda quelle di von Moraczewski che vide dopo movimenti del corpo un aumento del glicosio, di Benthin e Ryser che descrissero costanti iperglicemie nelle partorienti durante le doglie, di Lillie (1918) che su 17 persone normali, facendole lavorare all'ergostato per breve tempo, vide in 8 oscillazioni variabili tra $\pm 10\%$, in 2 una diminuzione sopra il 10, e in 7 un aumento sopra il 10%.

Grote (1918) in individui sottoposti a un lavoro di 25 minuti (sedia di Bergonie) determinava prima del lavoro e durante il lavoro ogni 5 minuti la glicemia: vide che in persone normali la curva glicemica decorre in generale orizzontalmente con una lieve tendenza a diminuire ⁽²⁾.

Anche S. Caccuri ⁽³⁾ nelle sue ricerche sull'uomo (1929) ha trovato du-

(1) P. MAURIAC, P. BROUSTET et A. DUPIN, «C. R. Soc. d. Biol.», 1933, I, p. 587.

(2) M. BÜRGER, «Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmak.», Bd. 87, 1920, p. 233.

(3) S. CACCURI, «Rass. Ter. e Patol. clin.», I, 1929, p. 484.

rante il lavoro un comportamento discorde, talora aumentando, talora diminuendo; mentre nel coniglio dapprima aumenta e poi diminuisce.

Nelle ricerche fatte eseguire ai miei assistenti ed allievi mi son proposto di stabilire la curva glicemica di individui sani e giovani durante le ventiquattro ore, in condizioni normali e in condizioni di un determinato lavoro muscolare. I risultati ottenuti su due giovani studenti mi sembrano di una certa importanza anche perchè possono chiarire i risultati discordi dei precedenti autori.

Il dosaggio era fatto mediante il secondo micrometodo di Bang su doppi campioni di 0.1 cc di sangue prelevato ogni due o quattro ore dal polpastrello.

I dati ottenuti sono riportati graficamente nelle due annesse figure (1 e 2) di cui l'una si riferisce allo studente A. B. e l'altra allo studente F. P., il primo del peso di kg. 74, il secondo di kg. 65.

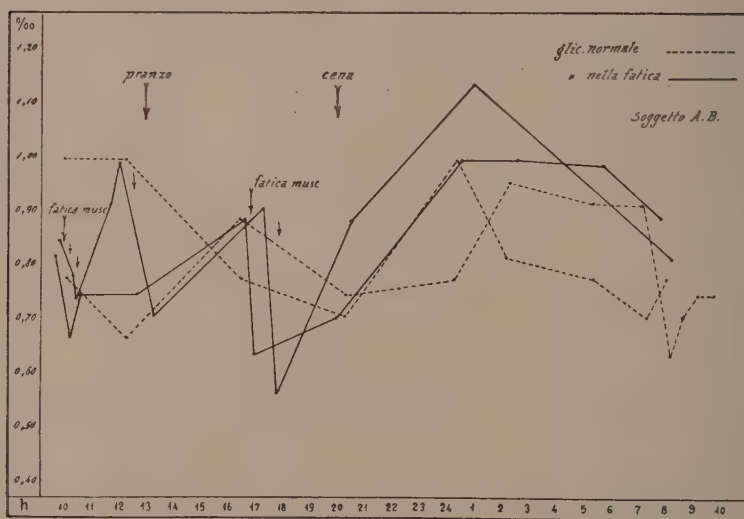


Fig. 1. — Diagramma delle variazioni della glicemia nel soggetto A. B. Sull'asse delle ordinate sono indicati i valori del glicosio per mille; su quello delle ascisse le 24 ore del giorno.

Il regime alimentare era uguale per ambedue:

ore 8.— Una tazza di caffè nero.

ore 13.— Spaghetti al burro g. 100

Bistecca g. 100

Verdura

Pane (uno sfilatino) g. 150

Una mela.

ore 20.— Lo stesso pasto.

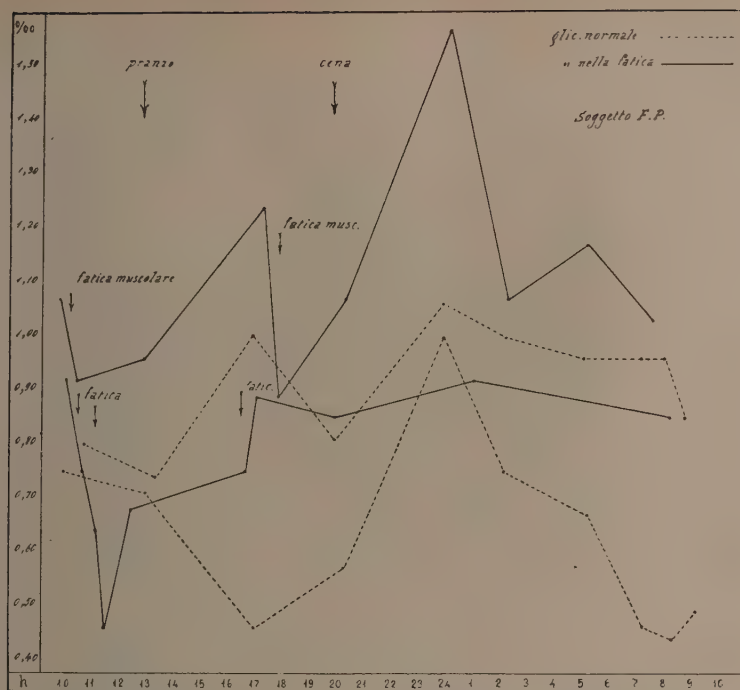


Fig. 2. - Diagramma delle variazioni della glicemia nel soggetto F. P.
Valgono le stesse indicazioni della fig. 1.

Il lavoro muscolare compiuto era la salita di scalini; fu

per A. B. nel primo giorno di kgm. 19.230; risp. 18.648; nel secondo di kgm. 18.230; 13.986; 14.152.

per F. P. nel primo giorno di kgm. 15.356, risp. 15.868; nel secondo di kgm. 16.110; 12.769; 13.308.

Ambedue in un primo giorno (prima curva) ripeterono il lavoro due volte nella stessa giornata, a distanza di 7-8 ore; nel secondo giorno lo ripeterono tre volte, due volte nella mattinata immediatamente l'una dopo l'altra e una volta alla distanza di 7-8 ore. La durata di ciascun lavoro era in media di 12-15 minuti.

RISULTATI. - Dall'esame delle curve si rileva che in ambedue i soggetti il tasso glicemico varia notevolmente nelle diverse ore del giorno e della notte tanto in condizioni di vita normale, quanto in condizioni di lavoro muscolare. Tali oscillazioni lasciano tuttavia riconoscere alcuni caratteri regolari.

a) Esse presentano una fisionomia particolare per ciascun individuo in A. B. le oscillazioni decorrono entro limiti più ristretti che in F. P.

mentre nel primo in condizioni normali sono tra 0.64 e 1, nel secondo sono tra 0.46 e 1.07.

b) Durante le ore diurne di veglia (dei pasti e del lavoro) le oscillazioni non mostrano andamento parallelo; durante la notte invece (nel riposo e nel sonno) le curve in ambedue i soggetti presentano un andamento concorde, nel senso che a mezzanotte si ha il massimo, che declina nelle successive ore fino a raggiungere il minimo nelle prime ore del mattino.

c) Il lavoro muscolare intenso e rapido produce sempre evidenti modificazioni del tasso glicemico, che consistono in due fasi o reazioni: durante il lavoro e subito dopo avviene una evidente diminuzione della glicemia, che pare proporzionale alla durata e alla intensità del lavoro compiuto, a cui segue nelle ore successive un aumento crescente della glicemia, anche esso proporzionale al lavoro compiuto e che raggiunge (in condizioni normali) il valore massimo, come la diminuzione della prima fase raggiunge il valore minimo. Nei due soggetti pur mantenendosi la fisionomia della curva, si hanno per A. B. il valore minimo di quasi 0.50 e il valore massimo di 1.12; per F. P. il valore minimo di 0.45 e il massimo di 1.53.

Queste due fasi di ipoglicemia e di iperglicemie successive si possono spiegare ammettendo che la prima sia dovuta al rapido passaggio di glicosio dal sangue nei muscoli in attività, a cui non corrisponda l'immissione di glicosio da parte del fegato; la seconda sia conseguenza di una reazione epatica allo stimolo della deficienza del glicosio ematico che supera in intensità e tempo la intensità e la durata dell'eccitamento.

È molto probabile che le oscillazioni del tasso glicemico che si osservano in grado minore nelle condizioni normali di vita sia dovuto, almeno in parte, alla attività neuromuscolare connessa colla veglia diurna. Anche l'assunzione dei pasti sembra avere una analoga importanza.

Ulteriori ricerche contribuiranno alla soluzione sperimentale di questi problemi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Trasporti di specie superiore.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In un'ampia Memoria di recente pubblicazione ⁽²⁾ il Bompiani introduce e studia (fra l'altro) svariate leggi di trasporto pei vettori di specie ν qualunque (cioè: appartenenti agli $S(\nu)$ osculatori) di una V_n in ambiente euclideo R_n . Tali leggi a differenza di quella « alla Levi-Civita » (ved. *V. G.*) che a me risultò dalla interpretazione geometrica della derivazione covariante di Vitali ⁽³⁾ portano i vettori di specie μ , con $1 \leq \mu \leq \nu$, sempre in vettori di specie μ : requisito che certo appare ben rispondente alla natura geometrica dell'ente studiato. D'altra parte i trasporti considerati dal Bompiani non danno luogo a *rappresentazioni congruenti* fra le totalità dei vettori di specie ν di V_n che escono da due punti infinitamente vicini.

Si possono riunire i due requisiti: di

1) *conservare la specie dei vettori trasportati*;

2) *conservare lunghezze e angoli dei vettori trasportati*;

ma però rinunciando a un altro requisito non meno importante: di

3) *mutare i vettori osculatori* (cioè: appartenenti a spazi osculatori dei vari ordini $\leq \nu$ a curve di V_n : *G. R.*, pp. 483, 507) *in vettori osculatori d'eguale ordine*.

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) *Geometrie riemanniane di specie superiore*, « Memorie della R. Accademia d'Italia », VI, 1935, n. 8, 269-520. (Lavoro premiato dalla R. Accademia dei Lincei, Premio Vittorio Emanuele III, 1933). In questo lavoro ricchissimo di contenuto (di cui l'A. gentilmente da tempo mi ha posto a conoscenza) la costruzione della nuova teoria con caratteristica semplicità di mezzi e originalità di vedute viene portata molto innanzi. Circa la precedente letteratura dell'argomento — in gran parte e in quanto v'è di più sostanziale dovuta pure al BOMPIANI — mi rimetto a quanto esposi nella Nota *Deformazioni di specie superiore e sistemi di forme per una V_m in R_n* , « Rendiconti Lincei », (6), 15, 1932, 603-610. (Poche altre indicazioni avrò occasione di aggiungere nella presente Nota I). Con *G. R.*, *D. S.* citerò la Memoria del BOMPIANI e la Nota mia ora ricordata; con *N. E.*, *V. G.* questi altri miei lavori: *Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del Tituli, e applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore*, « Rendiconti Semin. Padova », 2, 1931, 1-48, 164-212; e *Vedute generali sul calcolo di Vitali e sue estensioni*, « Rendiconti Lincei » (6), 19, 1934, 777-781 e 854-859.

(3) Tale legge è stata poi ritrovata da W. MAYER (loc. cit., in *D. S.*, 18) e, indipendentemente, da C. BURSTIN, *Eine Verallgemeinerung der Parallelverschiebung*, « Bielarusskaia Akademia Navuk, Matem. Prazi », Minsk, 1932, 56-64.

Indicheremo, dopo alcuni preliminari, una legge di trasporto che soddisfa alle condizioni 1), 2); e poi una ricostruzione da un punto di vista un po' diverso e in parte generalizzazione di altre leggi già indicate dal BOMPIANI, le quali invece soddisfano alle 1), 3).

2. Sia ξ un vettore di specie v della V_n nel punto generico $P(u^1, \dots, u^n)$:

$$(1) \quad \xi = \xi_{r_1} P_{r_1} + \xi_{r_1 r_2} P_{r_1 r_2} + \dots + \xi_{r_1 \dots r_v} P_{r_1 \dots r_v} = \xi^{\alpha_v} P_{\alpha_v},$$

ove $P_{r_1 \dots r_\mu} = \frac{\partial^\mu P}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_\mu}}$ ($1 \leq \mu \leq v$), α_v percorre le combinazioni con ripetizione $r_1 \dots r_\mu$ di classe $\leq v$ di $1, 2, \dots, n$ e le componenti $\xi_{r_1 \dots r_\mu}$ e ξ^{α_v} sono legate dalle relazioni $\xi_{r_1 \dots r_\mu} = \delta_{r_1 \dots r_\mu}^{\alpha_v} \xi^{\alpha_v}$ (1).

Con gli operatori di proiezione $C_{v-1}^{\alpha_v-1}, C_{v-2}^{\alpha_v-2}, \dots, C_{a_2}^{\alpha_2}$ ricaviamo le successive proiezioni ortogonali di ξ su $S(v-1)$, su $S(v-2)$, ..., su $S(1)$ (cfr. G. R., p. 471 e seg.):

$$(2) \quad \xi_{v-1} = \xi^{\alpha_v} C_{v-1}^{\alpha_v-1} P_{\alpha_{v-1}}, \quad \xi_{v-2} = \xi^{\alpha_v} C_{v-1}^{\alpha_v-1} C_{v-2}^{\alpha_{v-2}} P_{\alpha_{v-2}}, \dots, \\ \xi_1 = \xi^{\alpha_v} C_{v-1}^{\alpha_v-1} \dots C_{a_2}^{\alpha_2} P_{\alpha_1}.$$

(1) Ove $\delta_{\alpha_v}^{\beta_\mu}$ è l'unità o lo zero secondo che β_μ ed α_v sono o no la stessa combinazione con ripetizione di $1, 2, \dots, n$. Sotto altra forma possiamo scrivere, secondo il BOMPIANI (G. R., p. 475) $\xi_{r_1 \dots r_\mu} = \pi_{r_1 \dots r_\mu} \xi^{\alpha_v}$, ove $\pi_{r_1 \dots r_\mu}$ è il numero delle permutazioni distinte che si possono formare con $r_1 \dots r_\mu$ (e non si deve sommare rispetto ad $r_1, \dots, r_\mu$). Il BOMPIANI scrive $\xi(r_1 \dots r_\mu)$ anziché $\xi_{r_1 \dots r_\mu}$.

(2) Che sono i simboli di Christoffel generalizzati del VITALI e differiscono per fattori numerici dai simboli $\Gamma \dots$ del BOMPIANI: ved. G. R., p. 476 e seg., cfr. N. E., p. 22, 31. Precisamente si ha (nel caso normale per l' $S(v)$); ma ad ogni modo le relazioni valgono fra opportune determinazioni dei due sistemi di parametri)

$$C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\tau} = \delta_{r_1 \dots r_\mu}^{s_1 \dots s_\tau} \Gamma_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\tau} \quad (1 \leq \tau \leq \mu);$$

cioè i fattori numerici detti sopra sono le $\pi_{s_1 \dots s_\tau}$ (ved. nota prec.). Il loro presentarsi è dovuto semplicemente al fatto che il BOMPIANI somma per disposizioni anziché per combinazioni. Naturalmente si ha pure (ved. G. R., p. 477) $C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\mu} = \delta_{r_1 \dots r_\mu}^{s_1 \dots s_\mu} C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\mu}$; e si può verificare (cfr. G. R., p. 478) che è

$$C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{\alpha_\mu} C_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} \dots C_{\tau}^{\alpha_\tau} = \delta_{r_1 \dots r_\mu}^{\alpha_\mu \dots \alpha_\tau} C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{\alpha_\mu \dots \alpha_\tau},$$

dove le $C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\mu}$ e più in generale $C_{r_1 \dots r_\mu+1}^{s_1 \dots s_\tau}$ sono i «simboli di Christoffel di specie superiore» del BOMPIANI (G. R., p. 453 e seg.).

I componenti di ξ secondo gli spazi $\Pi(v-1), \Pi(v-2), \dots, \Pi(1)$ normali ad $S(v-1)$ in $S(v)$, ad $S(v-2)$ in $S(v-1), \dots$, ad $S(1)$ in $S(2)$ sono:

$$(3) \quad \xi_{v-1}^v = \xi_{v-1}^v - \xi_{v-1}^v = \xi_{v-1}^{a_v} \Omega_{a_v}^{v-1}, \quad \xi_{v-2}^v = \xi_{v-2}^v - \xi_{v-2}^v = \xi_{v-2}^{a_v} C_{a_v}^{v-1} \Omega_{a_v-1}^{v-2}, \dots,$$

$$\xi_1^v = \xi_1^v - \xi_1^v = \xi_{a_v}^{a_v} C_{a_v}^{v-1} \dots C_{a_2}^{a_2} \Omega_{a_2},$$

ove $\Omega_{a_{\mu+1}}^{\beta_{\mu+1}} = \delta_{a_{\mu+1}}^{\beta_{\mu+1}} D_r P_{\beta_{\mu+1}}$ è il *tensore di curvatura euleriana di specie μ* di V_n (N. E., p. 29). Si ha dunque (ved. N. E., p. 30)

$$(4) \quad \xi = \xi_1^v + \xi_1^v + \dots + \xi_{v-1}^v = \xi_{a_1}^{a_1} P_{a_1} + \xi_{a_2}^{a_2} \Omega_{a_2}^{v-1} + \dots + \xi_{a_v}^{a_v} \Omega_{a_v}^{v-1}$$

$$= \xi_{r_1}^{r_1} P_{r_1} + \xi_{r_1 r_2}^{r_1 r_2} \Omega_{r_1 r_2}^{v-1} + \dots + \xi_{r_1 \dots r_v}^{r_1 \dots r_v} \Omega_{r_1 \dots r_v}^{v-1}.$$

In questa decomposizione di ξ secondo gli spazi, mutuamente ortogonali, $S(1), \Pi(1), \dots, \Pi(v-1)$ le componenti $\xi_{r_1}^{r_1}, \xi_{r_1 r_2}^{r_1 r_2}, \dots, \xi_{r_1 \dots r_v}^{r_1 \dots r_v}$ (rispetto ai vettori $P_{r_1}, \Omega_{r_1 r_2}, \dots, \Omega_{r_1 \dots r_v}$) sono precisamente (le componenti di ξ rispetto ai vettori P_{r_1} e) le componenti *col massimo numero d'indici* (rispetto ai vettori $P_{r_1 r_2}, \dots, P_{r_1 \dots r_v}$) dei vettori $\xi_1, \dots, \xi_v, \xi = \xi$; e sono componenti di *ordinari tensori*, come ha esplicitamente osservato il Bompiani⁽¹⁾.

Ricorderò ancora⁽²⁾ che il quadrato del modulo del vettore $\Omega_{r_1 \dots r_v}^{v-1}$ è il tensore « fondamentale di specie v » secondo il Bompiani, $A_{r_1 \dots r_v, s_1 \dots s_v}$, da cui dipende la metrica dello spazio $\Pi(v-1)$.

3. Molti altri invarianti scalari e vettoriali si possono formare a partire da $\Omega_{r_1 \dots r_v}^{v-1}$: uno di questi ultimi (che ci sarà utile più innanzi) è il vettore $\Omega_{r_1 \dots r_v}^{v-1} \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(v)}^{r_v}$, univocamente associato a una v -upla di vettori (ad es. unitari) $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(v)}$ di $S(1)$: che diremo *vettore di curvatura normale* $(v-1)$ -esima mista relativa ai vettori $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(v)}$. Il suo significato è il seguente⁽³⁾: preso un sistema v -uplo di congruenze di linee

(1) Ved. G. R., pp. 475, 479. Quanto precede si trova, sotto altra forma, nella Memoria del BOMPIANI: qui l'ho esposto in forma indipendente dal presentarsi o no, per l' $S(v)$, del caso *normale*, caso in cui ne è massima la dimensione.

(2) N. E., p. 167, form. (132); cfr. G. R., p. 445.

(3) Ved. G. R., p. 450: dove si costruisce un invariante scalare che è il quadrato del modulo di questo vettore.

(v -tessuto) di V_n , tale che in P le linee delle v congruenze che ne escono abbiano le direzioni di $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(v)}$ (del resto arbitrario), e costruita la poligonale curvilinea $PP_{(1)}P_{(2)} \dots P_{(v)}$ i cui lati successivi appartengono a linee dei v sistemi del v -tessuto, $\zeta = \Omega_{r_1 \dots r_v} \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(v)}^{r_v}$ è il limite del rapporto del vettore $\vec{PP}_{(v)}$ al prodotto delle lunghezze dei tratti $PP_{(1)}, P_{(1)}P_{(2)}, \dots, P_{(v-1)}P_{(v)}$ quando queste lunghezze tendano uniformemente a zero ⁽¹⁾.

Il vettore ζ ha, rispetto ai vettori $\Omega_{r_1 \dots r_v}$, nel caso normale per $l'S(v)$ ⁽²⁾ le componenti

$$(5) \quad \zeta_{r_1 \dots r_v} = \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(v)}^{r_v}$$

(ove la parentesi () indica che si deve *mischiare* rispetto ad $r_1 \dots r_v$ ⁽³⁾). In altre parole, il tensore $\zeta_{r_1 \dots r_v}$ è il *prodotto simmetrico*, secondo Schouten (loc. cit.) dei vettori $\eta_{(1)}^{r_1}, \dots, \eta_{(v)}^{r_v}$.

Questa è anzi, che io sappia, l'unica interpretazione geometrica espressiva del prodotto simmetrico.

Dato il tensore simmetrico $\zeta_{r_1 \dots r_v}$ ad arbitrio, esso in generale non è il prodotto simmetrico di v vettori: condizione (necessaria e sufficiente) per questo è che il determinante di ordine n , a v dimensioni, di cui le $\zeta_{r_1 \dots r_v}$ sono gli elementi, abbia caratteristica v ⁽⁴⁾. Cosicché le direzioni dei vettori di $\Pi(v-1)$ che sono vettori di curvatura normale mista di specie $v-1$ relativa a v -uple di vettori di V_n formano un *cono algebrico*, $\Gamma_{(v)}$ (intersezione di $(n-v)^v$ coni algebrici d'ordine $v+1$). Ciò, s'intende, a meno che non sia $n \leq v$; nel quale caso ogni direzione di $\Pi(v-1)$ è direzione di curvatura normale di specie $v-1$.

Tornando al caso generale: a $\Gamma_{(v)}$ appartengono anche le direzioni delle proiezioni su $\Pi(v-1)$ delle normali principali (assolute) $(v-1)$ -esime in P a curve di V_n e a serie di vettori tangenziali (o di $S(1)$; delle normali principali $(v-2)$ -esime a serie di vettori di $S(2)$, $\dots$ delle (prime) normali principali a serie di vettori di $S(v-1)$.

(1) È ovvia e qui non serve l'estensione al caso in cui i vettori non si suppongano unitari.

(2) Se non si ha, per $l'S(v)$, il caso normale, le (5) danno una determinazione delle componenti $\zeta_{r_1 \dots r_v}$, ma non la più generale: che ne differisce per addendi $\lambda^\tau k_{r_1 \dots r_v}^\tau$; ove le $k_{r_1 \dots r_v}^\tau$, $\Omega_{r_1 \dots r_v} = 0$, $\tau = 1, \dots, p_v$, sono le relazioni (lineari indipendenti) che legano i vettori $\Omega_{r_1 \dots r_v}$, e le λ^τ sono fattori arbitrari.

(3) Ved. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 25.

(4) Cfr. SCHOUTEN, loc. cit., p. 52.

Al variare delle v direzioni tangenziali $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(v)}$ i vettori

$$\Omega_{r_1 \dots r_v} \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(v)}^{r_v}$$

hanno come spazio lineare d'appartenenza proprio lo spazio $\Pi(v-1)$; dunque ogni vettore di $\Pi(v-1)$ è linearmente legato ad essi (cioè, a un conveniente numero di essi).

Nel caso normale per l'S(v) l'associazione delle direzioni

$$(\Omega_{r_1 \dots r_v} \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(v)}^{r_v})$$

di $\Gamma_{(v)}$ alle v -uple di direzioni tangenziali $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(v)}$ è biunivoca.

4. Ciò premesso veniamo infine alle leggi di trasporto. Appare naturale aggiungere alla condizione 1) (n. 1) le seguenti: che

4) i vettori normali ad $S(\mu)$ ($\mu = 1, \dots, v-1$) si trasportino in vettori normali ad $S(\mu)$; e quindi (per la 1)) i vettori di $\Pi(\mu)$ in vettori di $\Pi(\mu)$;

5) comunque fissate le leggi di trasporto dei vettori di $S(1)$ e dei singoli $\Pi(\mu)$ ($\mu = 1, \dots, v-1$), un vettore non situato sopra uno di questi spazi abbia la legge di trasporto che risulta trasportando i suoi componenti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{v-1}$ secondo le leggi fissate per i vettori degli spazi medesimi, cui essi appartengono ⁽¹⁾.

D'altra parte se si vuole soddisfare alla 3) (n. 1) si è condotti a richiedere che, inoltre

6) i vettori tangenziali $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(\mu)}$ trasportandosi in $\eta_{(1)}^*, \dots, \eta_{(\mu)}^*$ ($\mu = 2, \dots, v$), il vettore di curvatura normale $(\mu-1)$ -esima

$$\Omega_{r_1 \dots r_\mu} (P) \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(\mu)}^{r_\mu}$$

si trasporti da P a P^* in un vettore avente (almeno) la direzione di

$$\Omega_{r_1 \dots r_\mu} (P^*) \eta_{(1)}^{*r_1} \dots \eta_{(\mu)}^{*r_\mu};$$

7) la legge di trasporto per le direzioni di $\Pi(\mu)$ ($\mu = 1, \dots, v-1$) sia lineare

Così effettivamente — ma limitatamente al caso normale per l'S(v) — senza sottoporre a restrizioni il modo di trasportarsi dei moduli dei vettori, nè il trasporto dei vettori tangenziali, si soddisfa alla 3).

(1) Cfr. G. R., pp. 483, 488, 494, 506.

5. Il modo più semplice di soddisfare alle 1), 2), 4) è — almeno formalmente — questo: imporre che

8) *pei vettori tangenziali* — cioè di $S(1)$ — la legge di trasporto sia quella di Levi-Civita;

9) *pei vettori dei singoli* $\Pi(\mu)$, $\mu = 1, \dots, v-1$, si abbia pure una legge di trasporto “alla Levi-Civita”, cioè, pel trasporto infinitesimale relativo a $\Pi(\mu)$ da P a P^* il vettore trasportato sia quello che si ottiene proiettando ortogonalmente il vettore iniziale sullo spazio $\Pi(\mu)$ relativo a P^* (portato in P^* con l'equipollenza nell'ambiente R_N).

Le 8), 9), 5) determinano la legge di trasporto. La sua rappresentazione analitica (espressa mediante i parametri $C \dots$ del Bompiani: *G. R.*, p. 458) è ⁽¹⁾

$$(6) \quad \bar{d} \xi^r = 0, \quad d \xi^{r_1 \dots r_{\mu}} + \\ + (C_{s_1 \dots s_{\mu}})^{r_1 \dots r_{\mu}} du^i - \sum_b^{\mu} C_{s_1 \dots s_{\mu}}^{r_1 \dots r_{b-1} r_{b+1} \dots r_{\mu}} du^{r_b} \Big) \xi^{s_1 \dots s_{\mu}} = 0 \\ \mu = 2, \dots, v.$$

ove $\bar{d}$ è simbolo della differenziazione assoluta del calcolo di Ricci ⁽²⁾.

Pel caso in cui la V_n sia una *curva* γ di R_N ($n = 1$), un vettore dell' R_v osculatore a γ che lungo γ si sposti secondo questa legge si mantiene *solidale col v-edro principale* di γ . La condizione 3) è soddisfatta, ma il caso è banale. In ogni altro caso la 3) non può essere soddisfatta, se non sotto l'ipotesi, assai particolare per la V_n , che i coni $\Gamma_{(v)}$ ($n. 3$) relativi ai singoli punti di V_n siano *tutti eguali fra loro*.

6. Vediamo come possa invece soddisfarsi alle 1) e 3) insieme (ma soltanto parzialmente alla 2)) quando si abbia per l' $S(v)$ il *caso normale*. In questa ipotesi le 1), 4), 5), 6), 7) determinano una legge di trasporto delle *direzioni* dei $\Pi(\mu)$ ($\mu = 1, \dots, v-1$) quando sia assegnato il modo di trasportarsi dei *vettori* di $S(1)$. Per questo possiamo *aggiungere la 8)*: abbiamo allora agevolmente

$$(7) \quad \bar{d} \xi^r = 0, \quad \bar{d} \xi^{r_1 r_2} = \omega_{(1)} \xi^{r_1 r_2}, \dots, \bar{d} \xi^{r_1 \dots r_v} = \omega_{(v-1)} \xi^{r_1 \dots r_v}$$

(1) Nel *caso normale* per l' $S(v)$: diversamente, basterebbe sostituire ai secondi membri delle equazioni successive al primo gruppo le somme dei prodotti di essi *pei vettori* $\Omega_{r_1 \dots r_{\mu}}$.

(2) Ved. le mie Note *V. G.*, già cit., p. 779; ove ho indicato (con diversa notazione) i parametri per questo trasporto (form. (1)). La derivazione che a questo trasporto corrisponde si è presentata pure, in forma assai differente, ad J. A. SCHOUTEN ed E. R. v. KAMPEN: *Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine Revision der Krümmungstheorie*, «*Mathem. Annalen*», 105, 1931, 144-159: ved. p. 150 e seg.

ove le $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(v-1)}$ sono fattori scalari indeterminati; e $\bar{d}$ esprime ancora il differenziale assoluto del *calcolo di Ricci*.

Resta arbitrario il modo di trasportarsi dei *moduli* dei vettori degli spazi $\Pi(\mu)$. Per questo è assai naturale completare le condizioni 6), 7) in uno di questi due modi:

6)' il vettore $\Omega_{r_1 \dots r_\mu} (P) \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(\mu)}^{r_\mu}$ si trasporti precisamente in

$$\Omega_{r_1 \dots r_\mu} (P^*) \eta_{(1)}^{r_1} \dots \eta_{(\mu)}^{r_\mu};$$

7)' la legge di trasporto dei vettori di $\Pi(\mu)$ sia lineare. Allora nelle (7) i fattori $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(v-1)}$ si annullano, e abbiamo una legge di trasporto che, appunto partendo da questa rappresentazione analitica, ha già studiato il Bompiani (G. R., p. 483 e seg.). Oppure:

6)'' e 7)'' i moduli dei vettori di $\Pi(\mu)$, $\mu = 1, \dots, v-1$ (e quindi, per le 5) ed 8), di tutti i vettori di $S(v)$) si mantengano costanti nel trasporto.

Abbiamo allora, nelle (7),

$$(8) \quad \omega_{(\mu-1)} = - \frac{1}{2} \frac{\nabla_t A_{p_1 \dots p_\mu, q_1 \dots q_\mu} \xi_{\mu-1}^{p_1 \dots p_\mu} \xi_{\mu-1}^{q_1 \dots q_\mu} du^t}{A_{p_1 \dots p_\mu, q_1 \dots q_\mu} \xi_{\mu-1}^{p_1 \dots p_\mu} \xi_{\mu-1}^{q_1 \dots q_\mu}};$$

si tratta dunque di una diretta generalizzazione di un trasporto studiato, nel caso $n = 2, v = 2$, dal Bompiani (G. R., p. 507 e seg.), con definizione alquanto differente (ibid., p. 509), che pel caso ivi preso in considerazione chiarisce assai bene la natura geometrica del trasporto: mentre la definizione qui proposta rende possibile l'estensione al caso generale.

7. Se per l' $S(v)$ non si presenta il caso normale per soddisfare insieme alle 1), 3) bisogna rinunciare anche alla 8), e generalmente anche alla 7): da un punto di vista analitico ciò dipende dal fatto che, se i vettori $\Omega_{r_1 \dots r_v}$ sono

legati dalle relazioni $\sum_{\tau=1}^{r_1 \dots r_v} \Omega_{r_1 \dots r_v} = 0$ ($\tau = 1, \dots, p_v$), non si può in generale rendere $\bar{d} \sum_{\tau=1}^{r_1 \dots r_v} \omega_{(\tau)}^0 = \omega_{(\tau)}^0$ ($\rho = 1, \dots, p_v$), le $\omega_{(\tau)}^0$ essendo

opportuni fattori scalari, e il differenziale $\bar{d}$ riferendosi a una opportuna derivazione lineare (connessione affine). Dal punto di vista geometrico, pel caso $n = 2, v = 2$ la natura delle difficoltà che si presentano è chiarita da quanto ha esposto il Bompiani, che anche per questo caso ha dato leggi di trasporto (G. R., p. 513 e seg.). Per n e v qualunque, e per ogni possibile «anormalità» relativamente agli $S(v)$, non appare possibile istituire un procedimento generale ed uniforme di trasporto che rispetti la condizione 3): ma una tale differenza di comportamento fra casi che corrispondono a tipi proiettivamente distinti di sistemi alle derivate parziali cui la varietà soddisfa è indubbiamente nella natura delle cose.

Matematica. — *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. I. Inversione della trasformazione.* Nota di F. TRICOMI, presentata⁽¹⁾, dal Socio G. FUBINI.

1. È nota l'importanza fondamentale della trasformazione di Laplace:

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathcal{L}[F(t)],$$

cui possono p. es. ricondursi il metodo simbolico di Heaviside⁽²⁾, lo studio della propagazione del calore⁽³⁾, molti metodi per la ricerca di espressioni asintotiche⁽⁴⁾, molta parte della teoria dei funzionali analitici⁽⁵⁾ ecc. Essa presenta inoltre il vantaggio di fornire un metodo uniforme, niente artificioso e, in generale, agevole per la risoluzione degli svariati problemi che s'incontrano nelle questioni suaccennate. La sola grossa difficoltà in cui spesso volte ci si imbatte, è che il metodo solitamente non fornisce direttamente la funzione $F(t)$ che interessa, bensì la sua trasformata di Laplace $f(s)$; sicchè bisogna saper risalire da questa seconda funzione alla prima.

Per superare questa difficoltà è di scarsissimo aiuto la formula inversa, affetta da immaginari, che può facilmente ottenersi applicando alla (1) il teorema di reciprocità di Fourier. Molto più utile si è rivelato invece avere a disposizione estese tabelle di trasformate di Laplace delle funzioni più comuni⁽⁶⁾, oppure, dal punto di vista dei calcoli pratici, avere a disposizione un metodo che consenta di calcolare i valori di $F(t)$ noti i valori numerici di $f(s)$ sull'asse reale.

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) Ved. G. DOETSCH, *Die Anwendung von Funktionaltransformationen...* «Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.», 43, 1934.

(3) G. DOETSCH (parzialmente in collaborazione con F. BERNSTEIN), *Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung*. I-V. «Mathem. Zeitschr.», 22-28, 1924-28.

(4) G. DOETSCH, *Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung*. «Journ. f. d. reine u. angew. Math.» (Crelle), 167, 1931. Il Doetsch prepara attualmente un libro sulla trasformazione di Laplace.

(5) Ved. p. es. S. MARTIS in BIDDAU, *Studio della trasformazione di Laplace e della sua inversa dal punto di vista dei funzionali analitici*. «Rend. Circ. Mat. Palermo», 57, 1933, pp. 1-70.

(6) Di tali tabelle non ne esistono finora a stampa. Esiste però un'estesa raccolta di trasformate di Fourier di funzioni (integrali di Fourier), donde, con poca fatica, possono dedursi molte trasformate di Laplace: G. A. CAMPBELL-R. M. FOSTER, *Fourier integrals for practical applications*. (Bell telephone system-technical publications), 1931.

Un metodo di questo genere è stato di recente escogitato da M. Picone ⁽¹⁾, esso presenta però qualche inconveniente pratico e lascia completamente in disparte le questioni di convergenza, sì che non lo si può considerare, se non come un primo, per quanto meritorio, tentativo di risolvere il grave problema dell'inversione della trasformazione di Laplace.

Nel presente lavoro, seguendo il corso delle idee che mi avevano già condotto ad un metodo per l'inversione della trasformazione di Laplace *bilatera* ⁽²⁾, cioè di quella in cui l'integrale è esteso fra $-\infty$ e $+\infty$, mi propongo di mostrare come, sotto condizioni per la $f(s)$ poco più restrittive di quelle necessarie, sia possibile rappresentare la funzione $F(t)$ mediante una serie assolutamente ed uniformemente convergente di *polinomi di Laguerre* ⁽³⁾, i cui coefficienti possono, nei casi pratici, calcolarsi mediante la sola conoscenza dei valori di $f(s)$ sull'asse reale.

2. I polinomi di Laguerre classici $L_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) possono definirsi mediante la formula:

$$(2) \quad L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

e quelli *generalizzati* $L_n^{(\alpha)}(t)$ mediante l'altra:

$$(2') \quad L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t}), \quad (\alpha > -1),$$

sicchè è $L_n^{(0)}(t) = L_n(t)$. Essi godono, come tutti i polinomi *tipo Tchebicheff*, di notevoli proprietà ⁽⁴⁾, fra cui principalmente quella di *ortogonalità* espressa dalla formula

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} L_m^{(\alpha)}(t) L_n^{(\alpha)}(t) dt = 0, \quad (m \neq n).$$

(1) *Intorno al calcolo delle soluzioni di alcuni problemi di Fisica.* «Rend. Semin. Matem. Roma», 1933.

(2) Nella mia Nota: *Su la rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss e la trasformazione di Laplace.* In corso di stampa nel «Giorn. dell'Istituto Ital. degli Attuari».

(3) Anche PICONE, loc. cit., considera polinomi di Laguerre, ma da altro punto di vista.

(4) Ved. p. es. COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, I (Berlin, Springer, 1924), p. 77 (Polinomi di Laguerre *classici*. Attenzione alla notazione leggermente diversa da quella qui adottata!) oppure, anche pei $L_n^{(\alpha)}$, PÖLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin, Springer, 1925). Ved. anche i due seguenti lavori che si occupano specialmente dello sviluppo di una funzione arbitraria in serie di polinomi di Laguerre (o di Hermite): G. SZEGÖ, *Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome.* «Mathem. Zeitschr.», 25 (1926), pp. 87-115. J. USPENSKY, *On the development...* «Annals of Mathem.», 28, 1927, pp. 593-619.

Dalla (2), per la regola di Leibniz, segue subito che

$$(3) \quad L_n(t) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{t^m}{m!}$$

donde, operando con la trasformazione di Laplace (1), si trae

$$\mathcal{L}[L_n(t)] = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{1}{m!} \mathcal{L}[t^m],$$

ma notoriamente è

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (m \geq 1),$$

quindi viene

$$\mathcal{L}[L_n(t)] = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{1}{s^{m+1}} = \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} s^{n-m}$$

cioè

$$(4) \quad \boxed{\mathcal{L}[L_n(t)] = \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n}.$$

In modo perfettamente analogo, partendo dalla (2'), si trova invece:

$$(4') \quad \boxed{\mathcal{L}[t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)] = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{s^{\alpha+1}} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n}.$$

Le formule (4)-(4'), nonostante siano così semplici e così facilmente ottenibili, non sembrano esser state finora mai osservate⁽¹⁾. È su di esse che, come si vedrà, s'impenna il nostro metodo d'inversione. Pel momento limitiamoci solo ad osservare che, in virtù della nota formula

$$\mathcal{L}[e^{-bt} F(t)] = f(s+b),$$

(1) Il collega Doetsch mi segnala gentilmente un recentissimo lavoro di K. MAYR: *Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome*. « Math. Zeitschr. », 39, 1935, pp. 597-604, in cui è addirittura calcolato (mediante funzioni ipergeometriche) l'integrale:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} L_x^{(\alpha)}(\alpha x) L_x^{(\beta)}(\beta x) x^{\alpha-1} dx.$$

Dalla relativa formula può naturalmente dedursi come caso particolare la (4'), ma la cosa, se non si sa già *a priori*, non si scorge a prima vista.

ad esse si può dare la forma più generale:

$$(5) \quad \mathcal{L}[e^{-ht} L_n(t)] = \frac{1}{s+h} \left(\frac{s+h-1}{s+h} \right)^n$$

e

$$(5') \quad \mathcal{L}[e^{-ht} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)] = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{(s+h)^{\alpha+1}} \left(\frac{s+h-1}{s+h} \right)^n,$$

dove h denota un numero (reale) qualsiasi.

3. Il metodo d'inversione della trasformazione di Laplace cui si è alluso, è sostanzialmente contenuto nel seguente teorema:

Se la funzione $f(s)$, necessariamente analitica⁽¹⁾, è regolare all'infinito e si annulla ivi almeno come $1/s$, essa è la trasformata di Laplace della funzione

$$(6) \quad F(t) = e^{-ht} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t),$$

dove h è un opportuno numero reale e le a_n sono i coefficienti dello sviluppo della funzione $(s+h)f(s)$ in serie di potenze della quantità

$$(7) \quad \sigma = \frac{s+h-1}{s+h},$$

cioè si è posto

$$(8) \quad f(s) = \frac{1}{s+h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{s+h-1}{s+h} \right)^n.$$

La serie che figura nella (6) converge assolutamente ed uniformemente in tutto il semiasse t positivo.

Infatti osserviamo anzitutto che, in virtù delle ipotesi fatte, sarà certo possibile determinare un cerchio γ del piano s (che converrà supporre col diametro sull'asse reale) all'esterno del quale le funzioni $f(s)$ ed $sf(s)$ siano sempre olomorfe. D'altro lato, detto h un numero reale tale che il punto $1/2 - h$ giaccia fuori e alla destra del cerchio γ , si vede subito che la trasformazione lineare (7) (che, com'è facile controllare, muta il semipiano $\Re(s) > 1/2 - h$ nel cerchio del piano σ avente per centro l'origine e rag-

(1) È noto che la trasformata di Laplace di una funzione $F(t)$ soddisfacente a condizioni larghissime (integrabilità ed esistenza dell'integrale (1) almeno per un certo s_0) è sempre una funzione analitica, olomorfa almeno in un semipiano $\Re(s) > c$. Ved. all'uopo: S. PINCHERLE, *Sur les fonction déterminantes*. « Ann. École Norm. Sup. » (3), 22, 1905, E. LANDAU: *Ueber die Grundlagen...* « Bayerische Akad. d. Wiss. », 36, 1906) oppure la monografia di M. CIBRARIO: *La trasformazione di Laplace*. « Rend. Ist. Lombardo » (2), 62, 1929.

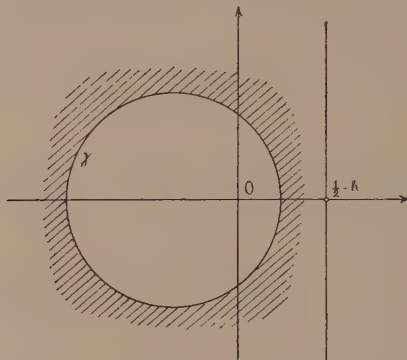
gio 1) trasforma la regione esterna al cerchio γ in un cerchio col centro nel punto $\sigma = 0$ e raggio maggiore di 1; dunque la funzione

$$f^*(\sigma) = (s + b)f(s)$$

sarà certo sviluppabile in una serie di potenze di σ con raggio di convergenza $r > 1$, il che notoriamente implica che i suoi coefficienti a_n soddisferanno ad una limitazione del tipo

$$|a_n| < \frac{A}{\rho^n} \quad (1 < \rho < r),$$

dove A denota un opportuno numero positivo, indipendente da n .



Ne segue, tenendo conto della (3), che potrà porsi

$$|a_n L_n(t)| < \frac{A}{\rho^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{t^m}{m!} \quad (t \geq 0),$$

epperò la serie che figura nella (6) ammette come maggiorante l'altra:

$$S^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{\rho^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{t^m}{m!} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{1}{\rho^n}$$

che, essendo

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} z^m = \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \quad (|z| < 1),$$

può scriversi

$$(9) \quad S^* = \frac{A\rho}{\rho-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\rho-1} \right)^m = \frac{A\rho}{\rho-1} e^{\frac{t}{\rho-1}}.$$

Il risultato ottenuto mostra in primo luogo come la serie (6) sia assolutamente ed uniformemente convergente in ogni segmento $(0, T)$ del

semiasse $t > 0$. La funzione $F(t)$ esiste dunque ed è continua per ogni $t \geq 0$. Dico inoltre che la serie che si origina cercando di applicare ad essa la trasformazione di Laplace:

$$e^{-(h+s)t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)$$

è, almeno per valori reali sufficientemente grandi di s , integrabile termine a termine fra 0 e ∞ .

Infatti, detta $S_v(t)$ la ridotta v -esima di detta serie et₁ et₂ due valori qualsiasi (positivi) di t , qualunque sia v , si avrà

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} S_v(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} e^{-(h+s)t} \sum_{n=0}^v |a_n| |L_n(t)| dt < \int_{t_1}^{t_2} e^{-(h+s)t} S^* dt$$

cioè, tenendo conto della (8),

$$(10) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} S_v(t) dt \right| < \int_{t_1}^{t_2} e^{-\left(h+s-\frac{1}{\rho-1}\right)t} dt,$$

disuguaglianza che mostra come, almeno per

$$s > \frac{1}{\rho-1} - h,$$

l'integrale

$$\int_0^{\infty} S_v(t) dt$$

è uniformemente convergente rispetto a v . Ne segue che, come volevasi dimostrare, si ha

$$\mathcal{L}[F(t)] = \int_0^{\infty} \lim_{v \rightarrow \infty} S_v(t) dt = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} S_v(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}[e^{-ht} L_n(t)],$$

supposto, beninteso, che l'ultima serie converga.

Per giungere al teorema non vi è ora che ben poco da aggiungere. Precisamente basta osservare che, in virtù della (5), l'ultima serie ottenuta può scriversi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s+h} \left(\frac{s+h-1}{s+h} \right)^n = \frac{1}{s+h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n;$$

dunque, per $s > 1/(\rho-1) - h$ e quindi sempre, si ha

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(s), \quad \text{c. b. d.}$$

4. Il teorema ottenuto è suscettibile della seguente generalizzazione permettente di attenuare la condizione che la funzione $f(s)$ debba annullarsi del prim'ordine per $s \rightarrow \infty$:

Se si può determinare un numero reale h ed un $\alpha > -1$ in modo tale che la funzione

$$f_1(s) = (s + h)^{\alpha+1} f(s),$$

risulti regolare all'esterno di un cerchio γ , tutto contenuto nel semipiano $\Re(s) < \frac{1}{2} - h$, la funzione $f(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione:

$$(6') \quad F(t) = e^{-ht} t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\alpha + n + 1)} a_n L_n^{(\alpha)}(t),$$

dove le a_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di σ della funzione f_1 , cioè si è posto

$$(8') \quad f(s) = \frac{1}{(s + h)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{s + h - 1}{s + h} \right)^n.$$

La serie (6') converge assolutamente ed uniformemente in tutto il semiasse $t > 0$.

Per giungere a questa proposizione non vi è che da ripetere la dimostrazione precedente sostituendo la (6') alla (6). L'unica importante modificazione è che la (9) viene sostituita dalla formula

$$(9') \quad S^* = \frac{A\rho}{\rho - 1} \varphi_\alpha \left(\frac{t}{\rho - 1} \right),$$

dove φ_α denota la trascendente intera definita dalla serie

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(\alpha + m + 1)}$$

che per $\alpha = 0$ si riduce ad e^x , mentre che nel caso generale è espressa dalla formula, facile a stabilire:

$$\Gamma(\alpha + 1) \varphi_\alpha(x) = 1 + x \int_0^1 (1 - \xi)^\alpha e^{\xi x} d\xi.$$

Conseguentemente la (10) dovrà venir sostituita coll'altra disuguaglianza:

$$(10') \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} S_v(t) dt \right| < \frac{A\rho}{(\rho - 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} e^{-(b+s)t} t^\alpha dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho - 1} \int_0^1 (1 - \xi)^\alpha d\xi \int_{t_1}^{t_2} e^{-\left(b+s-\frac{\xi}{\rho-1}\right)t} t^{\alpha+1} dt \right],$$

che permette di giungere alle medesime conclusioni.

Notiamo che le (6')-(8') permettono di ritrovare immediatamente un teorema di Doetsch (loc. cit. ⁽⁴⁾) e cioè che se $f(s)$ si comporta per $s \rightarrow \infty$ come $As^{-(\alpha+1)}$, ($\alpha > -1$), allora $F(t)$ si comporta per $t \rightarrow 0$ come $\frac{A t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, e reciprocamente.

Notiamo finalmente che nel caso in cui il metodo d'inversione discendente dai precedenti teoremi debba applicarsi ed una funzione $f(s)$ data numericamente sull'asse reale; allora, invece di parlare di sviluppo in serie di potenze di σ (il che non avrebbe un senso preciso), si approssimerà la funzione con un conveniente polinomio in σ .

Matematica. — Limitazione delle somme $(C, 1)$ di una serie di polinomi di Legendre di una funzione lipschitziana di ordine $\alpha > 1/2$ ⁽¹⁾. Nota di A. FOÀ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. ABETTI.

È noto ⁽³⁾ che, se $f(x)$, nell'intervallo $(-1, +1)$ può porsi nella forma

$$f(x) = f(-1) + \int_{-1}^x f'(\xi) d\xi,$$

con $f'(x)(1-x^2)$ a variazione limitata; per il resto della serie di Legendre in ogni intervallo (α, β) interno a $(-1, +1)$ vale la limitazione

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{k}{n^{1/2}} \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

dove k è una costante indipendente da x e da n , ma dipendente da α, β .

E ancora ⁽⁴⁾ se $f(x)$ è a variazione limitata nell'intervallo $(-1, +1)$ ed ha derivata prima a variazione limitata in un intervallo (α, β) interno a $(-1, +1)$, è

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{k}{n} \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

dove $s_n(x)$ è la somma parziale n -esima della serie di Legendre di $f(x)$ e k è una costante indipendente da x e da n .

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(3) Cfr. M. PICONE, *Appunti di analisi superiore* (in corso di pubblicazione), p. 260.

(4) Cfr. D. JACKSON, *The Theory of Approximation*. « American Mathematical Society Colloquium Publications », vol. XI, New-York, 1930, p. 76.

Noi vogliamo qui dimostrare il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $(-1, +1)$ e ivi lipschitziana di ordine $\alpha > 1/2$

$$(1) \quad |f(x_2) - f(x_1)| < k |x_2 - x_1|^\alpha \quad \alpha > 1/2$$

e $\sigma_n^{(1)}(x)$ la somma $(C, 1)$ dei primi $n+1$ termini della serie di Legendre di $f(x)$

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad , \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') P_n(x') dx',$$

vale la limitazione

$$(3) \quad |\sigma_n^{(1)}(x) - f(x)| < \frac{k}{n^{1/2}} \quad , \quad -1 \leq x \leq 1,$$

dove k è una costante indipendente da $n^{(1)}$.

Posto $x = \cos \vartheta$ e $x' = \cos \vartheta'$ la somma $s_n(x)$ dei primi n termini della serie (2) è

$$s_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\cos \vartheta') \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(\cos \vartheta) P_k(\cos \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta'$$

dalla quale si ha

$$(4) \quad s_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta') \sin \vartheta' \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(\cos \gamma) d\vartheta' d\varphi \quad (2)$$

con

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi$$

e dove l'integrazione è estesa alla superficie della sfera di raggio unitario e ϑ', φ sono le coordinate sferiche di un suo punto; ϑ' colatitudine polare misurata fra 0 e π , φ longitudine misurata fra 0 e 2π .

La somma $(C, 1)$ della (4) è

$$(5) \quad \sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta') \sin \vartheta' \sum_{n=0}^{(1)} (\gamma) d\vartheta' d\varphi$$

(1) In queste ipotesi la serie (2) è assolutamente convergente [cfr. E. FERRARI, *Convergenza assoluta delle serie di polinomi di Legendre; Estensione di un teorema di S. Bernstein*. « Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. », (2), LXVII, 1934, pp. 849-865. Il teorema enunciato, per $\alpha = 1$ e per le somme $(C, 0)$ è di E. L. MICKELSON, *On the Approximate representation of a function of two variables*. « Transactions of the American Math. Soc. », 33, (1931) [pp. 759-781], p. 774, teor. VIII. Quando sia $0 < \alpha \leq 1$, e ci si riferisca ad un intervallo $(-1 + \eta, 1 - \eta)$; interno a $(-1, 1)$, vale per le somme $(C, 0)$ la limitazione $|f(x) - p_n(x)| < Hn^{-\alpha} \log n$, D. JACKSON, loc. cit., p. 31.

(2) Cfr. E. W. HOBSON, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, 1931, p. 342.

dove $\sum_n^{(1)}(\gamma)$ è la somma $(C, 1)$ dei primi $n + 1$ termini della serie $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) P_k(\cos \gamma)$.

Prendiamo sulla sfera, come nuovo polo, il punto $P(\vartheta, 0)$ e come nuove coordinate sferiche γ, Φ con $0 \leq \gamma \leq \pi, 0 \leq \Phi \leq 2\pi$; la (5) diventa

$$(6) \quad \sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\gamma, \Phi) \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\Phi$$

dove

$$(7)_1 \quad F(\gamma, \Phi) = f(\cos \vartheta') \quad , \quad (7)_2 \quad \cos \vartheta' = \cos \gamma \cos \vartheta + \sin \gamma \sin \vartheta \cos \Phi.$$

Si ha anche

$$(8) \quad f(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta) \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\Phi,$$

e sottraendo dalla (6) la (8) si ha in valore assoluto

$$(9) \quad \begin{aligned} & |\sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) - f(\cos \vartheta)| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [F(\gamma, \Phi) - f(\cos \vartheta)] \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\Phi \right|. \end{aligned}$$

Dalla (1) per $x_1 = \cos \vartheta, x_2 = \cos \vartheta'$ segue

$$|f(\cos \vartheta') - f(\cos \vartheta)| < k |\cos \vartheta' - \cos \vartheta|^\alpha,$$

ma

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \gamma \cos \Phi$$

e

$$|\cos \vartheta (\cos \gamma - 1)| \leq |\cos \gamma - 1| \leq \frac{\gamma^2}{2}; \quad |\sin \vartheta \sin \gamma \cos \Phi| \leq |\sin \gamma| \leq |\gamma|,$$

quindi

$$\begin{aligned} |\cos \vartheta' - \cos \vartheta|^\alpha &= |\cos \vartheta (\cos \gamma - 1) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos \Phi| \leq \\ &\leq |\gamma^2 + \gamma|^\alpha \leq (\pi + 1)^\alpha \gamma^\alpha; \end{aligned}$$

ed essendo $F(\gamma, \Phi) = f(\cos \vartheta')$, è

$$(10) \quad |F(\gamma, \Phi) - f(\cos \vartheta)| < k_1 \gamma^\alpha$$

con k_1 costante assoluta. La (9) diventa

$$\begin{aligned} |\sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) - f(\cos \vartheta)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |F(\gamma, \Phi) - f(\cos \vartheta)| \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\Phi < \\ &< \frac{k_1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \gamma^\alpha \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\Phi = \frac{k_1}{2} \int_0^\pi \gamma^\alpha \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma d\gamma. \end{aligned}$$

Abbiamo ⁽¹⁾

$$|\sum_n^{(1)}(\gamma)| < \frac{k_2}{n^{1/2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sin^{1/2} \gamma},$$

quindi

$$|\sum_n^{(1)}(\gamma) \cdot \gamma^\alpha \sin \gamma| < \frac{k_2}{n^{1/2}} \gamma^\alpha \frac{\sin^{1/2} \gamma}{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma} \leq \frac{\sqrt{2} k_2}{n^{1/2}} \frac{\gamma^\alpha}{\sin^{3/2} \frac{1}{2} \gamma};$$

ma per $0 \leq \gamma \leq \pi$ è $\sin \frac{1}{2} \gamma / \frac{1}{2} \gamma > 2/\pi$ da cui $1/\sin \frac{1}{2} \gamma < \pi/\gamma$, e perciò

$$|\sum_n^{(1)}(\gamma) \gamma^\alpha \sin \gamma| < \frac{k_2 \sqrt{2} \pi}{n^{1/2}} \gamma^{\alpha-3/2}$$

e

$$|\sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) - f(\cos \vartheta)| < \frac{k_3}{n^{1/2}} \int_0^\pi \gamma^{\alpha-3/2} d\gamma;$$

ed essendo $\alpha - 3/2 > -1$, è

$$|\sigma_n^{(1)}(\cos \vartheta) - f(\cos \vartheta)| < \frac{C}{n^{1/2}}$$

con C costante indipendente da n .

(1) Cfr. E. W. HOBSON, loc. cit., p. 349.

Matematica. — *Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche*⁽¹⁾. Nota II di B. MANIÀ, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

1. In una Nota precedente con lo stesso titolo ho dato una soluzione del problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche, che presenta un grado di generalità uguale a quello che si raggiunge nel caso della sfera per mezzo dell'integrale di Poisson. In questa seconda Nota mi propongo di indicare come quel risultato si estende al caso piano.

2. Sieno, nel piano (x, y) , C e C' due circonferenze col centro nella origine delle coordinate i cui raggi abbiano le lunghezze R ed R' con $R > R'$. Indicate con (r, α) le coordinate polari di un punto del piano (x, y) , sia $f_1(\alpha)$ una funzione data sopra C e integrabile nel senso di Lebesgue sopra l'intervallo $(0, 2\pi)$. Di più supponiamo che sia

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} f_1(\alpha) d\alpha = 0.$$

Allora, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

è la serie di Fourier di $f_1(\alpha)$, la serie

$$(2) \quad U_1(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n - \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n \right] (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

dove si è posto $q = R':R$, è uniformemente convergente in ogni campo chiuso compreso fra C e C' e senza punti comuni con C .

Ora, se (r, α) non appartiene a C , si può scrivere

$$\begin{aligned} U_1(r, \alpha) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha). \end{aligned}$$

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

Ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^{2k} \frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

e la serie doppia al secondo membro di questa uguaglianza è uniformemente e assolutamente convergente in ogni campo compreso fra C e C' e senza punti comuni con C. Sommando la serie doppia prima rispetto ad n e poi rispetto a k, e trasformando le somme rispetto all'indice n col metodo di Poisson⁽¹⁾ si ottiene

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_C f_1(\alpha') \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{R^2 - 2Rr q^{2k} \cos(\alpha' - \alpha) + r^2 q^{4k}} ds,$$

avendo indicato con ds il differenziale dell'arco di C e con (R, α') le coordinate polari di un punto di C.

La serie al secondo membro della (3) è uniformemente convergente in ogni campo chiuso compreso fra C e C' e senza punti comuni con C. Analogamente

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^{2k+1} \frac{R'}{r} \right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_C f_1(\alpha') \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{r^2 q^{-2} - 2R'r q^{2k-1} \cos(\alpha' - \alpha) + R'^2 q^{4k}} ds,$$

e le serie che compaiono in questa formula sono tutte uniformemente e assolutamente convergenti nel campo chiuso compreso fra C e C'.

Di qua e dal ragionamento del n. 2 della Nota I segue il

TEOREMA I. — Se $f_1(\alpha)$ è una funzione, integrabile nel senso di Lebesgue sopra l'intervallo (0, 2π) e soddisfacente alla condizione (1), le due serie

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_C f_1(\alpha') \frac{R^2 - r^2 q^{4k}}{R^2 - 2Rr q^{2k} \cos(\alpha - \alpha') + r^2 q^{4k}} ds$$

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_C f_1(\alpha') \frac{r^2 q^{-2} - R'^2 q^{4k}}{r^2 q^{-2} - 2R'r q^{2k-1} \cos(\alpha' - \alpha) + R'^2 q^{4k}} ds$$

(1) Vedi, per esempio, L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, pp. 375-377.

sono uniformemente convergenti in ogni campo chiuso compreso fra C e C' senza punti comuni con C ; la loro differenza $U_1(r, \alpha)$ è una funzione continua in ogni tale campo, armonica nel campo aperto compreso fra C e C' e identicamente nulla sopra C' , la quale per (r, α) tendente a un punto di C si comporta come l'integrale di Poisson

$$\frac{1}{2\pi R} \int_C f_1(\alpha') \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha' - \alpha) + r^2} ds'.$$

3. Ripetendo i ragionamenti ora fatti e considerando in luogo della (2) la serie

$$(8) \quad U_2(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n - \frac{q''}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] (a'_n \cos n\alpha + b'_n \sin n\alpha),$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\alpha + b'_n \sin n\alpha)$$

è la serie di Fourier di una funzione $f_2(\alpha)$ data sopra C' , integrabile nel senso di Lebesgue sull'intervallo $(0, 2\pi)$, e soddisfacente alla condizione

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} f_2(\alpha) d\alpha = 0,$$

si dimostra il

TEOREMA II. — Se $f_2(\alpha)$ è una funzione, integrabile nel senso di Lebesgue sopra l'intervallo $(0, 2\pi)$ e soddisfacente alla condizione (9), le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R'} \int_C f_2(\alpha') \frac{r^2 - R'^2 q^{4k}}{r^2 - 2R'rq^{2k} \cos(\alpha' - \alpha) + R'^2 q^{4k}} ds',$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R'} \int_C f_2(\alpha') \frac{R^2 - r^2 q^{4k+2}}{R^2 - 2Rrq^{2k+1} \cos(\alpha' - \alpha) + r^2 q^{4k+2}} ds',$$

sono uniformemente convergenti in ogni campo chiuso compreso fra C e C' senza punti comuni con C' ; la loro differenza $U_2(r, \alpha)$ è una funzione continua in ogni tale campo, armonica nel campo aperto compreso fra C e C' , e identicamente nulla sopra C , la quale per (r, α) tendente a un punto di C' si comporta come l'integrale di Poisson

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi R'} \int_C f_2(\alpha') \frac{r^2 - R'^2}{R'^2 - 2R'r \cos(\alpha' - \alpha) + r^2} ds'.$$

4. Dai numeri 2 e 3 segue il

TEOREMA III. — *Nelle ipotesi dei due teoremi precedenti, la funzione*

$$U(r, \alpha) = U_1(r, \alpha) + U_2(r, \alpha)$$

è armonica nell'interno del campo compreso fra C e C'; al tendere di (r, α) a un punto di C si comporta come l'integrale (7) e al tendere di (r, α) a un punto di C' si comporta come l'integrale (10).

5. OSSERVAZIONE I. — Le condizioni (1) e (9) sono essenziali perchè se poniamo ad esempio $f_1(\alpha) \equiv 1$, essendo per ogni $r < R$ e per ogni α

$$\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha' - \alpha) + r^2} d\alpha = 1,$$

i termini della serie (5) sono tutti uguali a 1 e quindi il Teorema I non è più vero.

Se la condizione (1) non è soddisfatta, poniamo

$$(11) \quad \bar{f}_1(\alpha) = f_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\alpha) d\alpha,$$

e allora $f_1(\alpha)$ soddisfa alla (1). Determiniamo quindi la funzione $\bar{U}_1(r, \alpha)$ che corrisponde ad $\bar{f}_1(\alpha)$ per il teorema del n. 2, e poniamo

$$(12) \quad U_1(r, \alpha) = \bar{U}_1(r, \alpha) + \frac{1}{2\pi \log q} \int_0^{2\pi} f_1(\alpha) d\alpha \cdot \log \frac{R'}{r}.$$

La funzione $U_1(r, \alpha)$ ha le proprietà indicate nel teorema del n. 2.

Osservazioni analoghe si possono fare per i teoremi dei nn. 3 e 4.

OSSERVAZIONE II. — I risultati ottenuti ci permettono di estendere al caso di valori al contorno dati da due funzioni $f_1(\alpha)$ ed $f_2(\alpha)$ integrabili nel senso di Lebesgue sopra l'intervallo $(0, 2\pi)$ una formula risolutiva del problema di Dirichlet per la corona circolare data dal Gronwall⁽¹⁾ nel caso di valori al contorno continui.

Infatti la funzione $\bar{f}_1(\alpha)$ data dalla (11) ha una serie di Fourier che si ottiene da quella di $f_1(\alpha)$ sopprimendo in questa il termine

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\alpha) d\alpha,$$

(1) Vedi T. H. GRONWALL, *Some special boundary problems in the theory of the harmonics functions* («Bull. of the Ann. Math. Soc.», vol. XIX (1913), pp. 227-233) o anche L. TONELLI, loc. cit., pp. 399-402.

e, per il Teorema I, la serie (2) risolve il problema di Dirichlet per la corona e per valori al contorno dati da $\bar{f}_1(\alpha)$ sopra C e identicamente nulli sopra C'. Quindi la serie

$$(12) \quad \frac{1}{2} a_0 \frac{\log R' - \log r}{\log q} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n - \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n \right] (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

risolve il problema di Dirichlet per la corona circolare e per valori al contorno dati da $f_1(\alpha)$ sopra C e identicamente nulli sopra C'.

Così pure la serie

$$(13) \quad \frac{1}{2} a'_0 \frac{\log r - \log R}{\log q} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n - \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] (a'_n \cos n\alpha + b'_n \sin n\alpha)$$

risolve il problema di Dirichlet per la corona circolare e per valori al contorno identicamente nulli sopra C e dati da $f_2(\alpha)$ sopra C'.

Sommando le serie (12) e (13) si trova la formula di Gronwall che risolve il problema di Dirichlet per valori al contorno dati da $f_1(\alpha)$ sopra C e da $f_2(\alpha)$ sopra C':

$$U(r, \alpha) = \left\{ \frac{a_0 \log R' - a'_0 \log R}{2 \log q} + \frac{a'_0 - a_0}{2 \log q} \log r \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{a_n - a'_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n + \frac{a'_n - a_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n \right] \cos n\alpha + \right. \\ \left. + \left[\frac{b_n - b'_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R} \right)^n + \frac{b'_n - b_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r} \right)^n \right] \sin n\alpha \right\}.$$

L'estensione della formula di Gronwall qui ottenuta si può ottenere anche direttamente come ho indicato in un'altra Nota, ammettendo però già stabilita la formula stessa nel caso di valori al contorno continui.

OSSERVAZIONE III. - Le formule di questa Nota e della Nota I appaiono notevoli, oltre che per la loro generalità, anche perchè permettono di estendere immediatamente al caso della corona circolare e del campo compreso fra due sfere concentriche i risultati che si ottengono per il cerchio e per la sfera dallo studio dell'integrale di Poisson.

Matematica. — *Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3 .* Nota di A. MAXIA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sia data in S_3 una X_3^2 definita dall'equazione di Pfaff

$$(1) \quad P dx + Q dy + R dz = 0$$

con P, Q, R funzioni nelle variabili x, y, z (date anche a meno di un comune fattore) per le quali siano soddisfatte le solite condizioni di continuità e di derivabilità.

È nota l'estensione a tali varietà di alcuni risultati della geometria proiettiva differenziale delle superficie, come sono quelli inerenti alle direzioni coniugate e alle direzioni asintotiche ⁽²⁾. Le direzioni coniugate costituiscono in ogni punto (x, y, z) della X_3^2 e nel piano

$$(2) \quad P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0$$

ivi associato alla varietà (1), cioè tangente alla X_3^2 , una proiettività la quale diventa involutoria nel caso in cui la forma (1) sia completamente integrabile. Nel caso generale invece i punti di S_3 per i quali la relazione di coniugio è reciproca costituiscono una superficie.

Il modo di definire le direzioni coniugate è ben noto: una direzione $(d'x, d'y, d'z)$ si dirà coniugata a una direzione (dx, dy, dz) di X_3^2 uscente da un punto (xyz) di S_3 se essa è l'intersezione dei due piani associati alla X_3^2 nei punti infinitamente vicini $(x, y, z), (x + dx, y + dy, z + dz)$.

Le direzioni asintotiche si possono definire sia come le direzioni doppie nel fascio proiettivo delle direzioni coniugate, sia come le rette tangenti alle curve di X_3^2 aventi in ogni punto il piano osculatore coincidente col piano ivi associato alla forma (1).

Tralasciamo di scrivere le equazioni relative a tali enti; vediamo piuttosto come si possano ricavare altri elementi proiettivamente legati al punto generico di X_3^2 che sono le estensioni alle direzioni di Clebsch-Darboux, degli spigoli di Green, delle direttrici di Wilczynski. Vedremo anzi a pro-

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) Ved. A. Voss, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme*. «*Mathem. Annalen*», 23, Band, 1884, pp. 45-81; D. SINTZOV, *Studien über das System der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*. «*Communications de la Soc. Mat. de Kharkow et de l'Institut des Sciences de l'Ukraine*», serie 4^a, to. V, 1932, pp. 97-121.

posito delle prime come si ottengono per le varietà anolonomie diverse terne di direzioni fra loro distinte che nel caso dell'olonomia si riducono a quelle di Darboux.

I. DIREZIONI DI CLEBSCH-DARBOUX. — Secondo un risultato ottenuto dal Bompiani ⁽¹⁾ applicando la teoria degli invarianti di intersezione di due curve gobbe alle asintotiche uscenti da un punto P di una superficie si ha che le tangenti di Darboux si possono caratterizzare anche come le rette luogo dei punti che sono i vertici dei coni proiettanti le due asintotiche uscenti da P e aventi lungo la generatrice comune un contatto del terzo ordine almeno (*rette principali*).

Ora, nulla ci vieta di applicare anche alle asintotiche uscenti da un punto P di una varietà anolonomia X^2_3 l'accennata teoria. Riferiamo per questo le asintotiche a un sistema proiettivo locale avente l'origine in P e gli assi X, Y coincidenti con le direzioni asintotiche uscenti da P. In prossimità di P si avranno allora per le due curve sviluppi del tipo

$$(3) \quad \begin{cases} Y = aX^2 + bX^3 + cX^4 + dX^5 + \dots \\ Z = rX^3 + sX^4 + tX^5 + \dots \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} X = \alpha Y^2 + \beta Y^3 + \gamma Y^4 + \delta Y^5 + \dots \\ Z = \rho Y^3 + \sigma Y^4 + \tau Y^5 + \dots \end{cases}$$

dove $a, b, \dots$ si possono calcolare in funzione di P, Q, R e loro derivate. Ad esempio, se $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ sono le componenti delle direzioni asintotiche rispetto al sistema cui è riferita la forma (I), per i coefficienti a, r, α, ρ si ricava

$$(5) \quad \begin{cases} a = -\frac{\omega(AAA)}{2[\omega(AB) + \omega(BA)]} \\ \alpha = -\frac{\omega(BBB)}{2[\omega(AB) + \omega(BA)]} \end{cases} \quad \begin{cases} r = \frac{\omega(AB)\omega(AAA)}{6[\omega(AB) + \omega(BA)]} \\ \rho = \frac{\omega(BA)\omega(BBB)}{6[\omega(AB) + \omega(BA)]} \end{cases}$$

(1) Cfr. E. POMPIANI, *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*. «Rendiconti Lincei» (6), XIV, 1931, pp. 456-461.

dove

$$\begin{aligned}
 \omega(AB) &= (P_x A_1 + P_y A_2 + P_z A_3) B_1 + (Q_x A_1 + Q_y A_2 + Q_z A_3) B_2 + \\
 &\quad + (R_x A_1 + R_y A_2 + R_z A_3) B_3 \\
 \omega(BA) &= (P_x B_1 + P_y B_2 + P_z B_3) A_1 + (Q_x B_1 + Q_y B_2 + Q_z B_3) A_2 + \\
 &\quad + (R_x B_1 + R_y B_2 + R_z B_3) A_3 \\
 \omega(AAA) &= P_{xx} A_1^3 + (Q_{xx} + 2 P_{xy}) A_1^2 A_2 + (R_{xx} + 2 P_{xz}) A_1^2 A_3 + \\
 &\quad + (P_{yy} + 2 Q_{xy}) A_2^2 A_1 + Q_{yy} A_2^3 + (R_{yy} + 2 Q_{yz}) A_2^2 A_3 + \\
 &\quad + (P_{zz} + 2 R_{xz}) A_3^2 A_1 + (Q_{zz} + 2 R_{yz}) A_3^2 A_2 + R_{zz} A_3^3 + \\
 &\quad + 2 (P_{yz} + Q_{zx} + R_{xy}) A_1 A_2 A_3 \\
 \omega(BBB) &= P_{xx} B_1^3 + (Q_{xx} + 2 P_{xy}) B_1^2 B_2 + (R_{xx} + 2 P_{xz}) B_1^2 B_3 + \\
 &\quad + (P_{yy} + 2 Q_{xy}) B_2^2 B_1 + Q_{yy} B_2^3 + (R_{yy} + 2 Q_{yz}) B_2^2 B_3 + \\
 &\quad + (P_{zz} + 2 R_{xz}) B_3^2 B_1 + (Q_{zz} + 2 R_{yz}) B_3^2 B_2 + R_{zz} B_3^3 + \\
 &\quad + 2 (P_{yz} + Q_{zx} + R_{xy}) B_1 B_2 B_3
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Premesso questo si ottiene subito che le rette che, secondo la teoria accennata, costituiscono per le varietà anolonomie una estensione delle direzioni di Darboux (cioè, le *rette principali* relative alle asintotiche di X^2 uscenti da P), sono espresse dalla equazione cubica

$$rX^3 + \rho Y^3 = 0 \tag{7}$$

o anche, in forza delle (5) dall'altra

$$\omega(AB) \omega(AAA) X^3 + \omega(BA) \omega(BBB) Y^3 = 0. \tag{8}$$

Dualizzando il procedimento si perviene all'altra forma

$$\omega(BA)^2 \omega(AAA) X^3 + \omega(AB)^2 \omega(BBB) Y^3 = 0 \tag{9}$$

la quale rappresenterà le rette inviluppo dei piani intersecanti le sviluppabili osculatrici alle curve (3), (4) secondo due inviluppi piani aventi in P un contatto del terzo ordine almeno.

Le forme (8), (9) sono equivalenti alla forma

$$\omega(AAA) X^3 + \omega(BBB) Y^3 = 0 \tag{10}$$

allora e allora soltanto che sia

$$\omega(AB) = \omega(BA). \tag{11}$$

Mediante le prime due delle (4) si ricava subito che il verificarsi identico della (11) esprime la condizione di ologonomia della varietà X^2 .

Indipendentemente da questo fatto però la (10) rappresenta sempre anch'essa una terna di direzioni legata in modo proiettivamente invariante al punto generico della X_3^2 . Se infatti si pone la (2) sotto la forma omogenea

$$P_0 X_0 + P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 = 0$$

e si conviene⁽¹⁾ di chiamare superficie polare di ordine r di un punto generico P di X_3^2 rispetto alla varietà la superficie d'equazione

$$(12) \quad (P_0 X_0 + P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3)^{(r)} = 0$$

dove si intenda che la (12) rappresenti lo sviluppo di una forma del tipo

$$\left(\frac{\partial f(X_0 X_1 X_2 X_3)}{\partial X_0} X_0 + \frac{\partial f(X_0 X_1 X_2 X_3)}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial f(X_0 X_1 X_2 X_3)}{\partial X_2} X_2 + \frac{\partial f(X_0 X_1 X_2 X_3)}{\partial X_3} X_3 \right)^{(r)} = 0$$

con sostituzione del termine generico $\frac{\partial^r f(X_0 X_1 X_2 X_3)}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \dots \partial X_{i_r}} (i_1, i_2, \dots, i_r = 0, 1, 2, 3)$

con l'altro $\frac{\partial^{r-1} P_{i_r}}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \dots \partial X_{i_{r-1}}} (i_1, i_2, \dots, i_r = 0, 1, 2, 3)$, si perviene al seguente risultato:

a) l'intersezione della superficie polare del terzo ordine di un punto P di X_3^2 col piano associato in P alla varietà è una cubica avente in P un punto doppio e le tangenti nodali coincidenti con le tangenti asintotiche uscenti da P .

b) le rette che da P proiettano i tre flessi della cubica in discorso sono espresse dalla forma cubica (10).

Sotto questo aspetto le rette rappresentate dalla (10) costituiscono una estensione delle (prime) direzioni di Clebsch le quali, come già è stato dimostrato dal Colombo⁽²⁾, coincidono, nel caso delle superficie, con le direzioni di Darboux; si viene inoltre a dare un significato geometrico oltre che ai coefficienti r, ρ , anche agli altri a, α . È evidente infatti che la (10) è equivalente all'altra

$$(13) \quad a X^3 + \alpha Y^3 = 0.$$

Considerando le direzioni coniugate a quelle rappresentate dalle (8), (9), (10) si ottengono altre tre forme fra loro distinte le quali, nel caso dell'olonomia, coincidono in una sola che rappresenta le direzioni di Segre.

(1) Cfr. A. VOSS, *Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades*. « Mathem. Annalen », 23. Band, 1884, pp. 157-180; e *Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme*. Ibid., pp. 359-411.

(2) Cfr. B. COLOMBO, *Coincidenza delle tangenti di Clebsch colle tangenti di Darboux e di Segre*. « Boll. Unione Matem. Italiana », 7, 1928, pp. 100-102.

2. SPIGOLI DI GREEN. — Fra i vari significati geometrici che si possono attribuire alla (11) notiamo il seguente: essa rappresenta la condizione di allineamento dei tre « punti principali » del Bompiani; cioè, dei punti che sono i vertici dei coni proiettanti le asintotiche uscenti da P e aventi lungo la generatrice comune un contatto del quarto ordine almeno ⁽¹⁾.

Nel caso delle superficie la retta che congiunge tali punti coincide col secondo spigolo di Green.

Nel caso anolonomo invece i detti punti in generale non sono allineati ⁽²⁾; ma essi determinano ancora una retta invariante per la varietà: la polare del punto P rispetto al triangolo determinato da tali punti.

Indipendentemente dalla condizione di ologonomia della varietà tale retta è data dalle equazioni

$$(14) \quad \frac{s}{r} X + \frac{\sigma}{\rho} Y = 2 \quad Z = 0.$$

Per la retta ad essa duale si ha invece

$$(15) \quad \begin{cases} X + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\rho^2} \left(\sigma - 2 \frac{\beta \rho}{\alpha} \right) Z = 0 \\ Y + \frac{1}{2} \frac{a}{r^2} \left(s - 2 \frac{br}{a} \right) Z = 0. \end{cases}$$

Delle rette (14), (15), che in certo modo si potrebbero considerare come gli spigoli di Green di una varietà anolonomica X^3 , si può dare un'altra caratterizzazione di facile verifica: esse sono la retta impropria del piano XY e l'asse Z di un sistema di riferimento locale che nelle equazioni (3), (4) rende nulli i termini b, β, s, σ .

3. DIRETTRICI DEL WILCZYNSKI. — Per ricavare queste rette si può seguire il procedimento che ha dato origine alla denominazione delle rette medesime: quello cioè che porta alla determinazione di tali rette come le direttrici della congruenza lineare intersezione dei due complessi lineari osculatori alle asintotiche uscenti da uno stesso punto della varietà.

Sempre nel sistema cui sono riferite le (3), (4) si ricavano le coordinate omogenee di tali rette

$$(16) \quad \begin{cases} P^{23} = 0 \\ P^{31} = 0 \\ P^{12} = ar^2 \alpha p^2 (ap + ar) \end{cases} \quad \begin{cases} P^{03} = 0 \\ P^{02} = ar (r^2 \mu - \alpha p^3 l) \\ P^{01} = \alpha p (-p^2 m + ar^3 \lambda) \end{cases}$$

(1) Cfr. BOMPIANI, loc. cit.

(2) Precisamente: la condizione d'allineamento dei tre punti coincide con la condizione per l'ologonomia della varietà. Il che porta in particolare (cfr. BOMPIANI, loc. cit.) che non sussiste una estensione alle X^2 delle quadriche di Darboux.

$$(17) \quad \begin{cases} P^{23} = 0 \\ P^{31} = 0 \\ P^{12} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P^{03} = 3ar^2\alpha\rho^2(\alpha\rho + \alpha r) \\ P^{02} = ar(ar\mu + \alpha^2\rho^2l) \\ P^{01} = \alpha\rho(\alpha\rho m + a^2r^2\lambda) \end{cases}$$

dove

$$(18) \quad \begin{cases} l = 3rb - 2sa \\ \lambda = 3\rho\beta - 2\sigma\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} m = (9rbs - 9r^2c - 6as^2 + 5atr) \\ \mu = (9\rho\beta\sigma - 9\rho^2\gamma - 6\alpha\sigma^2 + 5\alpha\tau\rho) \end{cases}$$

Di queste rette la prima giace nel piano associato in P alla varietà e non passa per P, la seconda passa per il detto punto e non giace nel piano ivi associato alla X_3^2 .

Matematica. — *Teoremi di esistenza e di unicità delle superficie di assegnato bordo verificanti un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine e applicazione al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica.* Nota di C. MIRANDA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

In un mio lavoro di prossima pubblicazione ho stabilito alcuni teoremi di esistenza e di unicità in piccolo per le superficie integrali, aventi un bordo assegnato, delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico in forma parametrica. In questa Nota, dopo aver richiamato brevemente i risultati da me ottenuti, faccio vedere come ci si possa valere di essi per dare una nuova forma alle condizioni sufficienti per il minimo forte degli integrali doppi in forma parametrica. Tra tali condizioni, nella forma loro data da Radon ⁽²⁾, figura quella che impone alla superficie estrema di essere immersa in un campo di estremali. Questa condizione può essere vantaggiosamente sostituita da un'altra, del tutto analoga a quella che di solito si impone nei problemi di calcolo delle variazioni ad una dimensione ed a quella che, per gli integrali doppi in forma ordinaria, è stata stabilita dal Lichtenstein ⁽³⁾ e da me recentemente ritrovata per altra via ⁽⁴⁾.

1. Comincerò con l'introdurre alcune notazioni. Sia l una curva chiusa analitica del piano uv e $l_1, l_2, \dots, l_n$ altre n curve chiuse analitiche

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) J. RADON, *Ueber einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale*. « Monatshefte für Mathematik und Physik », Bd. XXII, 1911, pp. 53-63.

(3) L. LICHTENSTEIN, *Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme*. « Mathematische Zeitschrift », Bd. 5, pp. 26-51.

(4) C. MIRANDA, *Condizioni sufficienti per il minimo degli integrali doppi*. « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. V, n. 3.

tutte interne ad l ed esterne fra di loro l'una all'altra. Diremo Γ il dominio del piano uv costituito dai punti non esterni ad l e non interni a $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Siano $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tre funzioni definite in Γ ivi dotate di derivate k -esime continue. Se la funzione

$$W = \left| \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial (u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial (u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial (u, v)} \right)^2 \right|$$

ha un estremo inferiore positivo in Γ , la superficie σ di equazioni parametriche

$$(I) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

sarà detta appartenere alla classe $C^{(k)}$.

I punti di σ corrispondenti ai punti di $l_1, l_2, \dots, l_n$ costituiscono $(n+1)$ curve chiuse $\gamma, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$, il cui complesso chiameremo bordo di σ . I punti di tali curve sono funzioni del loro arco dotate di derivate k -esime continue.

Indicheremo poi con X, Y, Z i coseni direttori della normale a σ e con D, D', D'' i coefficienti della seconda forma differenziale quadratica di σ

$$D = Xx_{uu} + Yy_{uu} + Zz_{uu}$$

$$D' = Xx_{uv} + Yy_{uv} + Zz_{uv}$$

$$D'' = Xx_{vv} + Yy_{vv} + Zz_{vv}.$$

Sia ora $T(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''')$ una funzione di dodici variabili definita per tutti i valori di esse per i quali non sia

$$(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = 0$$

e dotata di derivate continue di ordine $k-1$ ($k \geq 2$), tale che l'espressione

$$T(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, D, D', D'')$$

riesca un invariante per ogni superficie della classe $C^{(2)}$ rispetto ad un qualunque cambiamento dei parametri u e v .

Siano poi σ_0 una superficie avente per bordo $\gamma_0 + \gamma_0^{(1)} + \dots + \gamma_0^{(n)}$, di equazioni parametriche (I), per la quale sia $T(\sigma_0) = 0$, e $\gamma, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$, $(n+1)$ curve chiuse. Il problema che mi sono posto è quello di vedere se, supposta la $(n+1)$ -pla di curve $\gamma, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ in un certo senso abbastanza vicina al bordo di σ_0 , esistono superficie integrali σ dell'equazione $T(\sigma) = 0$, aventi per bordo $\gamma + \gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}$. Le equazioni $T(\sigma) = 0$ sono appunto quelle che io chiamo equazioni a derivate parziali del secondo ordine in forma parametrica.

Ci metteremo nell'ipotesi che σ_0 sia una superficie integrale di tipo ellittico, intendendo con questo che riesca soddisfatta la diseuguaglianza

$$4 T_D(\sigma_0) T_{D''}(\sigma_0) - T_{D'}^2(\sigma_0) > 0.$$

Si può far vedere che il verificarsi o meno di tale condizione è una circostanza indipendente dalla particolare rappresentazione parametrica scelta per σ_0 .

Prima di enunciare il teorema a cui sono pervenuto occorrerà ancora introdurre la nozione di intorno di ordine k di una curva chiusa o di una superficie, nonché quella di equazione alle variazioni della $T(\sigma_0) = 0$.

2. Siano γ_0 e γ due curve chiuse, che possano esser considerate bordi di superficie della classe $C^{(k)}$. Stabilita una corrispondenza biunivoca e bicontinua fra i punti delle due curve, diciamo P_0 e P'_0 due punti corrispondenti. Qualunque sia P_0 si può trovare un arco di γ_0 , contenente P_0 , suscettibile di una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi(\tau) \quad , \quad y = \psi(\tau) \quad , \quad z = \chi(\tau),$$

essendo τ la proiezione del segmento P_0P sull'asse tangente a σ_0 in P_0 . Analogamente si potrà trovare un arco di γ , contenente P'_0 suscettibile di una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi_1(\tau_1) \quad , \quad y = \psi_1(\tau_1) \quad , \quad z = \chi_1(\tau_1)$$

essendo τ_1 la proiezione di P'_0P' sull'asse tangente a γ in P'_0 , il quale formi con l'asse tangente a γ_0 in P_0 un angolo acuto. Come distanza di ordine k di γ_0 e γ potremo allora assumere l'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto dalla quantità

$$\begin{aligned} \max \overline{PP'} + \sum_{i=1}^k \left(\max \left| \frac{d^i \varphi(0)}{d\tau^i} - \frac{d^i \varphi_1(0)}{d\tau_1^i} \right| + \max \left| \frac{d^i \psi(0)}{d\tau^i} - \frac{d^i \psi_1(0)}{d\tau_1^i} \right| + \right. \\ \left. + \max \left| \frac{d^i \chi(0)}{d\tau^i} - \frac{d^i \chi_1(0)}{d\tau_1^i} \right| \right) \end{aligned}$$

al variare della corrispondenza stabilita fra le due curve.

Diremo poi che γ è contenuta nell'intorno di ordine k e ampiezza ρ di γ_0 : $I_0^{(k)}(\gamma_0)$, se la sua distanza da γ_0 è minore di ρ .

3. Siano ora σ_0 e σ due superficie della classe $C^{(k)}$. Stabilita una corrispondenza biunivoca e bicontinua fra i punti delle due superficie, diciamo p_0 e p'_0 due punti corrispondenti rispettivamente di σ_0 e σ . Qualunque sia

P_0 e comunque si scelga nel piano tangente a σ_0 in P_0 una coppia di assi ortogonali $\xi\eta$ uscenti da P_0 , si può trovare un intorno di P_0 su σ_0 , suscettibile di una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta), \quad z = \chi(\xi, \eta)$$

essendo ξ e η le proiezioni del segmento P_0P negli assi ξ e η . Analogamente si può trovare un intorno su σ_0 di P_0 suscettibile di una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi_1(\xi_1, \eta_1), \quad y = \psi_1(\xi_1, \eta_1), \quad z = \chi_1(\xi_1, \eta_1)$$

essendo ξ_1, η_1 la coppia di assi ortogonali del piano tangente a σ in P_0 , per la quale è minima la quantità $(\text{ang } \xi\xi_1)^2 + (\text{ang } \eta\eta_1)^2$.

Come distanza di ordine k di σ_0 e σ potremo allora assumere l'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto dalla quantità

$$\begin{aligned} & \max \overline{PP'} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^j \left[\max \left| \frac{\partial^j \varphi(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} - \frac{\partial^j \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} \right| + \right. \\ & \left. + \max \left| \frac{\partial^j \psi(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} - \frac{\partial^j \psi_1(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} \right| + \max \left| \frac{\partial^j \chi(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} - \frac{\partial^j \chi_1(0, 0)}{\partial \xi_1^i \partial \eta_1^{j-i}} \right| \right] \end{aligned}$$

al variare della corrispondenza stabilita fra le due superficie e della coppia di assi $\xi\eta$.

Diremo poi che σ è contenuta nell'intorno di ordine k e ampiezza ρ di σ_0 : $J_\rho^{(k)}(\sigma_0)$, se la sua distanza da σ_0 è minore di ρ .

4. Finalmente per ogni punto P di σ_0 conduciamo un asse n , formante con il piano tangente a σ_0 in P un angolo diverso da zero, i cui coseni direttori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ siano funzioni di (u, v) dotate di derivate parziali k -esime continue. Potremo supporre per esempio che sia

$$\alpha_0 X + \beta_0 Y + \gamma_0 Z > 0.$$

Se $\eta(u, v)$ è una funzione dotata di derivate parziali seconde continue, porremo

$$D(\eta) = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\sigma(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=0},$$

essendo $\sigma(\varepsilon)$ la superficie di equazioni parametriche

$$x = x(u, v) + \varepsilon \eta \alpha_0, \quad y = y(u, v) + \varepsilon \eta \beta_0, \quad z = z(u, v) + \varepsilon \eta \gamma_0.$$

Ebbene l'equazione alle derivate parziali, lineare, del secondo ordine

$$(2) \quad D(\eta) = f(u, v),$$

dove $f(u, v)$ è una qualunque funzione che sia almeno hölderiana in Γ , sarà detta l'equazione alle variazioni della $T(\sigma_0) = 0$ relativa alla direzione n . Si vede poi facilmente, esplicitando $D(\eta)$, che, se σ_0 è di tipo ellittico, la (4) è un'equazione di tipo ellittico.

Si vede anche che, supposta σ_0 di classe $C^{(3)}$, se la (2) ammette un integrale nullo su $l + l_1 + \dots + l_n$ qualunque sia $f(u, v)$, la stessa circostanza si presenta qualunque sia la direzione n prescelta, giacchè se η è un integrale della (2) relativa alla direzione n , la funzione

$$(3) \quad \eta' = \frac{\alpha_0 X + \beta_0 Y + \gamma_0 Z}{\alpha'_0 X + \beta'_0 Y + \gamma'_0 Z} \eta$$

è un integrale della (2) relativa alla direzione n' di coseni direttori $(\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0)$. Dalla (3) discende anche che, se per una certa direzione n esiste un integrale della equazione $D(\eta) = 0$ sempre positivo in Γ , lo stesso accadrà per ogni altra direzione n' .

È bene ricordare fin da ora che, in virtù di alcuni teoremi stabiliti da M. Picone ⁽¹⁾, l'esistenza di un tale integrale è condizione sufficiente affinché la (2) ammetta qualunque sia $f(u, v)$ un integrale nullo su $l + l_1 + \dots + l_n$.

5. Dopo ciò possiamo senz'altro enunciare il teorema a cui sono pervenuto:

Sia σ_0 una superficie integrale di tipo ellittico della equazione $T(\sigma) = 0$, appartenente alla classe $C^{(k)}$ ($k \geq 3$). Se l'equazione alle variazioni della $T(\sigma_0) = 0$ ammette, qualunque sia il termine noto, un integrale nullo su $l + l_1 + \dots + l_n$ si possono trovare gli intorni $I_{\sigma_1}^{(k)}(\gamma_0), I_{\sigma_{11}}^{(k)}(\gamma_0^{(1)}), \dots, I_{\sigma_{1n}}^{(k)}(\gamma_0^{(n)})$, tali che, comunque si prendano in essi rispettivamente le curve $\gamma, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$, esiste una superficie integrale dell'equazione $T(\sigma) = 0$, avente per bordo $\gamma + \gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}$ e appartenente alla classe $C^{(k-1)}$. Si può poi trovare un intorno $J_0^{(3)}(\sigma_0)$ tale che detta superficie è l'unica superficie integrale della equazione $T(\sigma) = 0$, avente per bordo $\gamma + \gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}$, la quale possa esser contenuta in $J_0^{(3)}(\sigma_0)$.

6. Sia ora $F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ una funzione continua con tutte le sue derivate parziali fino a quelle del quarto ordine, omogenea di grado uno nelle variabili p_i .

(1) M. PICONE, *Sopra alcuni problemi di analisi matematica posti dalla fisica*. «Esercitazioni matematiche del Circolo matematico di Catania», vol. II, fasc. 7-8.

Posto, per una qualunque superficie della classe $C^{(1)}$

$$\frac{\partial(y, \zeta)}{\partial(u, v)} = A, \quad \frac{\partial(\zeta, x)}{\partial(u, v)} = B, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = C,$$

il problema di calcolo delle variazioni che vogliamo considerare è quello della ricerca del minimo dell'integrale doppio in forma parametrica

$$(4) \quad \int_{\Gamma} F(x, y, \zeta, A, B, C) du dv,$$

nel campo delle superficie σ di classe $C^{(1)}$ aventi un bordo assegnato. È noto che, in virtù dell'ipotesi di omogeneità fatta sulla F , il valore di tale integrale non dipende dalla rappresentazione parametrica di σ ⁽¹⁾.

Dall'ipotesi di omogeneità discende anche l'esistenza di tre funzioni $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}$ delle variabili $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$, per le quali si ha

$$F_{p_i p} = \Phi_{11} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} + \Phi_{12} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} + \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) + \Phi_{22} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial v} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Introdotte tali funzioni, l'equazione delle estremali dell'integrale (4), che diremo equazione di Eulero-Kobb ⁽²⁾, si scrive

$$(5) \quad T(\sigma) = \Phi_{11} D + 2 \Phi_{12} D' + \Phi_{22} D'' - \sum_{i=1}^3 F_{x_i p_i}(x, y, \zeta, A, B, C) = 0$$

risultando $T(\sigma)$ un invariante per ogni superficie σ della classe $C^{(2)}$, rispetto ad un qualunque cambiamento dei parametri u e v . Ogni superficie integrale della (5) sarà detta una superficie estrema del integrale (4).

Consideriamo ora un sistema continuo di superficie estremali, dipendenti dal parametro ε , che può variare in un certo intervallo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ e diciamo σ_0 l'estrema corrispondente al valore $\varepsilon = 0$. Se esiste una regione dello spazio contenente σ_0 e tale che per ogni punto di essa passi una e una sola superficie estrema del sistema sopra considerato, diremo che tale sistema di estremali costituisce un *campo di estremali* e che σ_0 è *immersa in tale campo*.

Diremo infine che una superficie σ di classe $C^{(1)}$ fornisce per l'integrale (4) un minimo forte, se esiste una regione dello spazio, tale che, comunque si prenda in essa una superficie σ' avente lo stesso bordo di σ ,

(1) Per tutti i richiami della teoria degli integrali doppi in forma parametrica cfr. il già citato lavoro di RADON.

(2) Questa equazione è stata scritta per la prima volta nella forma (5) da Kobb nella Memoria: *Sur les maxima et les minima des integrales doubles*. « Acta Mathematica », Bd. 16-17.

questa fornisce per l'integrale (4) un valore non minore di quello fornito da σ . Nel già citato lavoro di Radon sono assegnate le condizioni sufficienti affinché una superficie estrema σ_0 fornisca un minimo forte per l'integrale (4). Prima di enunciare tale teorema dobbiamo però ancora definire la funzione di Weierstrass con la formula

$$E(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) = F(x_1, x_2, x_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) - \\ - \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i F_{p_i}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3).$$

Ciò posto il detto teorema di Radon si enuncia nel modo seguente:

Una superficie estrema σ_0 , di equazioni parametriche (1), della classe $C^{(2)}$, fornisce un minimo forte dell'integrale (4), purché siano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) *La forma quadratica $\Phi_{11}\lambda^2 + \Phi_{12}\lambda\mu + \Phi_{22}\mu^2$, calcolata su σ_0 , riesce definita positiva.*

b) *Si ha, qualunque siano $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, purché distinti rispettivamente da A, B, C*

$$E(x, y, z, A, B, C, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) > 0.$$

c) *La superficie estrema σ_0 è immersa in un campo di estremali.*

Osserviamo ora che, soddisfatta la a) σ_0 riesce una superficie integrale di tipo ellittico della (5) e che, pertanto, si può applicare alla (5) il teorema da me dimostrato. Vogliamò allora far vedere che:

Se σ_0 è di classe $C^{(3)}$ e se inoltre è tale che non può essere

$$[x(u, v) - x(u', v')]^2 + [y(u, v) - y(u', v')]^2 + [z(u, v) - z(u', v')]^2 = 0$$

se non quando è $u = u', v = v'$, alla condizione c) si può sostituire l'altra:

c') *Esiste un integrale ω , sempre positivo in Γ , dell'equazione alle variazioni della (5) per $\sigma = \sigma_0$ e $f(u, v) = 0$, relativa ad una certa direzione n .*

Ed invero la condizione c') assicura, secondo quanto abbiamo già osservato, che l'equazione alle variazioni della (5) per $\sigma = \sigma_0$ ammette, qualunque sia $f(u, v)$ un integrale nullo su $l + l_1 + \dots + l_n$. Pertanto si può certo trovare un ϵ_0 tale che, per $|\epsilon| < \epsilon_0$ esista una superficie estrema $\sigma(\epsilon)$ avente lo stesso bordo della superficie di equazioni parametriche

$$x = x(u, v) + \epsilon \omega \alpha_0, \quad y = y(u, v) + \epsilon \omega \beta_0, \quad z = z(u, v) + \epsilon \omega \gamma_0,$$

dove $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sono i coseni direttori di n .

Dal contesto della dimostrazione del mio teorema discende anche che le equazioni parametriche di $\sigma(\epsilon)$ sono del tipo

$$x = x(u, v) + \eta(u, v, \varepsilon) \alpha_0, \quad y = y(u, v) + \eta(u, v, \varepsilon) \beta_0,$$

$$\zeta = \zeta(u, v) + \eta(u, v, \varepsilon) \gamma_0,$$

onde si ha

$$(6) \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \omega > 0.$$

Facciamo ora vedere che si può trovare un $\varepsilon_1 (< \varepsilon_0)$ tale che il sistema delle superficie $\sigma(\varepsilon)$ costituisca per $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ un campo di estremali in cui è immersa σ_0 . Poichè $\sigma(0) \equiv \sigma_0$ basterà prendere ε_1 tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ sia

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} > 0,$$

ciò che può certo farsi in virtù della (6). È ovvio infatti che se Ω è un tal numero che per $|\lambda| < \Omega, |\lambda'| < \Omega$, non possa essere

$$\begin{aligned} & [x(u, v) + \lambda \alpha_0(u, v) - x(u', v') - \lambda' \alpha_0(u', v')]^2 + \\ & + [y(u, v) + \lambda \beta_0(u, v) - y(u', v') - \lambda' \beta_0(u', v')]^2 + \\ & + [\zeta(u, v) + \lambda \gamma_0(u, v) - \zeta(u', v') - \lambda' \gamma_0(u', v')]^2 = 0 \end{aligned}$$

se non quando è $u = u', v = v'$, detto λ_1 il più piccolo dei tre numeri $\Omega, \eta(u, v, \varepsilon_1), -\eta(u, v, -\varepsilon_1)$, la regione S dello spazio, costituita dai punti di coordinate

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) + \lambda \alpha_0(u, v), \quad y = y(u, v) + \lambda \beta_0(u, v), \\ \zeta &= \zeta(u, v) + \lambda \gamma_0(u, v), \quad |\lambda| \leq \lambda_1, \end{aligned}$$

è tale che per ogni punto di essa passa una e una sola superficie $\sigma(\varepsilon)$.

Resta con ciò dimostrato completamente il nostro asserto.

Termineremo osservando che la regione S dello spazio in cui σ_0 fornisce un minimo forte dell'integrale (4) può essere scelta in infiniti modi diversi, giacchè essa varia al variare di n .

Matematica. — *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.*
II. *Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.* Nota di F. TRICOMI,
presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Geometria). — *Sulle serie lineari semplicemente infinite con lo stesso gruppo jacobiano.* Nota di G. GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FANO.

1. Come ha osservato F. Severi ⁽²⁾, una funzione razionale del punto variabile sopra una curva algebrica irriducibile, di genere $p > 0$, è determinata, in generale, dal suo gruppo jacobiano, a meno di una sostituzione lineare a coefficienti costanti. Due funzioni razionali dello stesso ordine n con lo stesso gruppo jacobiano corrispondono solo eccezionalmente a due distinte g_n^1 ; le quali, certo prive di gruppo comune, possono, oppur no, appartenere ad una stessa g_n . Nel primo caso la g_n^3 congiungente le due g_n^1 ha per immagine proiettiva una curva sghemba di complesso lineare (semplice o multipla) sulla quale le due g_n^1 son segate dai fasci di piani aventi per sostegno due rette polari reciproche rispetto al complesso. Nel secondo caso le due g_n^1 hanno la medesima g_{2n} doppia (completa). Per due g_n^1 siffatte si ha $n \geq 4$ e se $n = 4$ deve essere $p = 1$. Infatti due g_2^1 con lo stesso jacobiano coincidono; due g_3^1 hanno $4 - p$ coppie comuni; se posseggono lo stesso jacobiano dovrà essere $p = 0$: le due g_3^1 si compongono di gruppi equivalenti. Due g_4^1 hanno $9 - p$ coppie comuni; se posseggono lo stesso jacobiano sarà $p = 1$; nè le due serie potranno appartenere ad una stessa g_4^1 , poichè non esiste una quartica sghemba ellittica di complesso lineare. Si è escluso che le due serie abbiano ∞ coppie comuni; ma è chiaro che due g_3^1 o due g_4^1 aventi ∞ coppie comuni e lo stesso jacobiano coincidono.

2. Passiamo alla effettiva costruzione di due g_4^1 con lo stesso jacobiano non appartenenti ad una stessa g_4 . Per limitarci ad un caso semplice, si considerino sulla C^3 piana armonica:

$$(1) \quad y^2 = 2x^3 + ix \quad (i^2 = -1)$$

la g_1^1, s , segata dalle coniche tangenti a C^3 nel flesso F all' ∞ e la g_1^1, σ , segata dalle coniche per F e per l'origine o delle coordinate che ha F come tangenziale. Le due g_1^1 hanno lo stesso doppio poichè $2F = 2O$.

I gruppi jacobiani delle g_1^1 di s appartengono ad una g_k^1 e formano entro questa una varietà quadratica irriducibile in corrispondenza birazionale senza

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) Nella Memoria: *La serie canonica* ecc. «Commentarii Mathematici Helvetici», vol. 4, 1932, p. 268.

eccezione con la totalità delle g_4^i di s . I gruppi della g_8^5 sono staccati su C^3 , fuori di F , dal sistema lineare ∞^5 di cubiche:

$$(2) \quad \Sigma a_i p_{ik} = 0$$

dove le p_{ik} sono proporzionali ai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 2x & dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

i differenziali essendo calcolati lungo C^3 . Si trova:

$$\begin{aligned} p_{12} &= 2x^2y & p_{13} &= 2ix^2 + xy^2 & p_{14} &= 4xy \\ p_{23} &= ix - 2x^3 & p_{24} &= 2y & p_{34} &= 6x^2 + i. \end{aligned}$$

Analogamente i gruppi jacobiani delle g_4^i di σ appartengono ad una g_8^5 segata su C^3 , fuori di F , dal sistema lineare di cubiche:

$$(3) \quad \Sigma \alpha_{ik} \pi_{ik} = 0$$

dove le π_{ik} sono proporzionali ai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & x & y \\ 2xdx & xdy + ydx & dx & dy \end{vmatrix}$$

liberati dal fattore comune x . Si trova:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= 2ix^2 - xy^2 & \pi_{13} &= 2xy & \pi_{14} &= 2x^3 + 3ix \\ \pi_{23} &= 6x^3 + ix & \pi_{24} &= 4x^2y + 2iy & \pi_{34} &= i - 2x^2. \end{aligned}$$

La g_8^3 comune alle due g_8^5 è staccata su C^3 dal sistema lineare Σ intersezione dei sistemi lineari (2) e (3); Σ è determinato dalle quattro cubiche linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} \alpha &= ip_{42} - 2p_{12} = \pi_{42} = 0 \\ \beta &= ip_{34} - 2p_{13} = i\pi_{34} + 2\pi_{12} = 0 \\ \gamma &= p_{14} = 2\pi_{13} = 0 \\ \delta &= 2p_{23} = \pi_{14} - \pi_{23} = 0. \end{aligned}$$

Le cubiche di Σ :

$$\lambda\alpha + \xi\beta + \eta\gamma + \delta = 0$$

si ottengono in corrispondenza ai valori:

$$\begin{aligned} a_{12} &= -2\lambda & a_{13} &= -2\xi & a_{14} &= \eta & \alpha_{12} &= 2\xi & \alpha_{13} &= 2\eta & \alpha_{14} &= 1 \\ a_{23} &= 2 & a_{42} &= i\lambda & a_{34} &= i\xi & \alpha_{23} &= -1 & \alpha_{42} &= \lambda & \alpha_{34} &= \xi \end{aligned}$$

dei parametri a_{ik}, α_{ik} . Affinchè una cubica di Σ stacchi su C^3 un gruppo jacobiano comune ad una g_4^1 di s e ad una g_4^1 di σ deve essere:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = \eta - 2i\lambda\xi = 0$$

$$\alpha_{12} \alpha_{34} + \alpha_{13} \alpha_{42} + \alpha_{14} \alpha_{23} = 2i\xi^2 + 2\eta\lambda - 1 = 0$$

cioè:

$$\lambda = \frac{\eta}{2\xi i} \quad ; \quad \eta^2 = 2\xi^2 + i\xi.$$

Un gruppo jacobiano comune a due g_4^1 , l'una di s l'altra di σ , corrisponde pertanto ai seguenti valori dei parametri a_{ik}, α_{ik} :

$$\begin{aligned} a_{12} = 2i\eta \quad a_{13} = -4\xi_2 \quad a_{14} = 2\xi\eta \quad ; \quad \alpha_{12} = 4\xi^2 \quad \alpha_{13} = 4\xi\eta \quad \alpha_{14} = 2\xi \\ a_{23} = 4\xi \quad a_{42} = \eta \quad a_{34} = 2i\xi^2 \quad ; \quad \alpha_{23} = -2\xi \quad \alpha_{42} = -i\eta \quad \alpha_{34} = 2i\xi^2 \end{aligned}$$

dove (ξ, η) è un punto variabile sulla data cubica. Le coppie di g_4^1 , l'una di s l'altra di σ , aventi un medesimo jacobiano costituiscono pertanto una totalità ellittica, birazionalmente identica alla data C^3 .

Per le due funzioni razionali φ, ψ del quart'ordine, corrispondenti alle due g_4^1 di una coppia si può scrivere:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{a_{21}x^2 + a_{23}y + a_{24}}{a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{34}} = \frac{2i\eta x^2 - 4\xi y + \eta}{2\xi x^2 - 2x + i\xi} \\ \psi(x, y) &= \frac{\alpha_{12}xy + \alpha_{13}x + \alpha_{14}y}{\alpha_{31}x^2 + \alpha_{32}xy + \alpha_{34}y} = \frac{2\xi xy + 2\eta x + y}{-2\eta x^2 + xy + i\xi y} \end{aligned} \right.$$

Le (4) rappresentano in coordinate φ, ψ una C^8 piana con due punti quadrupli e 8 cuspidi, trasformata birazionale della data C^3 ; su di essa le due g_4^1 son segate dai fasci di rette con i centri nei due punti quadrupli; le 8 cuspidi costituiscono il comune gruppo jacobiano.

Meccanica. — *Del significato meccanico della funzione di Airy*⁽¹⁾. Nota di L. SOBRERO, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — OGGETTO DELLA RICERCA. — La funzione di Airy costituisce, com'è ben noto⁽³⁾, un geniale artificio di calcolo il quale semplifica notevolmente la traduzione analitica dei problemi di elasticità piana. Ricordiamo come s'introduce questa funzione:

In un sistema elastico piano, su cui non agiscono forze di massa (superficiali), ma soltanto sforzi (lineari) applicati in punti del contorno geometrico, siano (colle solite notazioni)

... x ed y le coordinate di un punto generico,

... σ_x , σ_y e τ le componenti della sollecitazione elastica nel punto di coordinate x ed y . È noto che tali componenti di sollecitazione soddisfano alle equazioni differenziali

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

le quali, unitamente alle condizioni al contorno, sono generalmente sufficienti a tradurre in termini analitici il problema in esame⁽⁴⁾. Osservò l'Airy⁽⁵⁾

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(3) Cfr. A. und L. FÖPPL, *Drang und Zwang*. Oldenbourg, München und Berlin, 1924 («Zweite Aufl.»), Erster Band, p. 244 e segg.; LOVE-TIMPE, *Lehrbuch der Elastizität*, Teubner, Leipzig, 1907, p. 103.

(4) Diciamo «generalmente» perchè, di fatto, non è più così nei sistemi piani pluriconnessi: per lo studio dei quali bisogna aggiungere, alle equazioni differenziali (1) alcune convenienti condizioni integrali. Di tali condizioni discuteremo in una prossima Nota da pubblicarsi su questi «Rendiconti».

(5) Cfr. GEORGE BIDDELL AIRY, *On the Strains in the Interior of Beams*. (Report of the thirty-second meeting of the British Association for the advancement of science, held at Cambridge in October 1862), London, John Murray, pp. 82-86.

che le funzioni σ_x , σ_y e τ ottenute da una arbitraria funzione $F(x, y)$ mediante le posizioni

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

soddisfano sempre (e cioè qualunque sia $F(x, y)$) alle prime due equazioni del sistema (1); e soddisfano anche alla terza appena la funzione F , in luogo di essere del tutto arbitraria, soddisfa a sua volta all'equazione differenziale

$$(3) \quad \Delta \Delta F = 0 \quad (4).$$

L'osservazione semplifica il problema: sostituisce alla considerazione della terna di funzioni σ_x , σ_y e τ quella della sola funzione $F(x, y)$, ed alla considerazione del sistema di equazioni (1) quella dell'unica equazione differenziale (3). C'è di più: la funzione F relativa ad un determinato problema di elasticità rimane invariata se si cambia la posizione degli assi di riferimento (purchè si conservino l'ortogonalità e l'unità di lunghezza); mentre questa proprietà di invarianza non è più vera per le componenti σ_x , σ_y e τ , che si trasformano secondo legge più complicata. Avuto riguardo a questa proprietà invariantiva ⁽²⁾ la funzione F è atta, ancor meglio delle componenti σ_x , σ_y e τ a caratterizzare lo stato di sollecitazione elastica di un sistema piano, ed appare qualcosa di più che un semplice artificio di calcolo adatto all'integrazione del sistema (1).

Ci siamo chiesti: qual'è il significato fisico di questa funzione $F(x, y)$? E inoltre: supposte determinate, per un sistema piano soggetto a note forze esterne, le componenti σ_x , σ_y e τ della sollecitazione elastica di ogni punto, attraverso quale formula si risalirà dalle σ_x , σ_y e τ alla funzione $F(x, y)$? Cominciamo col rispondere a questo secondo quesito.

§ 2. — ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE DI AIRY MEDIANTE LE COMPONENTI DI SOLLECITAZIONE. — Osserviamo anzitutto che mediante quadrature si possono immediatamente ricavare le due derivate parziali del prim'ordine della funzione F . Indicate infatti queste derivate parziali con F_x ed F_y , si ha dalle (1):

$$(1) \quad \Delta \text{ indicando, come d'uso, l'operatore di Laplace } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(2) La cui dimostrazione seguirà del resto immediatamente dalle considerazioni svolte in questa Nota.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial x} = \sigma_y & \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\tau \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\tau & \frac{\partial F_y}{\partial y} = \sigma_x, \end{cases}$$

e di qui

$$(4) \quad \begin{cases} F_x(x_1, y_1) = F_x(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (\sigma_y dx - \tau dy) \\ F_y(x_1, y_1) = F_y(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (-\tau dx + \sigma_x dy), \end{cases}$$

nelle quali: x_0 ed y_0 designano le coordinate di un punto P_0 (da riguardarsi come fisso) del sistema elastico piano, x_1 ed y_1 designano le coordinate di un punto P_1 generico, e l'integrazione si intende eseguita lungo un arco di curva C , tracciato sul sistema piano ed avente i suoi estremi in P_0 e P_1 . Le (4) consentono di determinare le derivate prime della funzione F (in un punto generico P_1 del sistema piano) appena sian prestabiliti i valori che tali derivate devono assumere nel particolare punto x_0, y_0 . Val la pena di osservare che i differenziali comparenti a secondo membro delle (4), e cioè

$$\sigma_y dx - \tau dy \quad \text{e} \quad -\tau dx + \sigma_x dy$$

rappresentano (a meno del segno) le componenti dello sforzo che si trasmette attraverso il generico elemento (dx, dy) della linea d'integrazione C . Indicate, più di preciso, con dX e dY le componenti dello sforzo che si trasmette, attraverso l'elemento di linea, dalla parte di sistema alla destra sulla parte di sistema alla sinistra della linea C (parte destra e parte sinistra essendo quelle che tali appaiono ad un osservatore il quale percorra la linea nel verso assunto come positivo, e cioè da P_0 a P_1) si ha

$$(5) \quad \sigma_y dx - \tau dy = dY \quad \text{e} \quad -\tau dx + \sigma_x dy = dX$$

e le (4) possono quindi scriversi nella forma

$$(4') \quad \begin{cases} F_x(x_1, y_1) = F_x(x_0, y_0) + \int_C dY \\ F_y(x_1, y_1) = F_y(x_0, y_0) + \int_C dX. \end{cases}$$

Conoscendo, mediante le (4) o le equivalenti (4'), le derivate prime della funzione F potremmo risalire alla F medesima con una ulteriore qua-

dratura. Ma è comodo, per evitare nell'espressione di F un doppio segno d'integrale, ricorrere alla funzione ausiliaria

$$(6) \quad \Phi = F - xF_x - yF_y,$$

una volta determinata la quale potremo subito risalire all'espressione di F . Il vantaggio di considerare la Φ in luogo della F sta in ciò: che le derivate prime della Φ si esprimono mediante le derivate seconde della F , e cioè mediante grandezze note. Abbiamo difatti

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{cases}$$

e quindi per le (2)

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -x\sigma_y + y\tau \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x\tau - y\sigma_x, \end{cases}$$

da cui per quadratura

$$(7) \quad \Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} ([-x\sigma_y + y\tau] dx + [x\tau - y\sigma_x] dy).$$

Questa relazione ci consente di ricavare la Φ nel generico punto (x_1, y_1) del sistema piano appena sia prestabilito il valore che la Φ deve assumere nel punto particolare (x_0, y_0) . L'integrazione da (x_0, y_0) ad (x_1, y_1) s'intenderà estesa lungo il medesimo arco di curva C lungo il quale si son precedentemente calcolati gli integrali delle (4'). Si noti che il differenziale a secondo membro dell'equazione precedente si può anche scrivere

$$x(-\sigma_y dx + \tau dy) + y(\tau dx - \sigma_x dy),$$

ossia, tenendo conto delle (5),

$$xdY - ydX.$$

Con ciò la (7) diventa

$$\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (xdY - ydX).$$

Nota la funzione ausiliaria Φ , nonchè le derivate F_x ed F_y , in tutti i punti del sistema piano, potremo, dalla (6) ottenere il valore di $F(x_i, y_i)$. Si ha:

$$(8) \quad F(x_i, y_i) = F(x_0, y_0) + (x_i - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y_i - y_0)F_y(x_0, y_0) + \\ + \int_{x_0, y_0}^{x_i, y_i} (-[x_i - x] dY + [y_i - y] dX).$$

È questa la formula richiesta: essa determina la funzione F in un punto generico (x_i, y_i) del sistema piano, appena sian prestabiliti i valori che la funzione e le sue derivate prime devono assumere in un punto particolare.

§ 3. — INTERPRETAZIONE FISICA DELLA F . — Il differenziale

$$-(x_i - x) dY + (y_i - y) dX$$

comparante a secondo membro della (8) rappresenta il momento, preso rispetto al punto $P_i(x_i, y_i)$, dello sforzo (dX, dY) che si trasmette attraverso l'elemento (dx, dy) della linea d'integrazione. Concludiamo pertanto:

Il momento $M(x_i, y_i)$, preso rispetto al punto P_i , degli sforzi che si trasmettono attraverso un qualunque arco di curva tracciato sul sistema piano, con l'origine nel punto fisso P_0 e l'estremo in P_i , eguaglia la funzione F di Airy calcolata nel punto P_i , oppure ne differisce solo per un gruppo di termini lineari in x_i ed y_i . Interpretazione analoga potremo dare alle formule (4'):

Le componenti, secondo gli assi x ed y , della risultante degli sforzi che si trasmettono attraverso l'arco $P_0 P_i$ di curva, eguagliano (a meno di un segno) le derivate della F calcolate nel punto P_i ; oppure ne differiscono solo per addendi costanti.

§ 4. — DELLA POLIDROMIA DELLA FUNZIONE DI AIRY NEI CAMPI PLURICONNESSI. — Negli enunciati precedenti il valore della F e delle sue derivate prime nel punto generico $P_i(x_i, y_i)$ sembrano dipendere dall'arco di curva C tracciato sul sistema piano dal punto fisso P_0 al punto generico P_i . Chiediamo: Se pervenissimo da P_0 a P_i lungo un secondo arco di curva C' , differente da C , cambierebbero i valori di $F(x_i, y_i)$, $F_x(x_i, y_i)$ ed $F_y(x_i, y_i)$? Per giungere agli stessi valori di F e delle sue derivate è palesemente necessario che il sistema degli sforzi che si trasmettono attraverso la curva C , risulti equivalente al sistema degli sforzi che si trasmettono attraverso la curva C' ; o, se si vuole, che gli sforzi che si esercitano sulla regione compresa fra le curve C e C' dalla restante parte di sistema piano, si facciano equilibrio. Per il che sarà necessario: che nella regione compresa fra C e C'

non cadano punti d'applicazione di forze esterne, oppure che le forze esterne eventualmente applicate in quella regione si facciano mutuamente equilibrio. Queste condizioni sono sempre soddisfatte se il sistema piano, supposto sollecitato da forze esterne soltanto lungo il suo contorno geometrico, è semplicemente connesso; oppure quando, pur essendo il sistema pluriconnesso, i sistemi di forze applicate ai diversi contorni parziali di cui è costituito il contorno geometrico complessivo del sistema, si fanno SEPARATAMENTE equilibrio.

Si ha così un criterio semplice per giudicare della polidromia della funzione di Airy relativa ad un qualunque problema di elasticità piana⁽¹⁾.

Astronomia. — *Stime della grandezza visuale della « Nova Herculis 1934 »*⁽²⁾. Nota di M. G. FRACASTORO, presentata⁽³⁾ dal CORRISP. G. ABETTI.

La stella *Nova Herculis*, scoperta la mattina del 13 dicembre e visibile di prima sera e avanti l'alba, è stata osservata in Arcetri a partire dal 30 dicembre, prima non essendo possibili osservazioni per ragioni atmosferiche. In quel tempo essa aveva già toccato il suo massimo di luminosità ed appariva come una stella di 3^a grandezza di un lucido color verdastro.

Per le stime fotometriche si usarono le seguenti stelle di confronto⁽⁴⁾:

γ Dra	2 ^m .42	Spettro:	K 5
β Dra	2 .99	»	G 0
ι Her	3 .79	»	B 3
η Dra	2 .89	»	G 5
δ Cyg	2 .98	»	A 0
γ Aql	2 .80	»	K 2
α UMi	2 .12	»	F 8

di queste meglio si prestava la seconda per la vicinanza e per lo splendore molto simile, nonostante il colore differente, per cui l'assorbimento atmosferico aveva sulle due un effetto notevolmente diverso.

Ecco i valori ricavati dalle osservazioni, eseguite ad occhio nudo e coll'equatoriale della R. Marina:

(1) Per un risultato analogo (relativo alle funzioni armoniche in campi pluriconnessi) cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore* (in corso di stampa), Rondinella, Napoli.

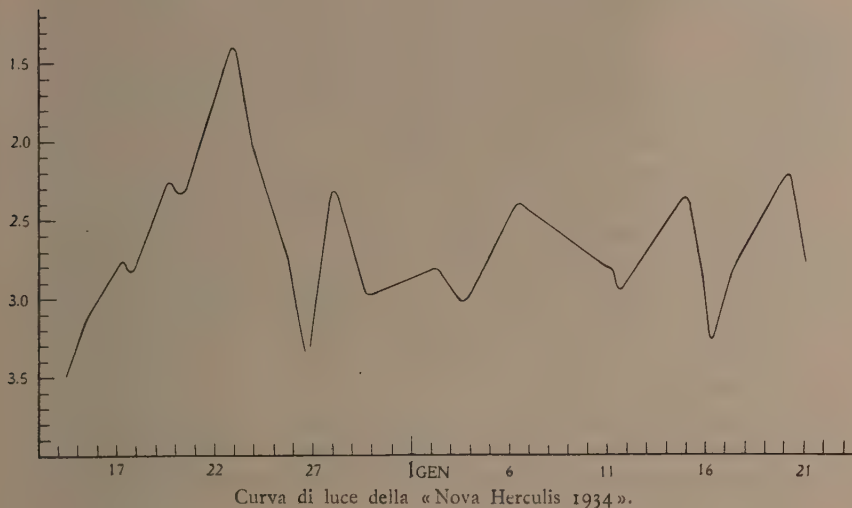
(2) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(3) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(4) I valori delle grandezze delle stelle di confronto sono ricavati dal « Berliner Astronomisches Jahrbuch », 1935.

Data	G. M. T.	Gr. visuale	Note
Dicembre 30	17 ^h 0 ^m	3 ^m .0	Colore verdastro.
» 31	»	2 .85	Colore verde-azzurro.
Gennaio 1	17 30	2 .85	Cielo poco favorevole.
» 2	»	2 .90	Colore verde-azzurro.
» 3	17 0	3 .05	Colore verde-giallo.
» 5	»	2 .85	Cielo poco favorevole.
» 6	17 45	3 .0	
» 8	17 0	2 .75	
» 9	»	2 .90	
» 13	»	2 .75	Alcune nebbie sparse.
» 14	3 0	2 .60	
» »	17 30	2 .45	Condizioni atmosferiche poco buone; chiarore di Luna.
» 15	5 0	2 .50	
» »	18 0	2 .90	Molto bassa sull'orizzonte.
» 16	5 30	2 .85	Il vento agitava le immagini.
» »	17 0	3 .3	
» 17	5 0	2 .90	
» »	17 0	2 .55	Condizioni atmosferiche mediocri; stime incerte.
» 18	4 45	2 .0	Condizioni atmosferiche mediocri; stime incerte di $\pm 0^m.1$.
» »	17 30	2 .2	Molto bassa sull'orizzonte.
» 19	4 45	2 .0	
» »	17 30	2 .4	Chiarore di Luna; cielo parzialmente coperto.
» 21	»	2 .2	Molto bassa sull'orizzonte.
» 22	4 30	2 .2	Chiarore di Luna.
» 23	17 15	3 .3	Molto bassa sull'orizzonte. Stime incerte di $\pm 0^m.2$.
» 24	3 30	3 .0	$\pm 0^m.1$. Chiarore di Luna.
» 31	5 45	3 .9	
Febbraio 1	5 30	3 .2	Cielo sereno, ma nebbioso.
» 2	5 45	3 .9	Cielo sereno, vario e nebbioso.
» 10	4 30	2 .9	
» 11	»	2 .9	
» 12	5 30	3 .3	Alba: incertezza di $\pm 0^m.1$.
» 14	4 0	2 .7	Un po' nebbioso.
» 19	»	3 .4	Chiarore di Luna e nebbia.

L'andamento della curva di luce, ricavata dalle medie di un gran numero di osservazioni, si è rivelato diverso dalle altre stelle nuove fin da principio per un troppo lento aumento di luminosità e doveva esserne differente anche nella fase decrescente: pare infatti dalle prime notizie apparse sui bollettini e sui notiziari astronomici⁽¹⁾, che si siano avuti altri massimi verso il 28 dicembre (2^m.3), l'Epifania (2^m.4) verso il 15 ed il 19 di gennaio (2^m.3 e 2^m.2). Pare che questa stella avesse carattere di variabilità anche prima dello scoppio, come comunicano alcuni osservatori, ma la cosa non è bene accertata data la poca luminosità della stella allora di circa 14^a grandezza.



Il diagramma, che si deve considerare come preliminare in attesa che vengano raccolte tutte le osservazioni, mostra dunque una salita più lenta, una discesa più rapida ed un seguito di massimi più pronunciati che in altre *Novae*. Infine una caratteristica di questa stella, fin da quando apparve, fu intuuta da Spencer Jones, il quale disse che la *Nova Herculis* si sarebbe veduta ad occhio nudo ancora per molte settimane.

In questi ultimi giorni la luminosità di questa stella è di nuovo diminuita: il 31 gennaio ne fu osservato il più basso valore (3^m.9), ma di nuovo il giorno seguente risaliva di ben 0.7 grandezze, ed in séguito fino a 2^m.7. È difficile quindi prevedere fin d'ora quale potrà essere l'andamento fotometrico di questa *Nova*, date le caratteristiche di ampia variabilità che sembra presentare.

(1) «Astronomische Nachrichten» e «Beilagen zu den Astr. Nachr.»; «Announcement Cards of the Harvard College Observatory»; Cartoline dell'«Astronomical Institute at Moscow» ed altri.

Astronomia (Astrofisica). — *Ricerche preliminari sullo spettro della « Nova Herculis »* ⁽¹⁾ Nota di G. RIGHINI presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. ABETTI.

La *Nova Herculis*, scoperta il 13 dicembre 1934 da un astrofilo inglese a Stowmarket quando era di terza grandezza circa, raggiunse il suo massimo splendore il 23 dicembre con la grandezza 1.3. Il giorno 4 gennaio si poté iniziare il lavoro spettroscopico in Arcetri con il riflettore prismatico (apertura cm. 30, distanza focale cm. 227) in unione a due prismi di 6°.1 e di 8°.0 di angolo rifrangente, così da avere una dispersione di 30 Å/mm circa a λ 4000.

Impiegando materiale pancromatico furono sufficienti pochi minuti di esposizione per avere spettri adatti per ricerche fotometriche; con lastre Agfa Superpan la regione rossa dello spettro risultava sovente sovraesposta mentre quella giallo verde troppo debole, le Cappelli pancromatiche diedero invece spettri migliori delle precedenti e benchè più lente furono preferite. In qualche caso si fece uso anche di lastre Cappelli blu notevolmente più sensibili nella regione violetta dello spettro.

Su ogni lastra furono presi un paio di spettri della *Nova*, e coi medesimi tempi di posa, degli spettri di confronto di una stella di tipo A0 e di grandezza prossima a quella di *Nova Herculis*.

Per la calibrazione fotometrica si sono fotografati sulla lastra gemella di quella impiegata per gli spettri stellari, sei spettri continui di intensità note, ottenuti proiettando sul piano focale del collimatore di uno spettroscopio l'immagine impiccolita di una fenditura a gradini (*raster*) uniformemente illuminata da una lampada ad incandescenza. Le due lastre furono poi sviluppate contemporaneamente, dopo un intervallo di tempo paragonabile con quello trascorso fra i corrispondenti istanti di esposizione, per evitare il fenomeno dell'immagine latente ⁽³⁾, fonte di notevoli errori.

Gli spettrogrammi ottenuti mostrano tutti righe di emissione notevolmente intense, in massima parte assai ben definite, e poche righe di assorbimento. Bene evidenti le righe dell'idrogeno in emissione da H_α a H_η e le H e K del calcio ionizzato con le relative righe di assorbimento spostate verso il violetto. Assai intense le righe metalliche dovute principalmente al Fe II, e al Ti II, poche e deboli invece le righe dovute all'He.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(3) « Ap. J. » 74, 105, 1931; « M. N. », 94, 101, 1933-34.

La figura 1 mostra il microfotogramma della lastra N. 10 ottenuta alla data 1935 Gen. 14,14 G. M. T.

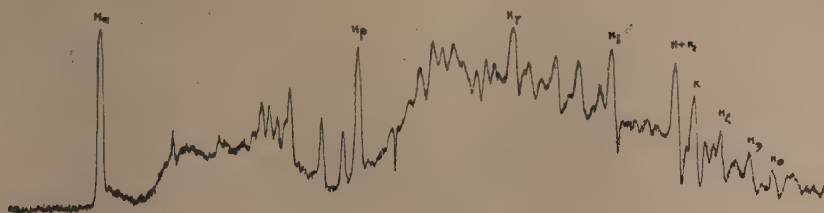


Fig. 1.

Le lunghezze d'onda sono state misurate su due lastre scelte fra le migliori e sui microfotogrammi da esse ottenute con un microfotometro di Moll. Le misure fatte su questi ultimi, benchè meno precise in confronto a quelle delle lastre, hanno il vantaggio della maggiore dispersione e di una più facile individuazione della riga. Le tabelle seguenti contengono i risultati; le λ sono le medie di tre determinazioni indipendenti eseguite una sulle lastre e due sui microfotogrammi. Quelle riportate nella tabella II sono ottenute indipendentemente dalle righe di emissione; la loro precisione è in generale minore delle precedenti.

Le intensità centrali delle righe, riferite a quella dello spettro continuo corrispondente, sono state determinate adottando un'unica curva di trasmissione per tutto lo spettro, poichè si è constatato essere l'inclinazione di questa indipendente da λ nei limiti degli errori sperimentali. Esse sono date nella colonna sesta delle due tabelle; nella colonna seguente sono date pure per confronto le intensità delle stesse righe nella cromosfera (*flash*) prese da Mitchell⁽¹⁾ per lo spettro di emissione, e nello strato invertente secondo le tavole di Rowland per quello di assorbimento.

Confrontando le intensità nei diversi punti dello spettro continuo della *Nova Herculis* con quelle corrispondenti di α Coronae, (spettro A0, gr. vis. 2.31) si è determinata la temperatura di colore della prima, seguendo il metodo adottato a Greenwich⁽²⁾.

I logaritmi dei rapporti di intensità fra punti corrispondenti nello spettro continuo delle due stelle, portati in ordinate contro $\frac{1}{\lambda}$ in ascisse, danno una distribuzione di punti, che si può rappresentare con una retta (vedi fig. 2) il cui coefficiente angolare determina il valore di $\Delta \Phi$ ⁽³⁾. Nel caso attuale si ottiene:

(1) « Ap. J. », 71, 1, 1930.

(2) *Greenwich Observations of Colour temperatures of stars*, 1926-32.

(3) *Id.*, p. 2.

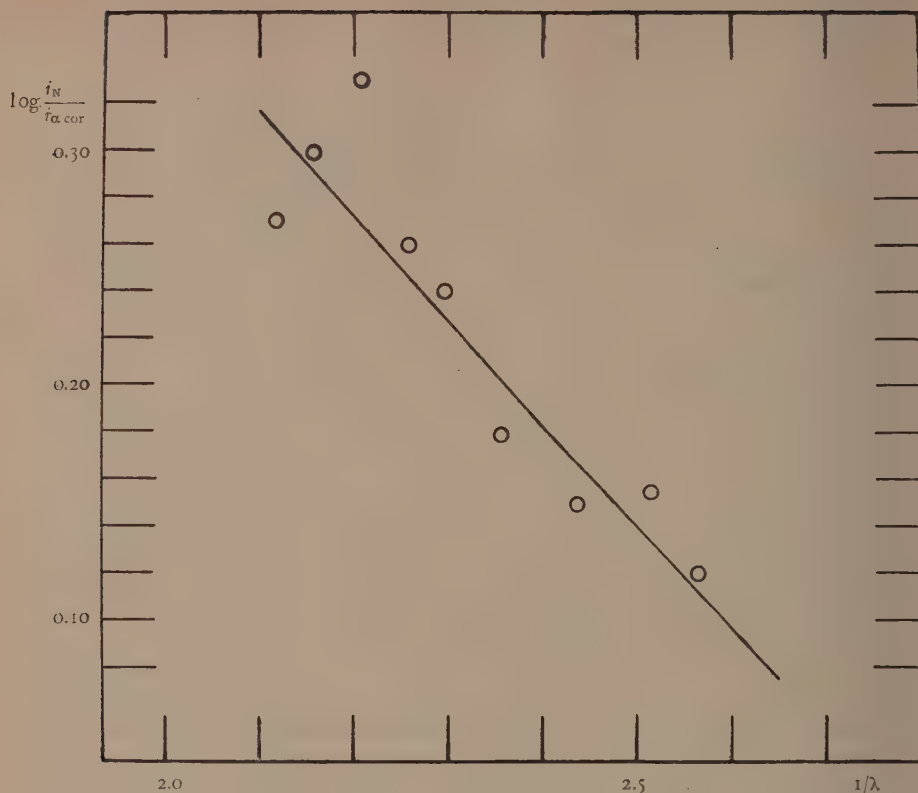


Fig. 2.

$$\Delta\Phi = \Phi_{\alpha \text{ Cor.}} - \Phi_{\text{Nova}} = -0.44$$

e poichè $\Phi_{\alpha \text{ Cor.}} = 1.01$ ⁽¹⁾, si ha anche:

$$\Phi_{\text{Nova}} = 1.45$$

dalla quale si deduce una temperatura di colore:

$$T_c = 10.500 \text{ K.}$$

Al momento dell'osservazione la *Nova* aveva una distanza zenitale maggiore di α Coronae, è poichè le intensità non sono state corrette per l'estinzione atmosferica, il valore determinato della temperatura è da ritenersi come un limite inferiore.

(1) Il valore corretto di Φ_0 per le stelle A0 è dato in «M. N.», 94, 488; 1934.

TABELLA I.

1935, Gennaio 14. — Spettro di emissione di « Nova Herculis ».

Numero	$\lambda_{oss.}$	El.	$\lambda_{tab.}$	$\Delta\lambda$	Intensità		Multipletto
					Nova	Flash	
1	6562.7	H α	6562.8	— 0.1	8.20	200	2 ² P ₀ — 3 ² D
2	6302.4	—	—	—	—	—	—
3	5903.6	Na	5890-96	+ 10	1.36	25 20	2S — 2P
4	5573.7	—	—	—	1.24	—	—
5	5422.5	Fe II	5425.3	— 2.8	1.09	8	4 ⁴ G _{4½} — 3 ⁴ F _{4½} ^o
6	5326.2	Fe I	5324.2	+ 2.0	1.53	7	3 ⁵ D ₄ ^o — 2 ⁵ D ₄
		Fe II	25.5	+ 0.7		6	4 ⁴ G _{3½} — 3 ⁴ F _{3½} ^o
7	5281.6	Fe II	5276.0	+ 5.6	1.51	20	4 ⁴ G _{4½} — 3 ⁴ F _{3½} ^o
8	5232.7	Fe II	5234.6	— 1.9	1.37	15	4 ⁴ G _{3½} — 3 ⁴ F _{2½} ^o
9	5173.9	Fe II	5169.0	+ 4.9	1.94	25	4 ⁶ S _{2½} — 3 ⁶ P _{3½} ^o
10	5016.1	Fe II	5018.4	— 2.3	2.08	25	4 ⁶ S _{2½} — 3 ⁶ P _{2½} ^o
11	4921.2	Fe II	4923.9	— 2.7	2.00	30	4 ⁶ S _{2½} — 3 ⁶ P _{1½} ^o
12	4861.5	H β	4861.3	+ 0.2	3.72	200	2 ² P ₀ — 4 ² D
13	4726.8	Fe II	4731.5	— 4.7	1.14	7	4 ⁶ S _{2½} — 3 ⁴ D _{3½} ^o
14	4662.6	Fe II	4666.8	— 4.2	1.13	8	4 ⁴ F _{3½} — 3 ⁴ F _{4½} ^o
15	4627.3	Fe II	4629.3	— 2.0	1.38	20	4 ⁴ F _{4½} — 3 ⁴ F _{4½} ^o
		Cr II	34.1	— 6.8		6	4 ⁴ F _{1½} — 3 ⁴ D _{4½} ^o
16	4587.5	Fe II	4583.8	+ 3.7	1.30	25	4 ⁴ F _{4½} — 3 ⁴ D _{3½} ^o
		Cr II	88.2	— 0.7		8	4 ⁴ F _{3½} — 3 ⁴ D _{2½} ^o
		Ti II	90.0	— 2.5		10	4 ² P _{1½} — 3 ² D _{1½} ^o
17	4551.4	Fe II	4549.5	+ 1.9	1.33	50	4 ⁴ F _{3½} — 3 ⁴ D _{2½} ^o
		Ti II	49.6	+ 1.8			4 ² H _{5½} — 3 ² G _{4½}
18	4516.6	Fe II	4515.3	+ 1.3	1.34	10	4 ⁴ F _{2½} — 3 ⁴ F _{2½} ^o
19	4417.6	Sc II	4415.4	+ 2.2	1.23	8	4 ³ F ₂ — 3 ³ F ₂ ^o
		Fe II	16.8	+ 0.8		6	4 ⁴ P _{1½} — 3 ⁴ L _{1½} ^o
		Ti II	17.7	— 0.1		12	4 ⁴ P _{1½} — 3 ² D _{2½} ^o
		Ti II	18.3	— 0.7		2	4 ² P _{1½} — 3 ⁴ D _{1½} ^o
20	4392.2	He	4387.9	+ 4.3	1.16	2	1 ¹ P ₀ — 4 ¹ D
		Ti II	94.0	— 2.2		6	4 ² P _½ — 3 ⁴ D _{1½} ^o
		Ti II	95.0	— 2.8		40	4 ² D _{2½} — 3 ² F _{3½} ^o
		Ti II	95.8	— 3.6		4	4 ⁴ P _{2½} — 3 ⁴ D _{3½} ^o
21	4342.1	H γ	4340.5	+ 1.6	2.00	160	2 ² P ₀ — 5 ² D

Segue TABELLA I.

Numero	λ_{oss}	El.	$\lambda_{tab.}$	$\Delta\lambda$	Intensità		Multipletto
					Nova	Flash	
22	4311.3	Ti II	4312.9	+ 1.6		12	$a^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{2\frac{1}{2}}^0$
		Sc II	14.1	+ 2.8	1.15	12	$a^3 F_4 - \gamma^3 D_3^0$
		Ti II	15.0	+ 3.7		15	$a^4 P_{\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{\frac{1}{2}}^0$
23	4300.5	Ti II	4300.1	+ 0.4		25	$a^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{3\frac{1}{2}}^0$
		Ti II	01.9	+ 1.4	1.33	8	$a^4 P_{\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{1\frac{1}{2}}^0$
		Fe II	03.2	+ 2.7		4	$b^4 P_{1\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{1\frac{1}{2}}^0$
24	4270.2	Fe I	4271.8	+ 1.6		15	$a^3 F_4 - \gamma^3 G_5^0$
		Fe II	73.3	+ 3.1	1.11	7	$b^4 P_{1\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{1\frac{1}{2}}^0$
		Fe II	4233.2	- 0.1	1.52	30	$b^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{3\frac{1}{2}}^0$
26	4177.5	Fe II	4178.9	- 1.4		15	$b^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 F_{3\frac{1}{2}}^0$
		Cr II	79.4	- 1.9	1.56	4	$a^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{3\frac{1}{2}}^0$
		Fe II	4128.7	0.0		1	$b^4 P_{2\frac{1}{2}} - \gamma^4 D_{2\frac{1}{2}}^0$
27	4128.7	Fe I	32.1	- 3.4	1.28	8	$a^3 F_2 - \gamma^3 F_3$
		H δ	4101.7	+ 2.6	1.89	140	$2^2 P^0 - 6^2 D$
29	4027.9	Ti II	4025.1	+ 2.8		10	$a^2 F_{3\frac{1}{2}} - \gamma^4 G_{3\frac{1}{2}}^0$
		He	26.2	+ 1.7	1.17	30	$1^3 P^0 - 4^3 D$
		He	4009.3	- 2.7	1.13	2	$2^1 P - 7^1 D$
31	3973.2	Ca II (H)	3968.5	+ 4.7		175	$1^2 S_{\frac{1}{2}} - 1^2 P_{\frac{1}{2}}^0$
		He	70.1	+ 3.1	2.16	120	$2^2 P^0 - 7^2 D$
		Ca II (K)	3933.7	+ 4.2	1.76	200	$1^2 S_{\frac{1}{2}} - 1^2 P_{1\frac{1}{2}}^0$
33	3917.1	Zr II	3915.9	+ 1.2		4	—
		V II	16.4	+ 0.7	1.29	3	$a^3 P_1 - \gamma^3 D_2$
		Fe I	3899.7	+ 2.0		10	$a^5 D_2 - \gamma^5 D_2^0$
34	3901.7	Ti II	3900.5	+ 1.2	1.26	40	$a^2 G_{4\frac{1}{2}} - \gamma^2 G_{4\frac{1}{2}}^0$
		H ζ	3889.0	+ 0.1	1.58	120	$2^2 P^0 - 8^2 D$
		Fe I	3859.9	+ 2.1	1.28	35	$a^5 D_4 - \gamma^5 D_4^0$
37	3838.9	H η	3835.4	+ 3.5		100	$2^2 P^0 - 9^2 D$
		Ti II	36.1	+ 2.8	1.46	2	$a^2 F_{3\frac{1}{2}} - \gamma^4 F_{2\frac{1}{2}}^0$
		He	3819.6	+ 2.0	1.09	10	$1^3 P^0 - 5^3 D$
39	3802.3	H θ	3797.9	+ 4.4	1.52	90	$2^2 P^0 - 10^2 D$
		H ι	3770.6	+ 5.0	1.50	80	$2^2 P^0 - 11^2 D$

Il n. 2: Osservata anche in *Nova Geminorum* 1912 e *Nova Ophiuchi* 1919. Coincide con la 6302 dell'aurora polare attribuita all'ossigeno neutro ($^1D_2 - ^3P_1$).

Il n. 3: Identificazione incerta.

Il n. 4: La lunghezza d'onda è poco differente da quella della riga verde dell'aurora polare λ 5577.6 attribuita all'ossigeno neutro ($^1S_0 - ^1D_2$).

TABELLA II.

1935, Gennaio 14. — Spettro di assorbimento di « Nova Herculis ».

Numero	$\lambda_{oss.}$	El.	$\lambda_{tab.}$	$\Delta\lambda$	Intensità		Multipletto
					Nova	☉	
1	4476.9	Mg II	4481.2	— 4.3	0.79	0	$3^2 D_{1\frac{1}{2}} - 4^2 F_{2\frac{1}{2}}^0$
2	4448.0	Ti II	4450.5	— 2.5	0.76	2	$a^2 D_{2\frac{1}{2}} - \chi^2 F_{2\frac{1}{2}}^0$
3	4340.0	H γ	4340.5	— 0.5	0.89	20	$2^2 P^0 - 5^2 D$
4	4296.1	Fe II	4296.6	— 0.5	0.88	3	$b^4 P_{1\frac{1}{2}} - \chi^4 F_{2\frac{1}{2}}^0$
5	4230.5	Fe II	4233.2	— 2.7	0.86	4	$b^4 P_{2\frac{1}{2}} - \chi^4 D_{3\frac{1}{2}}^0$
6	4168.9	Ti II	4171.9	— 3.0	0.92	2	$b^2 F_{2\frac{1}{2}} - \chi^2 D_{1\frac{1}{2}}^0$
7	4101.7	H δ	4101.7	0.0	0.72	40	$2^2 P^0 - 6^2 D$
8	3974.6	He	3970.0	+ 4.6	0.60	700	$2^2 P^0 - 7^2 D$
		Ca II (H)	68.5	+ 6.1			$4^2 S_{\frac{1}{2}} - 4^2 P_{\frac{1}{2}}^0$
9	3939.7	Ca II (K)	3933.7	+ 6.0	0.67	1000	$4^2 S_{\frac{1}{2}} - 4^2 P_{1\frac{1}{2}}^0$
10	3888.9	H ζ	3889.0	— 0.1	0.87	—	$2^2 P - 8^2 D$

Fisica (Fisica-Matematica). — *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario.* Nota II di M. MANARINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

3. Quanto dicemmo al n. 1 ⁽²⁾ permette di estendere (ed è questa una cosa importante) il concetto di divergenza di un bivettore con un criterio diverso da quello da me seguito in un altro lavoro ⁽³⁾ e mi pare in modo più utile per le applicazioni, come risulterà dal seguito.

Osserviamo che l'ordinaria divergenza di un vettore $u(P)$ è una particolare omografia (detta omotetia); se si pone

$$\operatorname{div} u = m,$$

le componenti dell'omotetia m si riducono a tre ed uguali in valore ad m .

Dato un bivettore qualunque a , funzione di P , ad esso corrisponde un'assiale α , pure funzione di P , avente le stesse componenti. Chiamo *divergenza del bivettore a* l'omografia del 2° ordine $\gamma(\alpha)$ costruita con la (3).

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1935.

(2) Vedi la Nota I in questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. XXI, fasc. 3, p. 173.

(3) Cfr. M. MANARINI, *Sulla divergenza dei plurivettori negli spazi S_n* , « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XVII, ser. 6^a, 1° sem. 1933, pp. 579-803.

Questa si potrebbe anche chiamare la *divergenza dell'assiale* α e si potrebbe estendere la definizione anche al caso di un'omografia qualunque. Ciò è in accordo con quanto si fa anche nel calcolo tensoriale.

In base alla definizione adottata ne consegue per le cose dette la relazione

$$(10) \quad \operatorname{div} \underset{2}{a} = 0 \quad \text{se} \quad \underset{2}{a} = \operatorname{rot} \underset{2}{u},$$

e quindi la validità in S_n della formula

$$(11) \quad \operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \underset{2}{u} = 0.$$

Perciò la condizione d'integrabilità dell'equazione $\operatorname{rot} \underset{2}{u} = \underset{2}{a}$, cioè la condizione perchè sia risolubile rispetto ad $\underset{2}{u}$, è che risulti $\operatorname{div} \underset{2}{a} = 0$, dove $\operatorname{div} \underset{2}{a}$ è definita vettorialmente nel modo detto mediante la (2). Otteniamo in tal modo una condizione analitica espressa in modo vettoriale (assoluto) che compendia un certo numero di relazioni stabilite col calcolo tensoriale e che è molto importante per le più semplici applicazioni vettoriali nei problemi analitici e meccanici a $n > 3$ variabili.

Debbo avvertire che il concetto di divergenza di un'omografia è stato introdotto anche dal Boggio ⁽¹⁾ con un criterio formale ugualmente logico ma che, almeno per ora, non sembra utile per certe applicazioni, giacchè per le assiali e quindi per i bivettori, detta divergenza del Boggio risulta sempre nulla.

Come ho già accennato, un altro criterio per stabilire un concetto di divergenza di plurivettore, e quindi, in particolare, di bivettore è stato da me seguito in altra Nota, ma non è quello che serve in queste ricerche. La definizione qui adottata trova la sua giustificazione logica nel fatto che qualora lo spazio si riduca alle tre dimensioni, in modo che il bivettore possa essere sostituito nei calcoli col vettore supplementare $\underset{2}{a}$, la sua divergenza, definita nel modo predetto, diviene una speciale omografia del 2° ordine, emisimmetrica, le cui componenti diverse dallo zero sono tutte uguali a $\operatorname{div} \underset{2}{a}$.

Invero nello spazio S_3 l'assiale α corrispondente al bivettore $\underset{2}{a}$ si può scrivere $\alpha \wedge$ ed essendo x, y, z , tre vettori arbitrari, si ha con facile calcolo

$$\gamma \underset{2}{x} y \times z = \operatorname{div} \underset{2}{a} \cdot x \wedge y \times z.$$

Data l'arbitrarietà di x, y, z , si deduce che $\gamma(\underset{2}{a} \wedge)$ è un'omografia emisimmetrica del 2° ordine che ha le sei componenti diverse dallo zero

uguali in valore assoluto a $\text{div } \mathbf{a}$. Dalla precedente si vede pure che qualunque sia $\mathbf{x}$ nello spazio S_3 si ha

$$\gamma_2(\mathbf{a} \wedge) \mathbf{x} = \text{div } \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \wedge,$$

e nel caso che in una questione si abbia $\gamma_2(\mathbf{a} \wedge) \mathbf{x} = 0$ qualunque sia $\mathbf{x}$ e quindi risulti

$$(12) \quad \gamma_2(\mathbf{a} \wedge) = 0,$$

questa condizione equivale all'altra

$$(13) \quad \text{div } \mathbf{a} = 0.$$

Nelle tre dimensioni una relazione del tipo (13), nel caso che $\mathbf{a}$ sia il supplementare di un bivettore $\mathbf{a}_2$, ossia che risulti da un prodotto vettoriale (bivettore semplice, trattandosi dello spazio a tre dimensioni), da un certo punto di vista conviene scriverla sotto la forma equivalente (12) con la qual cosa si viene ad annullare la divergenza del bivettore $\mathbf{a}_2$ cioè a sostituire la (13) con l'altra equivalente

$$(13') \quad \text{div } \mathbf{a}_2 = 0.$$

Si ottiene in tal modo una relazione che continua ad avere significato qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio. Ed è in base a questo criterio che si possono fare importanti applicazioni fisiche.

In questa Nota mi limiterò a dedurre in forma vettoriale assoluta, valevole qualunque siano le dimensioni dello spazio, le equazioni relative al campo elettromagnetico stazionario, cosa finora conseguita soltanto col metodo tensoriale. Analoghe considerazioni si possono estendere alla teoria generale elettromagnetica dei corpi in riposo od in movimento basandosi sulla trattazione vettoriale assoluta ordinaria (1).

4. Come è noto, le equazioni del campo elettrico $\mathbf{E}$ determinato da una distribuzione di carica con densità ρ sono

$$(14) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho.$$

Esse rappresentano leggi di azione per contatto, delle quali la legge di Coulomb, esprimente un'azione a distanza, ne è conseguenza matematica. Se $\mathbf{p}$ è la densità per unità di volume occupato dalle cariche della forza ponderomotrice si ha, come è noto,

$$(15) \quad \mathbf{p} = \rho \mathbf{E}.$$

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Applications à la mécanique et à la physique in Analyse vectorielle générale*, cap. VI, vol. II.

Orbene, se consideriamo la dilatazione

$$(16) \quad \beta = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - H(\mathbf{E}, \mathbf{E}),$$

ove H è il simbolo di diade, essendo ⁽¹⁾

$$\text{grad } \mathbf{E}^2 = 2K \frac{d\mathbf{E}}{dP} \mathbf{E}, \quad \text{grad } H(\mathbf{E}, \mathbf{E}) = (\text{div } \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{E}}{dP} \mathbf{E}$$

si ricava

$$\text{grad } \beta = \left(K \frac{d\mathbf{E}}{dP} - \frac{d\mathbf{E}}{dP} \right) - \rho \mathbf{E}$$

ove si è tenuto conto anche della 2^a delle (14); per essere $\frac{d\mathbf{E}}{dP}$ una dilatazione, essendo $\mathbf{E}$ un gradiente, risulta

$$K \frac{d\mathbf{E}}{dP} = \frac{d\mathbf{E}}{dP},$$

da cui per la (15) si ricava la relazione

$$(17) \quad \mathbf{p} = - \text{grad } \beta,$$

forma notevole perchè presenta perfetta analogia con quella che dà lo sforzo interno unitario di un solido elastico nello stato di equilibrio ⁽²⁾.

L'omografia β non dipende in ogni punto che dal campo elettrico $\mathbf{E}$ e, poichè determina lo stato fisico del punto ove viene calcolata, può essere considerata come un ente primitivo del quale le forze $\mathbf{p}$ rappresentano una conseguenza. La dilatazione β ci rappresenta pertanto in forma assoluta lo stato di « tensione » *sui generis* del campo elettrico determinato dalle cariche. Questa « tensione » corrisponde ad un tensore doppio simmetrico le cui componenti, sia pure in forma invariante, dipendono da un sistema di coordinate prefissato. Il grad β corrisponde alla divergenza del tensore doppio simmetrico definito dalla β .

Considerando un vettore $\mathbf{a}$ secondo le direzioni delle linee di forza del campo $\mathbf{E}$, si ha

$$\beta \mathbf{a} \times \mathbf{a} = - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2;$$

(1) Cfr. vol. I dell' *Analisi vettoriale generale*, loc. cit., p. 188 e 190.

(2) Cfr. P. BURGATTI, *Teoria matematica dell'elasticità*, vol. III dell' *Analisi vettoriale generale*, 1931, p. 118. In queste analogie così immediatamente visibili, sta uno dei pregi delle espressioni vettoriali.

prendendo una direzione perpendicolare $\mathbf{b}$ risulta

$$\beta \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2} E^2;$$

e ciò dimostra che le « tensioni » $\mathbf{p}$ in ogni punto, in questo stato elastico *sui generis* determinato da β consistono in una *trazione* d'intensità $\frac{1}{2} E^2$ diretta secondo le linee di forza e in una *pressione* dello stesso valore perpendicolare a quelle. Le (14), (17), (16), rappresentano quindi in *forma assoluta* le fondamentali leggi elettrostatiche.

5. Veniamo al campo magnetico prodotto da una distribuzione di corrente elettrica.

A maggior chiarimento per quello che seguirà mi pare utile premettere alcune considerazioni fondamentali.

Ordinariamente nello spazio S_3 il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ viene considerato come un vettore e ciò porta semplificazione nei calcoli, o per lo meno siamo ormai abituati a concepire il risultato in tal modo e, per quanto riguarda lo studio delle teorie che sono relative ad uno spazio a tre dimensioni, conviene che si seguiti secondo questo indirizzo. Però tal modo di procedere non è privo di inconvenienti. Anzitutto se la dimensione dello spazio è maggiore di 3 la interpretazione con un vettore del prodotto vettoriale non è più possibile.

In altro lavoro⁽¹⁾ ho esteso il significato dell'operazione $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ anche alle n dimensioni, mostrando che dà per risultato un $(n-2)$ -vettore che può essere determinato dal bivettore semplice supplementare individuato dai due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ ⁽²⁾.

La possibilità di considerare il risultato come bivettore permette di trattare certe questioni dello spazio S_3 in modo tale da valere anche qualunque siano le dimensioni dello spazio.

Da ciò l'importanza di seguire un tale criterio.

Così, lo stato cinetico di rotazione di un corpo con un punto fisso O nello spazio S_3 è rappresentato ordinariamente da un vettore-applicato (O, ω) ; nello spazio S_n come ho dimostrato nell'ultima mia Memoria citata, è rappresentato da un $(n-2)$ -vettore-applicato od anche da un bivettore-applicato (O, ω_2) . Sostituendo nello spazio S_3 al vettore ω il bivettore supplementare ω_2 , come è perfettamente logico, si viene a rappresentare lo stato cinetico di rotazione di un corpo con un punto fisso con un bivettore-

(1) Cfr. M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n ecc.*, loc. cit.

(2) Cfr. nota (2) al n. 1 del presente lavoro (Nota I).

applicato (O, ω_2) che ha significato indipendentemente dal numero delle dimensioni. Nello spazio ordinario ω_2 è un bivettore semplice, essendo, del resto, questa l'unica determinazione esistente; nello spazio S_n può essere invece un bivettore multiplo.

Il calcolo tensoriale ha pure superato felicemente questi ostacoli rappresentando il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ed i risultati che ad esso si collegano, come ad es. il vettore velocità angolare, mediante tensori lineari, in modo da ottenere pure espressioni valevoli qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio e con carattere invariantivo. Queste considerazioni sono applicabili a parecchie questioni meccaniche e geometriche. Qui fermeremo la nostra attenzione sulla discussione del campo elettromagnetico stazionario nel vuoto.

Il Weyl⁽¹⁾ ha rilevato l'errore che si commette interpretando il campo magnetico come vettore e, correggendo, lo intende matematicamente mediante un tensore lineare del 2° ordine. Col calcolo vettoriale assoluto detta interpretazione matematica, valevole qualunque siano le dimensioni dello spazio, è data da un campo bivettoriale $\mathbf{H}_2$, del quale l'ordinario campo vettoriale $\mathbf{H}$ ne viene ad essere il vettore supplementare.

La legge quantitativa di Biot e Savart per l'azione magnetica delle correnti scoperta da Oersted, viene espressa da due leggi di azione per contatto, analoghe a quelle del campo elettrico, che, essendo $\mathbf{H}$ l'assiale corrispondente al bivettore $\mathbf{H}_2$, e chiamando con $\mathbf{u}(P)$ il vettore densità di corrente, rientrano nello schema vettoriale:

$$(18) \quad -\text{grad } H = \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{H}_2 = 0.$$

A queste va aggiunta l'equazione

$$(19) \quad \mathbf{H}_2 = \text{rot } \mathbf{V},$$

essendo

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{u}}{r} dV$$

un potenziale vettore mediante il quale si ricava la soluzione delle equazioni (18):

$$\mathbf{H}(P) = \int \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}}{4\pi r^3} dV,$$

la quale esprime appunto la legge d'azione a distanza di Biot e Savart; in quest'ultima $\mathbf{r}$ è il vettore $P-M$ determinato dal punto P ove si vuole

(1) Cfr. H. WEYL, loc. cit., p. 38 e 63.

determinare il campo magnetico e dal punto M che descrive il volume V dove è distribuita la corrente elettrica.

La densità di forza ponderomotrice del campo magnetico è data dal prodotto vettoriale ⁽¹⁾

$$(20) \quad \mathbf{p} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_2.$$

Nello spazio S_3 il bivettore $\mathbf{H}_2$ può essere sostituito dal vettore supplementare $\mathbf{H}$; allora l'assiale $\mathbf{H}$ è data da

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \wedge$$

e perciò, avendosi ⁽²⁾

$$\text{grad}(\mathbf{H} \wedge) = -\text{rot} \mathbf{H},$$

la prima delle (18) si riduce a

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{u}.$$

La seconda delle (18) diviene

$$\text{div} \mathbf{H} = 0$$

e la (20) assume la forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{H}.$$

In tal modo otteniamo le ordinarie equazioni fondamentali in S_3 .

La nuova forma vettoriale qui adottata (18), (19), (20) presenta il vantaggio notevole di *valere indipendentemente dal numero di dimensioni dello spazio*. Sempre restando nell'ambito di una teoria fenomenologica, le leggi del campo elettromagnetico si modificano introducendo l'induzione magnetica che, per coerenza con le precedenti considerazioni, bisogna determinare matematicamente mediante un bivettore

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_2,$$

essendo μ la permeabilità magnetica. Si ottiene l'equazione $\text{div} \mathbf{B} = 0$ al posto dell'equazione $\text{div} \mathbf{B} = 0$ che ordinariamente si considera, nella quale il vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$ è il supplementare del bivettore $\mathbf{B}_2$.

Ci limiteremo per ora a queste considerazioni di carattere fondamentale per lo sviluppo di altre teorie.

(1) Cfr. M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale ecc.*, loc. cit., p. 90. Qui l'ho chiamato prodotto vettoriale *interno* col simbolo $\dot{\times}$; ma di questa distinzione se ne può fare a meno e si può adoperare il solito simbolo.

(2) Cfr. vol. I dell'*Analisi vettoriale generale*, loc. cit., p. 190.

Fisica. — *Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la « Nouvelle conception de la Lumière »* du prof. Louis de Broglie. Nota di RUY LUIS GOMES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Scisti di Dasso nel Baltistàn* ⁽¹⁾. Nota preventiva di P. COMUCCI presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. P. ALOISI.

È stata inviata, per lo studio, a questo Istituto una collezione di rocce raccolta dal prof. Ardito Desio, durante la spedizione Geografica Italiana nel Karakorum (1929) diretta da S. A. R. il duca di Spoleto. Il prof. Aloisi mi ha incaricato di illustrarla, e, mentre dò qui un breve cenno di alcuni risultati, colgo l'occasione per ringraziare ambedue di avermi permesso di continuare una ricerca petrografica, già da tempo iniziata in questo laboratorio con lo studio, ormai compiuto, delle rocce raccolte da S. E. Giotto Dainelli, in parte nelle medesime regioni, in parte in territori limitrofi ⁽³⁾.

Si tratta, nel mio caso, di oltre duecento campioni di rocce, raccolte lungo un itinerario che da Srinagar raggiunge la valle del Dras, e poi l'Indo baltì. Quindi, per la valle dello Shigar, la spedizione passò in quella del Braldo e poi sui ghiacciai situati a Nord (Baltoro, Panmah, Sarpo Lago ecc.). La via del ritorno ha costeggiato l'altipiano Deosei, raggiungendo di nuovo la valle del Dras.

Nella collezione sono rappresentati, come tipi intrusivi, graniti, dioriti di varia acidità ancor più numerose, e finalmente scarsi termini gabbriici: fra gli uni e le altre si collocano speciali rocce leucocrate acide. Oltre che lipariti, non numerose, le rocce effusive sono essenzialmente delle porfiriti, con qualche rappresentante basico. Mentre sono scarsi i campioni di roccia sedimentaria, esiste un nucleo numeroso di rocce metamorfiche, in parte gneis granitici e in maggior numero plagioclasici, con un gruppo notevole di scisti verdi, di cui alcuni sono da porre, come è facile prevedere, in relazione con le dioriti e le porfiriti. Micascisti e quarziti sono piuttosto scarsi.

La descrizione particolareggiata delle rocce sarà fatta in un lavoro di prossima pubblicazione. Per il momento mi limito a dare notizia di tre

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia di Firenze.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(3) PIERO ALOISI, *Spedizione italiana De Filippi: « Le rocce »*. Vol. VII; PROBO COMUCCI, *Spedizione italiana De Filippi: « Rocce del bacino del ghiacciaio Siâcen »*, vol. XI.

scisti granatiferi di Dasso, nella valle Braldo, i quali, per qualche carattere, si possono avvicinare alle kinzigiti.

Gneis kinzigitico.

Il campione n. 170 (28 aprile 1929) è uno scisto a grana media, ricchissimo di biotite; esso passa ad una estremità in una formazione quarzosa tormalinifera.

Struttura a mosaico con elementi piuttosto grandi.

Il feldispato è tanto potassico quanto calcico-sodico; quest'ultimo, forse più abbondante, contiene circa il 20 % di anortite, perchè una sezione normale a γ estingue a 7° rispetto alla sfaldatura e una, normale a $[100]$, e nel tempo stesso normale ad α , estingue a zero. La rifrazione, rispetto al quarzo in posizione incrociata, ha dato:

$$\omega \text{ quasi uguale a } \gamma'$$

$$\varepsilon > \alpha'$$

Geminazioni albitiche rare.

Il quarzo, abbondante, anche in lamine relativamente grandi, ha estinzione talvolta un po' ondulata. Le miche sono rappresentate da biotite e da muscovite. La seconda, molto più scarsa, si trova in lamine a contorno irregolare, anche concresciuta con la biotite; è presente pure pochissima muscovite secondaria. La biotite, in generale fresca, ma talvolta un poco cloritizzata, apparentemente uniassica, ha il pleocroismo vivace:

$$\alpha = \text{giallo-rosso}$$

$$\beta = \gamma = \text{rosso-bruno.}$$

Ciuffi ed aghetti di sillimanite sono molto frequenti, specialmente in relazione con la mica. Sono da ricordare granuli piuttosto abbondanti di zircone, anche inclusi nella biotite con aureola policroica; è presente pure il granato, in piccoli granuli piuttosto scarsi.

Ho isolato qualche frammento sporgente di cristallo di tormalina. Essa è di colore nero brillante, anche nell'interno del cristallo, e vi ho riscontrato le forme semplici $\{10\bar{1}1\}$ $\{11\bar{2}0\}$ $\{10\bar{1}0\}$.

Micascisti granatiferi.

La roccia n. 148 (28 aprile 1929) è friabile, a grana grossa; all'osservazione macroscopica si riconoscono facilmente grandi lamine biotitiche e individui di granato.

Piuttosto scarso il plagioclasio, che compare in cristalli alquanto sericitizzati, piuttosto grandi, irregolari. Esso è spesso geminato: nei geminati albitici ho avuto estinzioni simmetriche che arrivano a 23° ; presenta una zonatura irregolare, che arriva fino all'apparenza di un'estinzione ondulosa.

Contiene anche concrescimenti, di tipo pegmatitico, di granuli quarzosi a contorno irregolare, i quali estinguono contemporaneamente. Questo plagioclasio non si presta, anche per la parziale sericitizzazione, a determinazione esatta, ma dall'insieme dei caratteri non sembra lontano da un termine labradoritico. In qualche caso esso contiene accumulazioni di granuli epidotici.

La biotite è in larghe lamine, anche piegate, con forte pleocroismo:

α = giallo chiaro

$\beta = \gamma$ = rosso-bruno;

e al conoscopio vi si riconosce una croce quasi esattamente uniassica. Si nota anche della clorite verde alquanto pleocroica, in qualche caso con colori anomali: essa deriva in parte dalla biotite e in parte dal granato.

Il granato ha in sezione colore assai debole, giallo-roseo, talvolta quasi mancante; solo raramente, in qualche piccola area, mostra birifrazione anomala. Alcuni individui presentano un orlo che sembra talcoso.

L'orneblenda, abbastanza abbondante, ha un angolo $c:\gamma$ di circa 20° , e pleocroismo vivace:

α = giallo-verde

β = verde marcio

γ = verde.

All'apatite appartengono delle sezioni, talvolta assai grandi, rotondegianti. La ricerca chimica qualitativa conferma la presenza, piuttosto abbondante, del fosforo. Anche lo zircone compare accessoriamente, qualche volta incluso nella biotite. Poca magnetite.

Il campione n. 117 (28 aprile 1929), della stessa provenienza, è anche più evidentemente scistoso, e sempre costituito da elementi biotitici, però più minuti, e da grossi individui di granato rossastro.

Al microscopio risulta formato da biotite e granato assai abbondante. Questo ultimo fresco, in granuli assai grossi, ha in sezione colore roseo deciso. La biotite è in individui sottili, costipati ed anche incurvati, con pleocroismo:

α = giallo-bruno

$\beta = \gamma$ = bruno scuro;

in qualche caso il colore è verde. Essa si associa ad alquanto clorite, che però compare in venuzze anche nel granato. Non manca un poco di magnetite.

Queste tre rocce si possono, come ho fatto, avvicinare alle kinzigiti per il forte contenuto di mica, che è comune a tutte e tre, e per il granato

abbondante nei due ultimi campioni, un poco scarso nel primo, il quale però contiene anche sillimanite. A Dasso sembra comparire, come roccia eruttiva, oltre una pegmatite tormalinifera a grossissimi elementi, solamente un granito granatifero, a tessitura alquanto gneissica, con vario contenuto di biotite, però sempre forte. Si potrebbe essere tentati di vedere una relazione genetica fra gli scisti e il granito; peraltro, come è noto, vi è tendenza di considerare le kinzigiti piuttosto come parascisti, cosa che del resto, nel nostro caso, è in accordo con la composizione mineralogica. È bene notare, d'altra parte, che non sembra aversi qui la concomitanza con dioriti e calcari cristallini, come avviene nella penisola italiana ⁽¹⁾.

Fisiologia. — *Influenza della natura del materiale di cui son fatte le gabbie per gli animali, negli studi del ricambio.* ⁽²⁾ Nota di F. M. CHIANCONE, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto che da ricerche di S. Baglioni e della Sua Scuola fu messo in evidenza, nelle urine dei ratti albinì tenuti a dieta esclusivamente o prevalentemente proteica, la presenza di un pigmento verde caratteristico, che compare più intenso e dopo pochi giorni dall'inizio della dieta sperimentale somministrando fibrina piuttosto che altri proteidi: ovalbumina, caseina (Perrini).

Io intrapresi ricerche sulle urine dei ratti albinì alimentati a fibrina (e ne ho comunicato i risultati in altra sede) rivolte a studiarne i caratteri fisico-chimici. Nel corso dei miei studi, essendo i ratti tenuti in gabbie da ricambio modello Baglioni, gabbie di metallo aventi un doppio fondo di reti metalliche, una a maglie più fitte e l'altra a maglie più larghe, per la separazione delle urine dalle feci, notai che, quando qualcuna delle reti, ossidata e rotta, veniva sostituita con altra rete nuova, non ossidata, rimessi i ratti nelle stesse gabbie così rinnovate, le urine, che già avevano presentato un colore intensamente verde, non mostravano più una colorazione così intensa, anzi non presentavano alcuna traccia di color verde se si sostituivano con la rete nuova, non una sola, ma entrambe le reticelle costituenti il fondo delle gabbie.

Lo stesso accadeva quando veniva trascurata per qualche giorno la pulizia delle gabbie, che si praticava mediante raschiamento con spazzola dura e lavatura con acqua corrente; pulite le gabbie e rimessi i ratti, le cui urine avevano già colore intensamente verde, queste mostravano una minore intensità di detto colore e talvolta solo qualche riflesso verdastro.

(1) VITTORIO NOVARESE, *La formazione diorito-kinzigitica in Italia*. « Boll. R. Ufficio geol. d'Italia », vol. LVI, 1931.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Bari.

(3) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

Queste osservazioni accidentali, riscontrate per diverse volte sistematicamente e per lungo tempo, dopo la osservazione del Musajo sulla caratteristica colorazione verde delle urine dei ratti albinici a dieta iperproteica (fibrina) quando si aggiungeva solfato ferroso, e mentre erano già prossime alla conclusione le ricerche spettrofotometriche del Prof. Gallerani e mie, con cui si metteva in evidenza l'intimo rapporto del pigmento verde con la presenza delle urine di sali di ferro, fecero pensare che le urine comparissero verdi nel recipiente di raccolta, perchè tali diventassero a contatto con le reticelle metalliche di ferro costituenti il fondo delle gabbie, più o meno fortemente ossidate, nessun altro fattore intervenendo nei due casi.

Pensai allora di escludere la possibilità di questa causa usando una gabbia di vetro fornita, per fondo, di una rete anch'essa di vetro. Di vetro erano anche i recipienti in cui si somministrava il cibo e quelli che servivano per la raccolta delle urine. Come quelle di metallo, anche questa gabbia aveva per coperchio una reticella, onde era possibile la penetrazione dell'aria, della luce ecc.; il ratto viveva così sotto le necessarie e normali influenze dell'ambiente esterno, uguali a quelle degli altri ratti a fibrina e in gabbie di metallo, e dei ratti di controllo ad alimentazione mista.

In questa gabbia di vetro mettevo ad uno ad uno e successivamente tutti i ratti alimentati a fibrina, che da diversi mesi erano sottoposti a questa alimentazione e che nello stesso tempo presentavano, stando nelle gabbie di metallo, urina fortemente pigmentata in verde. Ogni ratto fu lasciato in questa gabbia per diversi giorni (in media 15) e si continuò a somministrare la stessa razione alimentare, che esso aveva prima, fatta in prevalenza di fibrina.

Dal primo giorno in cui ciascun ratto fu messo nella gabbia di vetro, e così per tutti i giorni per i quali vi rimase e per tutti i ratti, l'urina non si presentò più colorata in verde. Quando ciascun ratto veniva tolto dalla gabbia di vetro e rimesso in quella di metallo, ferme restando le condizioni di ambiente e di alimentazione, le urine ricomparivano pigmentate in verde.

Che si trattasse di una modificazione delle urine stesse subita nel passaggio attraverso le reticelle metalliche del fondo delle gabbie è così dimostrato, come lo dimostrano le ricerche spettrofotometriche eseguite dal prof. Gallerani e da me.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 marzo 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. O. M. CORBINO.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle estremaloidi del Calcolo delle Variazioni.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

In talune applicazioni del metodo diretto da me sviluppato nel Calcolo delle Variazioni, si presenta la seguente questione: « È data una curva C_0 :

$$(1) \quad y = y_0(x) \quad , \quad a \leq x \leq b,$$

assolutamente continua (cioè tale che la $y_0(x)$ sia, in tutto (a, b) , una funzione assolutamente continua) e si sa che ogni suo arco *interno* (vale a dire, corrispondente ad un intervallo (a', b') con $a < a' < b' < b$) è una *estremaloide* relativa ad una data funzione $f(x, y, y')$. Si ha bisogno di poterne dedurre che tutta la C_0 è una *estremaloide* relativa alla $f(x, y, y')$ ».

Rammento che la curva C_0 si dice *estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$* se le funzioni $f_y(x, y_0(x), y'_0(x))$ e $f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$ risultano integrabili (nel senso del Lebesgue) su tutto l'intervallo (a, b) e se, di più, è sempre, su tale intervallo,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_a^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = \text{cost.}$$

Il fatto che tutta la curva C_0 sia un'estremaloide non è una conseguenza pura e semplice dell'altro che sia un'estremaloide ogni suo arco interno; e per poterlo affermare occorre aggiungere qualche condizione supplementare. Condizioni sufficienti allo scopo furono già date nei miei *Fon-*

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1935.

damenti di *Calcolo delle variazioni*⁽¹⁾ e nella mia Memoria *Sulle proprietà delle estremanti*⁽²⁾. Qui pervengo ad una proposizione di forma diversa, la quale ha un carattere di grande generalità che la rende molto utile nelle applicazioni.

Una proposizione analoga vale poi per le *pseudoestremaloidi*.

1. Supponiamo che, per ogni punto (x, y) di un campo A e per ogni y' finito, la $f(x, y, y')$ sia una funzione definita e continua insieme con le sue derivate parziali $f_y(x, y, y')$ e $f_{y'}(x, y, y')$, e dimostriamo che:

Se C_0 è una curva assolutamente continua, appartenente al campo A e definita dalle (1);

se ogni arco interno della C_0 è un'estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$; se, in tutto un intorno della C_0 e per ogni y' , è

$$(\alpha) \quad |f_y(x, y, y')| \leq K_1 \{ |y'| + N_1(x) \} |f_{y'}(x, y, y')| + K_2 |y'| + N_2(x),$$

dove K_1 e K_2 sono due costanti non negative e $N_1(x)$ e $N_2(x)$ sono due funzioni non negative, integrabili (nel senso del Lebesgue) in (a, b) ;

allora tutta la C_0 è un'estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$ ⁽³⁾.

Scegliamo un $\bar{x}$ tale che: 1°) sia $a < \bar{x} < b$; 2°) esista finita la derivata $y'_0(\bar{x})$; 3°) $f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$ sia, in $\bar{x}$, la derivata del suo integrale indefinito; 4°) risulti

$$(2) \quad \int_a^b \{ |y'_0(x)| + N_1(x) \} dx < \frac{1}{2K_1}, \quad \int_a^b \{ K_2 |y'_0(x)| + N_2(x) \} dx < 1.$$

Per tutti gli x soddisfacenti alle disuguaglianze $\bar{x} < x < b$, è, in virtù delle ipotesi fatte,

$$\frac{d}{dx} \int_{\bar{x}}^x f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_{\bar{x}}^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = \text{cost.},$$

e quindi, per la scelta fatta di $\bar{x}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\bar{x}}^x f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_{\bar{x}}^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = \\ = f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})); \end{aligned}$$

(1) Bologna, Zanichelli, 1922 e 1924.

(2) « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. III, 1934, pp. 213-237.

(3) La (α) risulta, per esempio, soddisfatta se è

$f \equiv e(1+y^2)y'^2$ oppure $f \equiv e(1+x^2+y^2)y'^2$ oppure $f \equiv e(1+y^2)y'^4$ ecc.

perciò, per quasi tutti gli x indicati, è

$$(3) \quad f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) = f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})) + \\ + \int_{\bar{x}}^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx.$$

Per ogni x' tale che $\bar{x} < x' < b$, indichiamo con $M(x')$ il massimo modulo del secondo membro dell'uguaglianza ora scritta, in tutto l'intervallo $(\bar{x}, x')$. Allora risulta, per quasi tutti gli x di $(\bar{x}, x')$,

$$(4) \quad |f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))| \leq M(x'),$$

e, in virtù della (α), si ottiene, per tutti gli x di $(\bar{x}, x')$,

$$\left| f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})) + \int_{\bar{x}}^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx \right| \leq \\ \leq |f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}))| + K_1 M(x') \int_{\bar{x}}^{x'} \{ |y'_0(x)| + N_1(x) \} dx + \\ + \int_{\bar{x}}^{x'} \{ K_2 |y'_0(x)| + N_2(x) \} dx,$$

e perciò

$$M(x') \leq |f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}))| + \\ + K_1 M(x') \int_{\bar{x}}^{x'} \{ |y'_0(x)| + N_1(x) \} dx + \int_{\bar{x}}^{x'} \{ K_2 |y'_0(x)| + N_2(x) \} dx,$$

donde segue, tenendo presenti le (2),

$$M(x') < 2 \{ 1 + |f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}))| \}.$$

Siccome il secondo membro di questa disuguaglianza non dipende da x' , di qui e dalla (4) segue che, quasi dappertutto in $(\bar{x}, b)$, è

$$|f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))| < 2 \{ 1 + |f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}))| \};$$

e per la (α) si ha pure, quasi dappertutto in $(\bar{x}, b)$,

$$|f_y(x, y_0(x), y'_0(x))| \leq \\ \leq 2K_1 \{ |y'_0(x)| + N_1(x) \} \{ 1 + |f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}))| \} + \\ + K_2 |y'_0(x)| + N_2(x).$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza è integrabile in $(\bar{x}, b)$, e perciò risulta integrabile anche $f_y(x, y_0(x), y'_0(x))$.

Dalla (3) segue allora che è integrabile, su $(\bar{x}, b)$, anche

$$f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)),$$

e che si ha, per tutti gli x di $(\bar{x}, b)$,

$$\int_x^x f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = (x - \bar{x}) f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})) + \\ + \int_x^x dx \int_x^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx,$$

ed infine

$$\frac{d}{dx} \int_x^x f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_x^x f_y(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = \text{cost.},$$

il che prova che tutto l'arco della C_0 corrispondente all'intervallo $(\bar{x}, b)$ è un'estremaloide.

In modo analogo si prova che è pure un'estremaloide l'arco della C_0 corrispondente all'intervallo (a, x_0) , per x_0 convenientemente scelto; e se ne conclude finalmente che tutta la C_0 è un'estremaloide.

2. Con lo stesso ragionamento usato nel numero precedente si prova anche la proposizione che segue:

Se C_0 è una curva assolutamente continua appartenente al campo A , definita dalle (1) e tale che la $f(x, y_0(x), y'_0(x))$ risulti integrabile in tutto (a, b) ;

se ogni arco interno della C_0 è un'estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$;
se, in tutto un intorno della C_0 e per ogni y' , è

$$(\beta) \quad |f_y(x, y, y')| \leq K_1 \{ |y'| + |f(x, y, y')| + N_1(x) \} |f_{y'}(x, y, y')| + \\ + K_2 |f(x, y, y')| + K_3 |y'| + N_2(x),$$

dove K_1, K_2, K_3 sono delle costanti non negative e $N_1(x), N_2(x)$ sono delle funzioni non negative, integrabili (nel senso del Lebesgue) in (a, b) ;

allora tutta la C_0 è un'estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$.

3. I teoremi dei nn. 1 e 2 sussistono anche se, invece di supporre verificate le (α) e (β) in tutto un intorno della curva C_0 e per tutti gli y' , si ammette che tali disuguaglianze valgano soltanto sulla curva C_0 ed anche soltanto quasi dappertutto sulla C_0 , e precisamente che si abbia solamente, quasi dappertutto su (a, b) , la

$$(\alpha') \quad |f_y(x, y_0(x), y'_0(x))| \leq K_1 \{ |y'_0(x)| + N_1(x) \} |f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))| + \\ + K_2 |y'_0(x)| + N_2(x),$$

in luogo della (α) e la

$$\begin{aligned}
 (\beta') \quad & |f_y(x, y_0(x), y'_0(x))| \leq \\
 & \leq K_1 \{ |y'_0(x)| + |f(x, y_0(x), y'_0(x))| + N_1(x) \} |f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))| + \\
 & + K_2 |f(x, y_0(x), y'_0(x))| + N_2(x)
 \end{aligned}$$

in luogo della (β) .

4. Se, in più delle condizioni ammesse nella proposizione del n. 1 o in quella del n. 2, si suppone che $|f_{y'}(x, y, y')|$ tenda uniformemente a ∞ per $|y'| \rightarrow \infty$, la curva C_0 , considerata negli enunciati rammentati, risulta *lipschitziana* (vale a dire, la $y_0(x)$ risulta a rapporto incrementale limitato); e se si aggiunge anche l'ipotesi che la $f_{y'}(x, y, y')$ sia funzione sempre crescente della y' , la C_0 risulta un'estremale relativa alla $f(x, y, y')$. Tutto ciò segue immediatamente da quanto è stabilito nel n. 7 della mia Memoria *Sulle proprietà delle estremanti*, già citata, e conduce ad una condizione sufficiente per la non esistenza dell'insieme Ω considerato nella proposizione del n. 17 della stessa Memoria.

5. Valgono, per le *pseudo estremaloidi*, proposizioni in tutto analoghe a quelle dei nn. 1 e 2. Esse si ottengono da quelle dei numeri citati sostituendovi al termine estremaloide quello pseudoestremaloide, la derivata parziale f_y con la f_x , e la $f_{y'}$ con l'espressione $f - y' f_{y'}$.

Meccanica. — *Sulle grandezze meccaniche fondamentali.* Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1934 ed andamento del ciclo solare.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Arcetri con l'equatoriale di Amici durante il 1934, in 114 giorni, per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga H_{α} invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono raccolti nella seguente tabella. Nel 1934 sono state eseguite analoghe osservazioni anche dalla Sezione della Società Astronomica Ceca, all'osservatorio Štefánik di Praga con l'equatoriale König, dell'apertura di 18 cm. e 344 cm. di distanza focale. Con uno spettroscopio a visione diretta di Zeiss è stata osservata l'altezza della cromosfera da B. Libedinský, e in sua assenza da B. Nováková, in 23 giorni. I risultati di queste osservazioni che si trovano pure nella seguente tabella sono stati gentilmente comunicati da B. Nováková.

Altezza media della cromosfera nel 1934.

+ 90° N	+ 60° E	+ 30° E	0° E	— 30° E	— 60° E	— 90° S	— 60° W	— 30° W	0° W	+ 30° W	+ 60° W	Media
Arcetri												
11''.34	10''.77	10''.42	10''.16	10''.34	10''.55	10''.95	10''.46	9''.99	9''.81	9''.97	10''.50	10''.44
Praga												
9 .3	9 .1	8 .7	8 .1	8 .6	9 .0	9 .8	9 .2	9 .0	8 .5	8 .6	8 .5	8 .87

Per le osservazioni di Praga si può osservare che, come quelle di Catania fatte con uno strumento della stessa potenza, l'altezza media risulta notevolmente più bassa di quella misurata in Arcetri, ma l'andamento generale alle varie latitudini, come si vede nella fig. 1, è concorde nelle due stazioni. L'altezza misurata ad Arcetri si può confrontare con quella ottenuta nel precedente anno trovandosi una lieve diminuzione generale nell'altezza media:

$$1934 - 1933 = - 0''.24.$$

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1935.

Quindi si può concludere che, fino alla fine dell'anno scorso (1934), la cromosfera si mantiene piuttosto alta con un massimo ai poli ed è rimasta quasi costante nell'ultimo triennio.

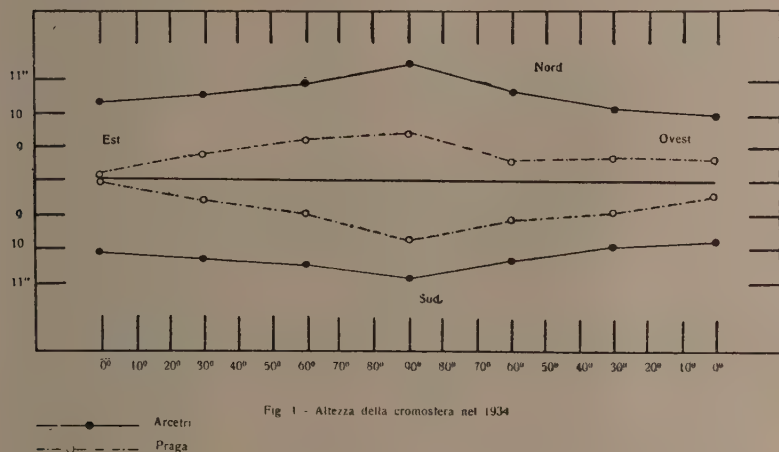


Fig. 1.

A Catania dalla fine dell'anno scorso osservazioni analoghe sono state continuate da S. Taffara con un dispositivo allo spettroscopio che permette misure più precise. Di più simili osservazioni sono state iniziate in via di esperimento, e continueranno regolarmente, anche negli Osservatori russi di Kasan⁽¹⁾ e Tashkent⁽²⁾. L'area totale delle protuberanze, dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Zurigo nel 1934, risulta di 124 unità di protuberanza maggiore di quella del 1933, quindi si ha un deciso aumento di attività del nuovo ciclo ora in corso.

Dopo la comparsa del primo gruppo di macchie del nuovo ciclo, che avvenne il 10 ottobre 1933 ad alta latitudine, con polarità invertita rispetto al precedente ciclo, parecchi gruppi sono comparsi appartenenti al nuovo ed il trascorso minimo di attività si può all'incirca fissare verso la fine del 1933, ciò che porta ad una durata del ciclo passato di 10.3, invece di 11.1 anni, che rappresenta, come è noto, la durata media del ciclo undecennale.

I massimi delle aree delle protuberanze sono ancora soltanto due e si sono presentati a 45° di latitudine, tanto nell'emisfero boreale, che in quello australe. Poichè nel 1933 detti massimi caddero rispettivamente a 40° e a 37°, si è avuto dal 1933 al 1934, un deciso spostamento verso i poli delle protuberanze ad alta latitudine.

(1) ENGELHARDT, « Observatory Bulletin », 3, Kasan, 1934.

(2) « Bulletin of the Tashkent Astron. Observatory », 3, Tashkent, 1934.

Dagli spettroeliogrammi in luce monocromatica di calcio e di idrogeno, presi durante il 1934 alla torre solare, si rileva che l'attività dei flocculi chiari ed oscuri è stata molto moderata, circa 0.5 nella scala dei numeri caratteristici dell'attività solare (0 = attività nulla; 5 = massima attività)⁽¹⁾ in relazione alla scarsa presenza di macchie, in prevalenza appartenenti al nuovo ciclo.

Per i dettagli di queste osservazioni si confronti il fascicolo 53 delle « Pubblicazioni del R. Osservatorio di Arcetri ».

Chimica-fisica. — *Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice idrata.* Nota⁽²⁾ del Socio G. A. BLANC.

In una precedente mia Nota⁽³⁾ ho comunicato i primi risultati di una serie di esperienze da me intraprese allo scopo di chiarire il meccanismo di alcuni fenomeni di adsorbimento presentati dai granuli spugnosi o scheletri di silice idrata, che si ottengono come residui dell'attacco, con acidi, di cristalli o di frammenti di cristalli di leucite non ridotti in polvere.

La interpretazione che mi parve di poter dare dei fenomeni da me osservati mi induceva, come ho già accennato nella predetta Nota, a tentare delle esperienze per accertare se, come appariva presumibile, anche fasi disperse costituite da colloidì di altra natura, fossero suscettibili di essere adsorbite dai suddetti scheletri di silice idrata.

È noto che le qualità adsorbenti selettive, più o meno marcate, degli ordinari geli di silice, studiate soprattutto in confronto dei liquidi e dei gas, dipendono essenzialmente dalle condizioni fisico-chimiche della preparazione dei geli medesimi, nonchè da altri fattori non sempre ben definiti quali l'età, e le condizioni sia chimiche che termodinamiche degli ambienti in cui si sono successivamente venuti a trovare⁽⁴⁾.

La silice idrata, di cui nel caso presente trattasi, ha una origine del tutto diversa di quella dei geli suddetti, ottenuti o per precipitazione dalla soluzione di un silicato, o per coagulazione di un idrosole.

Essa infatti non è passata attraverso ad una fase liquida sotto forma di sale disciolto o attraverso ad una fase dispersa sotto forma di idrosole, ma costituisce invece quella specie di scheletro che, come ho già avuto campo di segnalare, si ottiene direttamente da un cristallo o frammento di cristallo di leucite allorché questo cede la sua potassa e la sua allumina sotto l'azione di una soluzione acida.

(1) Cfr. « Bulletin for Character figures of Solar Phenomena ». Zürich, 1934.

(2) Presentata nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) Vedi questi « Rendiconti », vol. XIII, ser. 6^a, fasc. 5^o, p. 327, 1931.

(4) Vedi ad esempio PATRICK e GREIDER, « J. Phys. Chem. », XXIX, p. 1031, 1925.

Ho motivo di ritenere che alla particolare microstruttura di questo scheletro di silice idrata, che in determinate condizioni conserva la forma del cristallo originario, siano legate delle proprietà interessanti, e perciò meritevoli di studio.

Il dispositivo da me adoperato nelle nuove esperienze, è, in sostanza, quello stesso descritto nella Nota sopracitata, salvo per quanto concerne le dimensioni dell'apparecchio, che sono state notevolmente ridotte. Questo consta, infatti, di un tubo di vetro di circa 2 cm. di diametro interno e dell'altezza di circa 10 cm., nel quale viene disposto uno strato dell'altezza di circa 5 cm. di frammenti di cristalli di leucite non caolinizzata, di granitura uniforme (e cioè del diametro medio di circa 1 mm.), fra due dischetti di porcellana forata, di cui quello superiore è ricoperto da uno strato protettivo di perline di vetro. Il suddetto tubo è sormontato da un recipiente della capacità di qualche centinaio di cm³, destinato a raccogliere la soluzione colloidale da trattare, mentre, alla parte inferiore, esso si assottiglia ed è munito di un rubinetto destinato a regolare la velocità di passaggio del liquido.

L'apparecchio viene preparato, una volta per sempre, nella maniera già da me indicata, attaccando i frammenti di cristalli di leucite mediante una soluzione calda di acido cloridrico, oppure solforico o nitrico, in eccesso, che si fa circolare ripetutamente attraverso l'apparecchio stesso per un tempo sufficientemente lungo, che può variare tra mezz'ora e tre quarti d'ora a seconda della velocità di circolazione del liquido, dell'eccesso di acido, della temperatura ecc. In tal modo i frammenti di cristalli di leucite, come ho già detto, cedono la totalità della potassa e dell'allumina che passa in soluzione, mentre la totalità della silice allo stato idrato rimane sotto forma dei già menzionati scheletri, i quali conservano la propria individualità, senza dare comunque luogo fra loro a fenomeni di coalescenza, che avrebbero per effetto di ridurre ed anche completamente otturare i meati dello strato filtrante, impermeabilizzandolo. L'esperienza dimostra infatti che lo strato di scheletri di silice idrata così ottenuto presenta all'incirca la stessa permeabilità ai liquidi di quella che presentava originariamente lo strato di frammenti di cristalli di leucite non ancora attaccati.

Compiuto che sia l'attacco, il che viene rivelato dalla raggiunta costanza di acidità o di salinità del liquido, questo viene eliminato e si procede al lavaggio con acqua dell'apparecchio, che è allora pronto a funzionare.

Con apparecchi così preparati vennero effettuate, e sono tuttora in corso, delle esperienze con sospensioni colloidali di varia natura.

Riporto qui intanto alcune osservazioni fatte con idrosoli di oro.

La soluzione colloidale di Au venne preparata per dispersione, secondo il metodo di Bredig⁽¹⁾ modificato da Beans e da Eastlack⁽²⁾, cioè mediante

(1) « Zeitsch. f. Elektrochemie », IV, p. 514, 1898.

(2) « Journ. of Am. Chem. Society », vol. XXXVII, p. 2667, 1915.

la scarica ad arco tra elettrodi di oro in acqua bidistillata, contenente una quantità di NaCl dell'ordine di gr. 10^{-5} per cm^3 sotto corrente di circa 7 amp. e 110 volt.

In queste condizioni si riesce, dato il potere stabilizzatore dell'elettrolita, ad ottenere degli idrosoli di oro perfettamente limpidi, e del tipico color rosso vivo, contenenti tra 10^{-5} e 10^{-4} gr. di Au per cm^3 e presentanti una stabilità più che sufficiente per le esperienze di cui trattasi.

La suddetta colorazione dell'idrosolo rosso vivo è caratteristica, come è noto, delle fasi disperse di Au i cui corpuscoli raggiungono al massimo dimensioni dell'ordine di $10 \text{ m}\mu$. Con un idrosolo di Au di questo tipo si può calcolare che il rapporto fra diametro della particella colloidale e diametro medio dei canali, percorsi dal liquido nell'attraversare lo strato di scheletri di silice idrata dell'apparecchio descritto dianzi, sia dell'ordine di $1/10.000$.

Con un simile idrosolo d'oro le particelle colloidali manifestano alla cataforesi una carica negativa.

ESPERIENZA I.

Avendo preparato l'apparecchio dianzi descritto, mediante lavaggio a fondo con acqua bidistillata dello strato di scheletri di silice fino a eliminazione sensibilmente completa dell'acido e dei sali adsorbiti, vengono introdotti cm^3 50 dell'idrosolo di Au predetto nel recipiente superiore, e vengono poi fatti passare attraverso l'apparecchio con una velocità di efflusso corrispondente ad una goccia al secondo. In tali condizioni la fase dispersa non viene fissata in maniera sensibile, e ciò evidentemente perchè le cariche di stesso segno, e cioè negative, tanto delle particelle della fase dispersa quanto della superficie di silice idrata dello strato filtrante, sono tali da impedire il contatto. Ricorderò che nelle esperienze precedenti, di cui alla già citata mia Nota, neanche la fase dispersa costituita dall'idrosolo di silice era, in tali condizioni, fissata.

ESPERIENZA II.

Se, per contro, prima del passaggio, agitando il liquido lo si acidifica, aggiungendo rapidamente circa 4 cm^3 di soluzione di HCl N/10 per 100 cm^3 di idrosolo d'Au, si osserva che gli ultramicrosoli della fase dispersa presentano ora alla cataforesi una carica positiva, mentre il colore rosso dell'idrosolo non è sensibilmente mutato. Ciò sta ad indicare che in tal modo non si è determinata una coalescenza sensibile delle particelle colloidali di Au fra loro, e che le dimensioni di esse non devono perciò essere mutate in misura apprezzabile.

Tale liquido, passato anch'esso per una sola volta attraverso all'apparecchio, con la stessa velocità di efflusso, ne esce incolore o quasi. Se la

decolorazione del liquido non risulta del tutto raggiunta al primo passaggio, essa può venire completata mediante un secondo passaggio del liquido medesimo. Tutto ciò si spiega, ammettendo che l'addizione di quella proporzione di acido cloridrico alla soluzione colloidale, mentre ha determinato il mutamento di segno della carica delle particelle costituenti la fase dispersa, rivelato dalla cataforesi, non ha provocato invece alla superficie della silice idrata una variazione di stato elettrico tale da impedire il contatto con essa delle particelle colloidali stesse.

La superficie degli scheletri di silice idrata, sui quali è rimasta in tal modo fissata la fase dispersa di Au, appare per lo più colorata in rosso o in rosa, a seconda della quantità di sole adsorbito, il che sta evidentemente ad indicare che si è in tal caso in presenza di una fissazione individuale di ciascuna delle particelle di Au colloidale che costituivano la fase dispersa nel liquido, senza che sia contemporaneamente avvenuto, in misura sensibile, un inizio di coagulazione dell'idrosole per coalescenza delle particelle stesse fra loro, la quale, come è noto, sarebbe stata accompagnata da una variazione di colorazione tendente al violetto o addirittura al blu. È interessante notare che una preventiva acidificazione degli scheletri di silice idrata, mediante adsorzione di HCl, anzichè ostacolare la fissazione della fase dispersa anch'essa acidificata, la facilita e la accelera.

ESPERIENZA III.

Se fissato che sia il colloide Au nel modo indicato dall'esperienza II, ed effettuato un lavaggio a fondo con acqua bidistillata, si fa ripetutamente circolare attraverso allo strato di scheletri di silice una soluzione all'1 % di Na_2CO_3 , si riesce a riportare in sospensione l'Au stesso, più o meno rapidamente. Il liquido così ottenuto presenta la stessa tinta rosa dell'idrosole di partenza, il che sta a dimostrare che nemmeno nel processo suddetto le dimensioni delle particelle d'Au colloidale riportate in sospensione sono sensibilmente mutate. Il fatto che in questa esperienza si osserva un passaggio sia pur lieve di silice nel liquido fa ritenere che il distacco degli ultramicroni d'Au sia dovuto ad una solubilizzazione o a una peptizzazione della superficie della silice idrata, come era logico prevedere, per azione del carbonato sodico. Ciò non altera tuttavia le proprietà dello strato ultrafiltrante, il quale, eliminato che sia il carbonato sodico mediante lavaggio con acqua, è nuovamente pronto a funzionare.

Il ritorno in sospensione della totalità del colloide è tuttavia in tali condizioni lento ed incompleto.

Se si vuole rapidamente asportare la totalità dell'oro fissato, come ad esempio può occorrere per un dosaggio, conviene portarlo in soluzione. Basta per questo un passaggio di alcuni cm^3 di acqua regia, seguito da un lavaggio con acqua, col che l'ultrafiltro è nuovamente pronto a funzionare.

Lo stesso può dirsi di qualunque altro colloide fissato, scegliendo opportunamente il solvente, come verrà del resto precisato in un'ulteriore Nota.

ESPERIENZA IV.

Dato quanto sopra esposto, era interessante vedere quale azione potesse avere sul processo di fissazione l'addizione, all'idrosol di Au, di un colloide reversibile atto ad esercitare quell'azione anticoagulante, o protettiva, che va generalmente attribuita alla formazione di uno strato di adsorzione di tale colloide reversibile intorno alle particelle della fase dispersa del colloide irreversibile. A tale uopo, nel mentre una porzione della soluzione d'oro colloidale, nelle condizioni di acidificazione indicate nell'esperienza II, stava passando attraverso l'apparecchio, con completa fissazione della fase dispersa, veniva aggiunta alla porzione del liquido non ancora passata una proporzione adeguata di soluzione del colloide protettore (ad esempio gomma arabica) determinata in base all'indice d'oro corrispondente a tale colloide.

Si è potuto in tal modo constatare che la parte del liquido così trattata attraversava l'apparecchio senza subire una decolorazione sensibile: il che prova che la presenza del colloide reversibile, nella stessa proporzione che basterebbe ad impedire la coalescenza delle particelle di un colloide Au supposto sul punto di coagulare, si esercita, nel caso presente, all'effetto di impedire la adsorzione della fase dispersa di Au alla superficie dei granuli di silice idrata.

CONCLUSIONI.

I risultati delle esperienze sopra riportate costituiscono anzitutto una nuova conferma della interpretazione fisico-chimica da me precedentemente data ⁽¹⁾ del mio processo di eliminazione della silice colloidale dalle soluzioni acido-saline ottenute nell'attacco della leucite. Interpretazione nella quale ero stato del resto confortato a suo tempo dall'autorevole consenso del mio illustre collega prof. Parravano.

L'apparecchio, descritto dianzi, quale è servito alle surriferite esperienze fatte con l'idrosol di oro, e che sta attualmente servendo per esperienze in corso con sistemi dispersi di altra natura, costituisce in sostanza un vero e proprio ultrafiltro colloidale di facile realizzazione e di grande efficienza, anche nel caso dei colloidi più ribelli all'ultrafiltrazione. Infatti esso, data la sua estrema permeabilità anche a liquidi di considerevole viscosità e la sua elevata capacità di fissazione, si presta assai bene alla rapida e completa separazione di una fase dispersa, anche quando questa, per sua natura, sia

(1) Vedi loc. cit. e «Atti del II Congr. Naz. di Chimica Pura ed Applicata Firenze e Toscana», maggio 1929, VII, p. 226.

difficilmente arrestata dagli ordinari ultrafiltri o, per sua abbondanza, sia suscettibile di rapidamente otturarli.

Inoltre è da tener presente la facilità con cui, mediante solubilizzazione o peptizzazione, il colloide fissato può venire in un secondo tempo totalmente rimosso dall'ultrafiltro, senza comunque alterare le proprietà di questo.

Tengo ad aggiungere che nelle esperienze sopracitate sono stato coadiuvato assai efficacemente dai due studenti laureandi G. Giuliani e G. Ghigi.

Biologia. — « *Deuterophoma tracheiphila* » e malattie da virus degli agrumi. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. PETRI.

Il *mal secco* dei limoni, riconosciuto oggi come una *tracheomicosi* e riscontrato per la prima volta in Italia in provincia di Messina nel 1918, è stato oggetto di numerose ricerche, sino a che nel 1928 venne isolato dalle piante ammalate l'agente patogeno specifico (*Deuterophoma tracheiphila* Petri) e con l'inoculazione di questo fungo in piante sane fu possibile riprodurre sperimentalmente la malattia a Roma, alla distanza quindi di qualche centinaio di chilometri dagli agrumeti infetti della Sicilia. La patogenità del fungo fu poi numerose volte sperimentata in Sicilia ed altrove anche ad opera del prof. H. S. Fawcett della Università di California e dal dott. G. Savastano.

Sembrava dunque che sull'eziologia del *mal secco* non potessero sorgere dei dubbi e che fosse ormai riconosciuto dai fitopatologi che si tratta di una *tracheomicosi* tipica, seguita rapidamente e mascherata da un'*antracnosi* dei rametti verdi prodotta dal *Colletotrichum gloeosporioides* Penz., che costantemente attacca i tessuti corticali quando già nell'interno dei vasi del legno si trova l'agente specifico del *mal secco*. Questa particolare sovrapposizione di due infezioni sugli stessi organi della pianta, delle quali una, la primaria, non è manifesta per sintomi esterni ed appariscenti, mentre l'altra, la secondaria, si presenta col rapido imbrunimento dei germogli, spiega le varie vicende delle ricerche sulla causa del *mal secco* che, in un primo tempo, venne confuso con la batteriosi dei rametti (*Citrus blast*), di poi, per la presenza costante del *Colletotrichum* sugli organi ammalati e perchè questo è un fungo comunissimo in ogni agrumeto ed incapace di attaccare rametti sani, era stata data una certa importanza, come causa complessiva della malattia, all'insieme delle condizioni esterne, terreno e pratiche culturali in particolare, le quali potevano influire sfavorevolmente sulle piante rendendole recettive per il *Colletotrichum*. Ma trovato l'agente specifico del *mal secco*, si è riconosciuto sperimentalmente e con l'osservazione obiettiva dei fatti verificantisi in natura,

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1935.

che la malattia è di origine prettamente parassitaria, poco o niente favorita o ostacolata da condizioni dell'ambiente.

Il prof. D. Atanasoff ha creduto, dopo aver fatta una visita di cinque o sei giorni agli agrumeti di S. Teresa di Riva (Messina) e di Acireale (Catania) e valendosi delle sue conoscenze bibliografiche sulle malattie da *virus* delle piante, di poter affermare che il *mal secco* è una *virosi* e che la *Deuterophoma tracheiphila* rappresenta solo un epifenomeno trascurabile, non necessario per l'originarsi della malattia ⁽¹⁾.

Le affermazioni del fitopatologo bulgaro, invero assai fantastiche, si basano principalmente sulle osservazioni e induzioni seguenti:

Avendo osservato l'A. in alcuni agrumeti colpiti da *mal secco* delle piante di limone e di arancio amaro che presentavano sintomi attribuibili a malattie da *virus* (deformazione del lembo fogliare, nervature pallide, clorosi, variegatura ecc.) ha ritenuto che alcuni di questi sintomi, specialmente l'impallidirsi delle nervature fogliari e la clorosi, precedano costantemente l'attacco del fungo, che presenterebbe quindi uno sviluppo secondario del tutto occasionale. In appoggio a questa sua tesi, che deriva unicamente da un'idea preconcepita e da induzioni suggeritegli da una fantasia non frenata da un senso di autocritica, Atanasoff cerca di raccogliere e coordinare tutte le espressioni che si prestino a un tal fine, usate da me nelle descrizioni della malattia, anche di quel periodo in cui l'eziologia del *mal secco* era ancora ignota, tentando inoltre di identificare con questa malattia altre affezioni degli agrumi che egli considera, un po' arbitrariamente, come *virosi* o che sono state riconosciute come tali.

Così il *mal secco* sarebbe identico a una clorosi infettiva, descritta da Trabut sugli aranci dell'Algeria nel 1913 e sarebbe pure identico al *Citrus blight* della Florida e al *Withertip* della California. In appoggio alla sua tesi l'A. riesuma alcuni rilievi che oggi sono stati dimostrati privi di ogni valore nei riguardi della eziologia del *mal secco*, come la deficienza di calce nel terreno, la forzatura per la produzione dei *verdelli*, la clorosi diffusa o maculata in alcune piante ecc.

Che la malattia non dipenda da un'infezione fungina, Atanasoff lo desume dalla constatazione che negli agrumeti infetti, dopo che una pianta ammalata è stata tagliata nel fusto e liberata quindi da tutte le parti infette, presenta ancora la malattia se si formano nuovi germogli o se vi si innesta una marza sana. Ciò è una prova, secondo l'A., che il *mal secco* è veramente una malattia da *virus* e se la prende con Fawcett e con Savastano, i quali sostengono che l'infezione fungina penetra dalle radici e sale verso l'alto della pianta.

Se si trattasse di una malattia di origine fungina, pensa Atanasoff, a quest'ora non dovrebbe esistere più alcuna pianta di *Citrus* in Italia.

(1) D. ATANASOFF, *Virus diseases of Citrus*. « Yearbook of the University of Sofia », Faculty of Agriculture, vol. XIII, 1934-1935. L'estratto è stato pubblicato in data 20 febbraio 1935.

Il *mal secco*, molto probabilmente, è stato introdotto in Sicilia con la coltura stessa degli agrumi. Se prima di questi ultimi sedici anni nessuno se ne è accorto ciò non ha alcun valore, secondo Atanasoff, per negare questa sua supposizione. Infine l'A., convinto per autosuggestione, che si tratti di una malattia da *virus* tipica, si ritiene in dovere di consigliare quelle misure profilattiche, ormai stereotipate, che vengono comunemente consigliate contro simili malattie, trovando naturalmente inadatti i provvedimenti di lotta resi obbligatori in Sicilia.

Le supposizioni e le induzioni che sono state ora esposte sommariamente, potrebbero essere facilmente confutate richiamando l'attenzione del fitopatologo bulgaro sul fatto di primaria importanza, che il *mal secco*, è stato ripetutamente riprodotto sperimentalmente mediante l'inoculazione in piante sane dell'agente specifico prelevato da colture pure, ma è forse opportuno riferire in questa Nota le confutazioni, che si possono opporre singolarmente a certe affermazioni gratuite, basandosi sui risultati stessi delle ricerche che sulla malattia sono state fatte in Italia.

È vero che negli agrumeti siciliani colpiti dal *mal secco* si osservano sopra alcune piante sparse qua e là o riunite anche in piccoli gruppi dei sintomi di malattie da *virus*; ma questi stessi sintomi si presentano anche negli agrumeti dove il *mal secco* non esiste. Come ho già fatto notare nei miei lavori su questa malattia, la clorosi delle foglie non costituisce un carattere che si trovi in rapporto con l'infezione che è causa della malattia. Vi sono moltissime piante di limone e d'arancio amaro che sono attaccate dal *mal secco* pure avendo le foglie di un verde intenso e del tutto normale. L'ingiallimento delle foglie in queste piante si manifesta dopo avvenuta l'infezione, quando il micelio del fungo parassita è già penetrato per un tratto più o meno lungo nei vasi del legno. Questa precedenza dell'infezione fungina sopra ogni altro sintomo esterno visibile è stata constatata da innumerevoli osservazioni, per cui sopra questo fatto ogni discussione è superflua. Una volta, quando non si conosceva l'infezione tracheicola della *Deuterophoma*, si poteva pensare che questo ingiallimento costituisse il primo sintomo della malattia; ciò che del resto io non ho ammesso neppure allora; ma oggi ciò non è ammissibile nel modo più assoluto.

È da notare che in Sicilia, come altrove, le piante di agrumi vanno soggette a periodi transitori di clorosi di natura nutrizionale, e che poi più o meno rapidamente scompare. Anche la clorosi maculata internervale (*foliocllosi* degli Autori americani) che non è una malattia da *virus*, ma un effetto di disturbi funzionali, scompare in certi periodi per ricomparire in altri.

Che se sono colpite da *mal secco* anche piante con foglie ingiallite o con altri sintomi, questi sono del tutto indipendenti dall'infezione fungina. Non è quindi escluso che anche piante occasionalmente affette da una *virosi* possano essere attaccate dal fungo. È certo però che deve trattarsi di casi eccezionali, perchè esso attacca di preferenza piante sane.

Il *mal secco* non può essere identico alla clorosi infettiva descritta da Trabut per diverse ragioni, e cioè: la clorosi infettiva attacca specialmente gli aranci, mentre il *mal secco* rispetta gli aranci ed attacca i limoni, l'arancio amaro, i cedri ed i pompelmi; la clorosi dell'Algeria si trasmette quasi esclusivamente per innesto ed è quindi relativamente lenta nel diffondersi; il *mal secco* si diffonde per trasporto di picnospore dalle piante ammalate a quelle sane, come è stato dimostrato da apposite esperienze e dalle numerose osservazioni fatte negli agrumeti. La clorosi descritta da Trabut non ha quindi la stessa capacità distruttiva del *mal secco*, ma una notevolmente minore; nei rami colpiti da clorosi infettiva non è stato mai riscontrato un micelio che presenti le caratteristiche morfologiche e fisiologiche di quello della *Deuterophoma tracheiphila*, che si trova invece costantemente in tutte le regioni agrumicole, dove sino ad ora è stato constatato il *mal secco* (Palestina, Grecia e Sicilia).

Per queste stesse ragioni il *mal secco* non è identificabile col *Citrus blight* della Florida, nè col *Withertip* della California, per quanto il disseccamento dei rametti e l'aspetto delle piante colpite da queste due malattie presentino delle analogie col *mal secco*.

Il fatto che il *Citrus blight* non è trasmissibile per innesto costituisce una grave obiezione contro l'opinione di Atanasoff che si tratti di una malattia da *virus*.

L'inchiesta a suo tempo da me fatta negli Stati Uniti d'America esclude in modo assoluto che il *mal secco* fosse identificabile con qualcuna delle malattie che colà producevano il disseccamento dei rametti e anche dell'intera pianta. Che poi il *Withertip* possa essere una malattia da *virus* è pure del tutto da dimostrare.

Quando s'innestano delle marze sane sopra un fusto di una pianta ammalata tagliato a poca distanza dal suolo, la malattia non si trasmette dal soggetto alla marza se il fusto non contiene il fungo, e la marza vegeta vigorosamente sino a tanto che l'infezione non la colpisce dall'estremità apicale. La malattia non si trasmette alla marza o ai polloni anche quando il fusto è infetto dal fungo, ma quando resta limitato a un settore ristretto, lontano dal lato dove è stato fatto l'innesto o da dove sono sorti i polloni. Se poi s'innesta sul fusto tagliato di una pianta ammalata una marza di arancio dolce (resistente), la pianta vegeta vigorosamente e se il micelio non aveva ancora raggiunto la base del fusto, la pianta si può considerare definitivamente ricostituita.

Naturalmente occorre avere l'avvertenza, di eliminare, tutte le volte che si sviluppano, i polloni che nascono dal piede del fusto, perchè è da questi che potrebbe penetrare nuovamente l'infezione del *mal secco* nella pianta. Tuttociò dimostra che l'ammalarsi degli innesti di limone su fusti tagliati di piante ammalate non dipende da un *virus* che si trovi nel fusto, ma dall'infezione fungina che può facilmente ripetersi sui nuovi germogli.

Non è poi vero, come asserisce Atanasoff, che centinaia di fusti di piante ammalate, tagliati a poca distanza dal terreno presentino il legno perfettamente sano. In moltissimi casi il micelio della *Deuterophoma* ha già raggiunto le radici, ma esso è limitato a pochi vasi, per cui la lieve e piccolissima macchia che esso forma sulla superficie del taglio può facilmente sfuggire ad una osservazione affrettata.

Che l'infezione del *mal secco* possa avvenire dalle radici, come affermano Fawcett e Savastano, è un fatto che, per quanto rarissimo ed eccezionale, pure si verifica.

Che il *mal secco* sia stato importato in Sicilia con la stessa coltura degli agrumi è una supposizione del tutto infondata e che è contraddetta dal fatto che, dal 1918 ad oggi, la malattia ha distrutto complessivamente nelle provincie di Messina e di Catania quasi 3000 ettari di limoneti, mentre moltissimi altri sono in via di distruzione.

Che cosa rimarrebbe oggi di limoni in Sicilia se la malattia vi fosse stata sino dall'inizio della coltura?

L'affermare che è stata la forzatura per produrre i *verdelli* ⁽¹⁾, che ha reso distruttiva la malattia è una supposizione che è stata già fatta da molti e che è stata poi riconosciuta non corrispondente al vero.

In Palestina e in Grecia non si fa la forzatura dei limoni e ciononostante la malattia è notevolmente distruttiva, tanto che nell'isola di Chio non c'è quasi più una pianta di limone e nel Peloponeso e nell'isola di Creta i danni sono ingenti. E che dire delle piantine di vivaio? Sono forse sottoposte alla forzatura? È possibile che di una simile malattia gli agrumicoltori non si siano mai accorti per il passato? È invece ormai ben noto che in Palestina il *mal secco* fa sentire i suoi danni da più di cento anni fa e che gradatamente la malattia si è diffusa nelle isole dell'Egeo, nel Peloponeso e di là recentemente si è sviluppata sul lato orientale della Sicilia ed attualmente va diffondendosi sul lato settentrionale. La *tracheomicosi* dei limoni è perfettamente paragonabile a quella dell'olmo prodotta dalla *Ceratostomella ulmi*. La rapidità di diffusione della *Deuterophoma tracheiphila* è pure simile a quella della *Ceratostomella*; non è paragonabile certamente a quella di una *erisifacea* o di una *peronosperacea*. Molte difficoltà, che ho fatto in gran parte conoscere, rendono molto più difficile il trasporto delle picnospore del fungo del *mal secco* per opera del vento e molti ostacoli pure esistono per la penetrazione del micelio nel tessuto legnoso, ma il *mal secco* si diffonde non pertanto assai più rapidamente di una malattia da *virus*.

Per quanto riguarda le misure profilattiche, si deve deplorare che, in base a semplici presunzioni, il fitopatologo bulgaro giudichi non adatte e del

(1) ATANASOFF, nella sua visita frettolosa in Sicilia, non ha avuto il tempo di apprendere il vero scopo della forzatura, che non è quella, come egli crede, di affrettare la maturazione dei frutti, ma di procurare una fruttificazione a cui la pianta normalmente non darebbe origine.

tutto inutili quelle che il Governo Italiano ha reso obbligatorie nelle due provincie di Messina e di Catania. I due decreti Ministeriali relativi sono del 1928 e del 1929.

Oggi, alla distanza di sei anni, permangono del tutto invariate le ragioni tecniche e scientifiche della loro promulgazione.

In realtà il taglio obbligatorio dei rametti infetti e la loro distruzione col fuoco ha dato ottimi risultati e non sono pochi gli agrumicoltori che sono diventati diligenti e convinti esecutori di tale pratica, perchè hanno constatato che è l'unico mezzo, almeno per ora, per mantenere l'infezione in limiti tollerabili, prolungando notevolmente la vita e la produttività delle piante. Le ricerche per trovare varietà resistenti, come consiglia Atanasoff, sono già in piena esecuzione.

Il giudizio più benevolo che si possa dare delle osservazioni e delle conclusioni sul *mal secco*, pubblicate dal fitopatologo bulgaro, è che egli, entusiasta dall'idea di poter dimostrare che la malattia dei limoni è una *virosi*, ha perduto la visione della realtà, rimanendo vittima di un'illusione.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla trasformata di Laplace* ⁽¹⁾. Nota di M. PIRONE, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

... Pervenuti all'equazione

$$(I) \quad \int_0^{\infty} e^{-\tau t} F(t) dt = f(\tau),$$

nella funzione incognita $F(t)$, ha certo grande valore, anche per le applicazioni più correnti, il possesso di semplici criteri che consentano di poter dedurre le più cospicue e significative proprietà qualitative e quantitative per la funzione $F(t)$ da quelle della nota funzione analitica $f(\tau)$. Ed al riguardo sarebbe, a mio avviso, assai interessante approfondire la conoscenza delle proprietà della $F(t)$ tutte le volte che la $f(\tau)$ verifichi le ipotesi da te considerate nella Nota del 17 febbraio u. s., sia cioè olomorfa all'esterno di un cerchio del piano complesso τ ed infinitesima all'infinito. Nei miei appunti su tale argomento, da molto tempo in studio presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, trovo il seguente teorema di immediata dimostrazione:

(1) Da una lettera al prof. F. TRICOMI, compilata nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, con riferimento alla Nota del detto autore: *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, questi «Rendiconti», seduta del 17 febbraio u. s.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione analitica $f(z)$ sia la trasformata di Laplace di una funzione $F(t)$ (reale o complessa) della variabile reale t , appartenente alla classe $L_2(e^{-t})$ nel semiasse positivo $t^{(1)}$ è che la $f(z)$ sia olomorfa nel semipiano aperto $S\left(\frac{1}{2}\right)$, luogo dei punti $z = x + iy$ per cui è

$$x > \frac{1}{2},$$

e sia in $S\left(\frac{1}{2}\right)$ suscettibile del seguente sviluppo in serie

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n,$$

ove per i coefficienti q_n è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2.$$

Soddisfatta questa condizione la serie (2) riesce assolutamente ed uniformemente convergente in ogni semipiano $S\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$, luogo dei punti $z = x + iy$ per cui è

$$x > \frac{1}{2} + \epsilon,$$

comunque sia stata fissata la quantità positiva ϵ , e la funzione $F(t)$ è data dalla formola

$$(3) \quad F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n!} L_n(t),$$

designando $L_n(t)$ i polinomi di Laguerre:

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \equiv \sum_{k=0}^n l_{nk} t^k,$$

e riuscendo la serie, sul semiasse positivo t , convergente in media rispetto alla funzione peso e^{-t} [cfr. (M), § 1]. Data la $f(z)$ i coefficienti q_n sono forniti dalla formola

$$q_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k l_{nk} f^{(k)}(1).$$

(1) La cui norma, cioè, moltiplicata per e^{-t} , riesca sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$. Cfr. la mia Memoria: *Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati*. «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari», anno V, aprile-luglio 1934. Questa Memoria sarà qui, in seguito, citata con la notazione (M).

La condizione è sufficiente. Si ottiene, invero, mediante n successive integrazioni per parti,

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-\tau t} L_n(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\tau-1)t} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) dt = \frac{n!}{\tau} \left(1 - \frac{1}{\tau} \right)^n,$$

e si ha pertanto [cfr. (M), § 5 e teor. VII del § 1]

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} L_n(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\tau t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n!} L_n(t) \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-\tau t} F(t) dt,$$

con la $F(t)$ data dalla (3).

La condizione è necessaria. Se $F(t)$ appartiene alla classe $L_2(e^{-t})$ nel semiasse positivo t , per ogni punto τ di $S\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ e per ogni intero e positivo k , riesce

$$|t^k e^{-\tau t} F(t)| \leq t^k e^{-\varepsilon t} e^{-\frac{1}{2}t} |F(t)| \leq \frac{1}{2} t^{2k} e^{-2\varepsilon t} + \frac{1}{2} e^{-t} |F(t)|^2,$$

e si ha dunque la uniforme sommabilità, rispetto a t , della

$$t^k e^{-\tau t} F(t),$$

nell'intervallo $(0, \infty)$, al variare di τ nel semipiano $S\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$. Ne segue l'olomorfia di $f(\tau)$ in $S\left(\frac{1}{2}\right)$ e che:

$$(-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-\tau t} F(t) dt = f^{(n)}(\tau).$$

Posto

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k l_{nk} f^{(k)}(1),$$

si ricava

$$\int_0^{\infty} e^{-t} F(t) L_n(t) dt = c_n,$$

e, pertanto, la convergenza in media, sul semiasse positivo t , rispetto alla funzione peso e^{-t} , della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n!)^2} L_n(t),$$

verso la $F(t)$ [cfr. (M), §§ 1 e 5] e quindi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{(n!)^2}.$$

Dalle (1) e (4) si ricava pertanto [cfr. (M), teor. VII del § 1], per ogni punto z di $S\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n.$$

Si ha dunque, per esempio, prendendo la determinazione principale del logaritmo ⁽¹⁾, che

$$\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z} \log \frac{1}{z},$$

è la trasformata di Laplace della funzione

$$F(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n!)} L_n(t).$$

Dalla (2) si deduce

$$|zf(z)|^2 < \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|1 - \frac{1}{z}\right|^{2n},$$

e pertanto che:

Ogni trasformata di Laplace $f(z)$ di una funzione $F(t)$ appartenente alla classe $L_2(e^{-t})$ nel semiasse positivo t , verifica, nel semipiano $S\left(\frac{1}{2}\right)$, la limitazione

$$|f(z)| < \frac{c}{\sqrt{2x-1}}$$

ove c è una costante positiva.

Risultati analoghi sussistono per la trasformata di Laplace con intervallo finito d'integrazione, la quale giova pure considerare nelle applicazioni. Si ha, per esempio, che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione $F(t)$ di norma sommabile nell'intervallo $(0, 1)$, verificante l'equazione

$$(5) \quad \int_0^1 F(t) e^{tz} dt = f(z),$$

(1) Cfr. le mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*. «Circolo Matematico di Catania», Catania, 1923, pp. 194 e 289.

è che $f(z)$ sia funzione intera e sia suscettibile del seguente sviluppo in serie

$$(6) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n E_n(z),$$

ove per i coefficienti q_n è convergente la serie

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q_n|^2}{2n+1},$$

ed è

$$E_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)! z^{n+\nu}}{\nu! (2n+\nu+1)!} = z^n \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{1}{z^{n+1}} \left(e^z - 1 - \frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^n}{n!} \right) \right].$$

Con la convergenza della serie (7) quella della (6) riesce assoluta ed uniforme in ogni regione limitata del piano complesso z e la funzione $F(t)$ di cui $f(z)$ è trasformata di Laplace ha il seguente sviluppo in serie

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n(t),$$

convergente in media nell'intervallo $(0, 1)$, designando $P_n(t)$ i polinomi di Legendre relativi all'intervallo $(0, 1)$:

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [t^n (t^n - 1)] = \sum_{k=0}^n p_{nk} t^k.$$

Data la $f(z)$, i coefficienti q_n sono forniti dalla formola

$$q_n = (2n+1) \sum_{k=0}^n p_{nk} f^{(k)}(0) \quad (1).$$

Si ha pure immediatamente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione $F(t)$ di norma sommabile nell'intervallo $(0, 1)$, verificante la (5), è che $f(z)$, funzione intera di z , sia suscettibile del seguente sviluppo in serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{1 - (-1)^n e^z}{z^2 + n^2 \pi^2},$$

ove, per i coefficienti q_n è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_n|^2}{n^2}.$$

(1) Per $f(z) = e^z$ si trova $q_n = 2n+1$, onde segue che e^z non è trasformata di Laplace di alcuna funzione di norma sommabile.

Soddisfatta questa condizione la soluzione $F(t)$ della (5) ha il seguente sviluppo in serie, convergente in media:

$$F(t) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n} \sin(n\pi t).$$

Data la $f(z)$, i coefficienti q_n sono forniti dalla formola

$$q_n = \frac{n\pi}{i} [f(n\pi i) - f(-n\pi i)].$$

Ritornando alla trasformata di Laplace, propriamente detta, ha grande interesse, per i problemi di stabilità alle sollecitazioni dinamiche, il possesso di criteri che consentano di ben stabilire, a mezzo della conoscenza di $f(z)$, il comportamento di $F(t)$ per $t \rightarrow \infty$. Dirò che $F(t)$ è stabile se, essendo essa derivabile per ogni t , essa e la sua derivata $F'(t)$ riescono limitate nell'intervallo $(0, \infty)$. Se, in tale ipotesi, essendo $F(t)$ reale, diciamo L un numero che limiti superiormente $|F(t)|$ e $|F'(t)|$ e c una qualsivoglia costante positiva, la funzione $e^{-ct} F(t)$ riesce a variazione limitata nell'intervallo $(0, \infty)$, con modulo e variazione totale rispettivamente non superiori a L e $\left(1 + \frac{1}{c}\right)L$. Si ha dunque, per due certi punti t' e t'' del semiasse positivo, e nel semipiano $S(c)$,

$$\begin{aligned} |\text{parte reale di } f(z)| &= \\ \left| \int_0^{\infty} e^{-(x-c)t} \cos(yt) (e^{-ct} F(t)) dt \right| &= L \left(2 + \frac{1}{c} \right) \left| \int_{t'}^{t''} e^{-(x-c)t} \cos(yt) dt \right| \leq \\ &\leq L \left(2 + \frac{1}{c} \right) \frac{2\sqrt{2}}{|\bar{z} - c|}, \end{aligned}$$

e si ha dunque che: *Condizione necessaria affinchè la $F(t)$, supposta reale, sia stabile, essendo essa e la sua derivata superiormente limitate in modulo dal numero L , è che $f(z)$ sia olomorfa nel semipiano $S(0)$ e che, per ogni quantità positiva c , riesca nel semipiano $S(c)$,*

$$|\bar{f}(\bar{z})| < L \left(2 + \frac{1}{c} \right) \frac{4\sqrt{2}}{|\bar{z} - c|}.$$

Se si osserva che, per ogni $x > 0$, la funzione $F(t)/(1 + x^2 t^2)$ riesce, pur essa, a variazione limitata nell'intervallo $(0, \infty)$, con modulo e variazione totale rispettivamente non superiori a L e $\pi L(1 + x)/(2x)$, si trova

facilmente, con lo stesso procedimento, che: È pure condizione necessaria di stabilità che nel semipiano $S(0)$ risulti

$$|f(\bar{z})| < L \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{1+x}{x} \right) \left(\frac{4}{e^2} + \frac{6}{e} + 11 \right) \frac{4\sqrt{2}}{|\bar{z}|}$$

Si ha pure che: Condizione necessaria affinché la derivata v^{ma} di $F(t)$, supposta reale, sia stabile, essendo questa e la successiva superiormente limitate in modulo dal numero L , è che $f(\bar{z})$ sia olomorfa nel semipiano $S(0)$ e che, per certe v costanti reali $a_1, a_2, \dots, a_v$, si abbia, comunque si assuma la quantità positiva c , nel semipiano $S(c)$,

$$\left| f(\bar{z}) - \frac{a_1}{\bar{z}} - \frac{a_2}{\bar{z}^2} - \dots - \frac{a_v}{\bar{z}^v} \right| < L \left(2 + \frac{1}{c} \right) \frac{4\sqrt{2}}{|\bar{z} - c| |\bar{z}|^v},$$

e nel semipiano $S(0)$

$$f(\bar{z}) - \frac{a_1}{\bar{z}} - \frac{a_2}{\bar{z}^2} - \dots - \frac{a_v}{\bar{z}^v} < L \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{1+x}{x} \right) \left(\frac{4}{e^2} + \frac{6}{e} + 11 \right) \frac{4\sqrt{2}}{|\bar{z}|^{v+1}}.$$

Si ha $F^{(k-1)}(0) = a_k (k = 1, 2, \dots, v)$.

Una condizione necessaria per lo smorzamento di $F(t)$ — utilissima a tenersi presente — è fornita dal seguente teorema: Condizione necessaria affinché $F(t)$, supposta sommabile in un intervallo finito $(0, T)$, sia, nell'intervallo (T, ∞) , a variazione limitata ed infinitesima all'infinito, è che $f(\bar{z})$ riesca olomorfa nel semipiano $S(0)$ e continua in ogni punto dell'asse y , diverso dall'origine⁽¹⁾.

È facile, invero, verificare, nelle dette ipotesi per $F(t)$, che l'integrale al secondo membro della (1), risulta, comunque si fissi una quantità positiva σ , uniformemente convergente al variare del punto $x + iy$ nell'insieme luogo dei punti per cui è $x \geq 0$ e $|\bar{z}| \geq \sigma$. Ne segue che: Condizione necessaria affinché $F(t)$ abbia la forma

$$F(t) = \sum a^n e^{\alpha t} \sin(\omega t + b) + G(t),$$

con $G(t)$ sommabile in un intervallo finito $(0, T)$, a variazione limitata nell'intervallo (T, ∞) ed infinitesima all'infinito, è che

$$f(\bar{z}) \cdot \prod [\omega^2 + (\bar{z} - \alpha)^2]^{n+1}$$

(1) Per esempio, $F(t) = \sin t$ non si smorza e si ha $f(\bar{z}) = \frac{1}{1 + \bar{z}^2}$ che diventa infinita per $\bar{z} = \pm i$.

sia olomorfa nel semipiano $S(0)$ e continua in ogni punto dell'asse immaginario, diverso dall'origine. Ed in particolare, perchè si abbia

$$F(t) = \sum a^n + G(t),$$

è che $f(\bar{z})$ stessa verifichi quella condizione.

Ed inverso, se $F(t)$ ha la forma indicata, risulta

$$f(\bar{z}) = \sum (-1)^n a \frac{d^n}{d\bar{z}^n} \frac{\omega \cos b + (\bar{z} - \alpha) \sin b}{\omega^2 + (\bar{z} - \alpha)^2} + \int_0^\infty G(t) e^{-zt} dt.$$

Noterò, infine, i due teoremi seguenti:

Se $F(t)$, supposta reale, è sommabile in ogni intervallo finito e, per ogni $x > 0$, è sommabile il prodotto $e^{-xt} F(t)$, nell'intervallo $(0, \infty)$, sussistono le relazioni di limite:

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty}' F(t) \leq \lim_{x \rightarrow 0}' (xf(x)) \leq \lim_{x \rightarrow 0}'' (xf(x)) \leq \lim_{t \rightarrow \infty}'' F(t).$$

Se, per un certo x_0 positivo, si ha, per $x \geq x_0$, la sommabilità di $F(t) e^{-xt}$ nell'intervallo $(0, \infty)$, riesce:

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 0}' F(t) \leq \lim_{x \rightarrow \infty}' (xf(x)) \leq \lim_{x \rightarrow \infty}'' (xf(x)) \leq \lim_{t \rightarrow 0}'' F(t).$$

Per dimostrare, per esempio, le (8), potrò limitarmi a considerare l'ultima nell'ipotesi che il secondo membro non sia $+\infty$. Detto l un qualsivoglia numero superiore a $\lim_{t \rightarrow \infty}'' F(t)$, sia δ un numero positivo tale che risulti $F(t) < l$, per $t \geq \delta$, si avrà

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t) dt < \int_0^\delta e^{-xt} F(t) dt + l \int_\delta^\infty e^{-xt} dt$$

e quindi

$$xf(x) < x \int_0^\delta e^{-xt} F(t) dt + le^{-x\delta},$$

donde $\lim_{x \rightarrow 0}'' (xf(x))$ (per $x \rightarrow 0$) $\leq l$.

È manifesto quale utile ufficio possono prestare i teoremi ora dati. Per esempio, le (8), ci dicono che, nella ipotesi considerata, la stabilità per $F(t)$ non avrà certo luogo se $xf(x)$, per $x \rightarrow 0$, non ha finiti il minimo ed il massimo limite e che $F(t)$ non si smorzerà se $xf(x)$ non è infinitesima con x .

(1) Con $\lim'$ e $\lim''$ indico il minimo ed il massimo limite. Cfr. le citate mie *Lezioni d'analisi*, p. 12.

Matematica. — *Gli invarianti d'una varietà algebrica di S_4 .*
Nota di L. ROTH, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In un lavoro di prossima pubblicazione ⁽²⁾ ho avuto l'occasione di considerare il seguente problema: *siano V una varietà di S_4 , dotata di singolarità normali, e V^1 una varietà di ordine l , aggiunta a V ; trovare i caratteri della superficie $F^{(0)}$, intersezione residua di V e V^1 rispetto alla superficie doppia di V .*

Prima di riportare le formule da me ottenute, conviene mettere in rilievo alcuni risultati relativi alla varietà V di S_4 , dotata di singolarità normali; altrove ⁽³⁾ ho dimostrato che sette caratteri proiettivi servono a definire tale varietà e che essi sono infatti l'ordine n di V ; l'ordine, il rango, la classe e il ceto della superficie doppia B (che denotiamo rispettivamente con μ_0 , μ_1 , μ_2 e ν_2); e l'ordine t e il rango r della curva tripla C (tripla per V e B). Allora il numero ξ dei punti quadrupli di C (che sono quadrupli per V e sestupli per B) è dato dalla

$$(1) \quad \mu_0(\mu_0 - 1) - \mu_1 - \nu_2 - 2tn + 2\xi = 0,$$

formula ⁽⁴⁾ che esprime il fatto che B è priva di punti doppi impropri.

2. Sia V^1 una varietà aggiunta a V , cosicchè contenga semplicemente la superficie B , doppiamente la curva C e che abbia dei punti tripli nei ξ punti quadrupli di V . La V^1 interseca quindi la V in B e una superficie residua $F^{(0)}$ che incontra B lungo una curva Γ di contatto di V e V^1 ; la Γ avrà dei nodi nei d punti doppi impropri di $F^{(0)}$ e pure nelle i intersezioni di C e Γ .

Essendo α_0 , α_1 , α_2 e β_2 rispettivamente l'ordine, il rango, la classe e il ceto di $F^{(0)}$, si perviene alle seguenti equazioni:

$$(2) \quad \alpha_0 = ln - 2\mu_0.$$

$$(3) \quad \alpha_1 = ln(l + n - 2) - 2\mu_0(3l + 2n - 6) + 4\mu_1 + 18t.$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) L. ROTH, *Adjoint primals in four dimensions*. «Proc. Lond. Math. Soc.» (in corso di stampa).

(3) L. ROTH, *Some formulae for primals in four dimensions*. «Proc. Lond. Math. Soc.», (2), 35, 1933, p. 540.

(4) L. ROTH, *Some surfaces containing triple curves*. «Proc. Camb. Phil. Soc.», 28, 1932, p. 300.

$$(4) \quad \alpha_2 = \ln \{ (l+n-2)^2 - (l-1)(n-1) \} - \\ - 2\mu_0 \{ 4(l+n-3)^2 + l - (n-1)(n-5) \} + 6\mu_0^2 - 8(\mu_2 + \nu_2) + \\ + 2\mu_1(7l + 6n - 22) + 4t(15l - 4n - 9) + 76\xi + 6r.$$

$$(5) \quad \beta_2 = \ln(l-1)(n-1) - 2\mu_0 \{ (l+n-2)(l+n-3) - n^2 + 3n - 1 \} + \\ + 2\mu_0^2 + 2\mu_1(l-2) + 12t(l-2) - 12\xi - 2r.$$

Dalla formula $\alpha_0(\alpha_0 - 1) = \alpha_1 + \beta_2 + 2d$ si trae

$$(6) \quad d = \mu_0 \{ l(l-2) + \mu_0 \} - \mu_1 l - 3t(2l-1) + 6\xi + r.$$

La (6) dà il numero dei punti doppi che deve possedere una varietà aggiunta di ordine l in punti semplici della superficie doppia. Se manca la curva tripla C , essa riduce alla nota formula di Severi pel caso d'una superficie priva di punti doppi impropri.

Per mezzo delle (2)-(5) si ottiene il genere aritmetico $p_a^{(l)}$ e l'invariante $\omega^{(l)}$ di Castelnuovo-Enriques, i quali sono dati dalle formule

$$(7) \quad 12(p_a^{(l)} + 1) = 12\alpha_0 - 8\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2$$

$$(8) \quad \omega^{(l)} - 1 = \alpha_2 + \beta_2 - 6\alpha_1 + 9\alpha_0.$$

3. L'ordine ϵ_0 e il rango ϵ_1 di Γ , e il numero i delle intersezioni di C e Γ vengono espressi da

$$(9) \quad \epsilon_0 = \mu_0(2l + n - 4) - 2\mu_1 - 9t.$$

$$(10) \quad \epsilon_1 = \mu_0 \{ 2(l+n-3)(l+n-4) - (n-1)(n-4) \} - 2\mu_0^2 + \\ + 2(\mu_2 + \nu_2) - \mu_1(4l + 3n - 14) - 4t(6l - n - 9) + 8\xi + 3r.$$

$$(11) \quad i = 3t(l-2) - 12\xi - 2r.$$

Consideriamo ora le curve del sistema caratteristico di $|F^{(l)}|$; se hanno l'ordine η_0 , il rango η_1 e il grado $n^{(l)}$, questi numeri sono dati da

$$(12) \quad \eta_0 = l^2 n - \mu_0(4l + n - 4) + 2\mu_1 + 9t.$$

$$(13) \quad \eta_1 = l^2 n(2l + n - 3) - \mu_0(14l^2 + 12ln + n^2 - 44l - 13n + 36) + \\ + 6(\mu_0^2 - \mu_2 - \nu_2) + \mu_1(16l + 5n - 30) + 6t(12l - 5n - 3) + \\ + 48\xi + 3r.$$

$$(14) \quad n^{(l)} = l^3 n - \mu_0(6l^2 + 3ln - 12l - 2n + 8) + 2(\mu_0^2 - \mu_2 - \nu_2) + \\ + \mu_1(6l + n - 8) + t(27l - 13n + 3) + 16\xi + r.$$

4. Un'applicazione particolare di queste formule che abbia maggiore interesse si fa ponendo $l = n - 5$; così si ottengono i caratteri del *sistema canonico (virtuale)* e delle superficie canoniche (virtuali). Dalle (2)-(5), (7) il genere aritmetico Ω_2 di tali superficie viene dato da

$$(15) \quad \begin{aligned} 12 (\Omega_2 + 1) &= n (n - 5) (7 n^2 - 65 n + 160) - \\ &- 2 \mu_0 (33 n^2 - 309 n + 727) + 14 \mu_0^2 - 16 (\mu_2 + \nu_2) + \\ &+ 2 \mu_1 (27 n - 137) + 100 t (n - 9) + 140 \xi + 10 r. \end{aligned}$$

Dalla (14) il grado Ω_0 del sistema canonico (virtuale) è

$$(16) \quad \begin{aligned} \Omega_0 &= n (n - 5)^2 - \mu_0 (9 n^2 - 89 n + 218) + 2 (\mu_0^2 - \mu_2 - \nu_2) + \\ &+ \mu_1 (7 n - 38) + 2 t (7 n - 66) + 16 \xi + r. \end{aligned}$$

Il genere curvilineo Ω_1 del sistema si deriva dalle (12) e (13), così verificando la nota relazione di Noether-Pannelli

$$(17) \quad 2 \Omega_1 - 2 = 3 \Omega_0.$$

Essendo ω l'invariante di Castelnuovo-Enriques pel sistema canonico, dalla (8) si trae pure la relazione

$$(18) \quad \omega - 1 = 4 \Omega_0.$$

In conclusione aggiungiamo che i nostri risultati possono fornire il modo più rapido per dimostrare la formula fondamentale

$$(19) \quad 2 P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Un'espressione per il genere aritmetico P_a di V è stata data recentemente dal Todd⁽¹⁾, il quale sfruttando i risultati del lavoro citato in (3) a p. 1, trova che

$$(20) \quad \begin{aligned} P_a &= \binom{n-1}{4} - \binom{n-4}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} (n-5) (\mu_1 - 2 \mu_0) - \\ &- \left(\mu_0 - \frac{2}{3} \mu_1 + \frac{1}{6} \mu_2 + \frac{1}{12} \nu_2 \right) + \frac{5}{6} (n-5) t + \frac{5}{3} \xi - \frac{1}{3} t + \frac{1}{6} r. \end{aligned}$$

Quindi, confrontando le formule (15), (16), (17) e (20), viene stabilita la (19) nel modo puramente numerativo a cui forse venticinque anni fa alludeva il Severi⁽²⁾.

(1) J. A. TODD, *The arithmetic genus of a V_3 in S_4* . « Journal Lond. Math. Soc. », 9, 1934, p. 206.

(2) F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. « Rend. Circ. Mat. Palermo », 28, 1909, p. 33.

5. Le (15), (16) e (20) assumono delle forme assai semplici quando vengono espresse per mezzo dei caratteri additivi di V : questi sono ⁽¹⁾ l'ordine n di V , il rango a e la classe m d'una sua sezione iperpiana, la classe w di V , l'ordine j della sua curva cuspidale, e le classi d'immersione j_1, j_0 di quest'ultima in V e B . Così otteniamo per Ω_2, Ω_0 e P_a le espressioni

$$(21) \quad 12(\Omega_2 + 1) = 306a - 79m - 408n + 7w - 82j + 53j_1 - 20j_0,$$

$$(22) \quad \Omega_0 = 48a - 12m - 64n + w - 13j + 8j_1 - 3j_0,$$

$$(23) \quad 24(P_a - 1) = 18a - 24n - 7m + w - 4j + 5j_1 - 2j_0,$$

le quali sono analoghe alle formule (7) e (8) per le superficie.

Matematica (Analisi). — *Un teorema relativo ai sistemi differenziali* ⁽²⁾. Nota di L. SOBRERO, presentata ⁽³⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

OGGETTO DELLA RICERCA⁽⁴⁾. — u e v sian due assegnate funzioni delle variabili x ed y . Esiste una funzione $\varphi(x, y)$ le cui derivate parziali prime sian precisamente u e v ? O, in altri termini, esiste una funzione $\varphi(x, y)$ soddisfacente al sistema delle due equazioni differenziali simultanee

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v \end{cases} ?$$

Risponde un notissimo teorema: « Supposta semplicemente connessa la regione del piano in cui varia il punto (x, y) , per l'esistenza di funzioni uniformi $\varphi(x, y)$ soddisfacenti al soprascritto sistema differenziale è necessario e sufficiente che fra i termini noti u e v sia verificata (in tutti i punti del campo di variabilità di x ed y) la condizione

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

(1) Vedi loc. cit. in (3) a p. 1.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(3) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(4) La ricerca fu esposta alla XXIII Riunione (Napoli, ottobre 1934) della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, e, successivamente, al « Seminario Matematico » della R. Università di Roma.

Verificata questa condizione esistono infinite funzioni uniformi φ soddisfacenti al sistema differenziale proposto. Una (generica) di tali funzioni risulterà determinata quando si prestabilisca il valore che essa deve assumere in un assegnato punto del piano ».

Alcune ricerche (delle quali riferiremo in una prossima Nota) ci han portato a dare, del teorema che precede, un'estensione che riteniamo non priva di interesse. Eccone l'enunciato: « Siano A e B due generici operatori differenziali, parziali, a coefficienti costanti ; e cioè due operatori del tipo

$$A = \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}, \quad B = \sum_{r,s} b_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s},$$

dove i coefficienti a_{rs} e b_{rs} sono costanti e le sommatorie s'intendono estese a un certo numero (arbitrariamente prestabilito) di coppie di valori di r e di s . Fra queste coppie di valori potrà, eventualmente, esser compresa quella $r=0, s=0$: per derivata di ordine zero di una funzione si intenderà, come d'uso, la funzione medesima. Siano m ed n gli ordini dei due operatori A e B.

Designando con u e v due assegnate funzioni delle variabili x ed y , esisterà una funzione $\varphi(x, y)$ soddisfacente al sistema delle due equazioni differenziali simultanee

$$(1) \quad \begin{cases} A\varphi = u \\ B\varphi = v? \end{cases}.$$

Rispondiamo: « Supposti gli operatori A e B primi fra loro (non decomponibili, cioè, ciascuno nel prodotto di due fattori, uno dei quali comune) per l'esistenza (in una regione semplicemente connessa del piano x, y) di funzioni uniformi φ soddisfacenti al soprascritto sistema differenziale è necessario e sufficiente che fra i termini noti u e v sia soddisfatta la condizione (che diremo di compatibilità)

$$(2) \quad Bu = Av.$$

Verificata questa condizione esistono infinite funzioni uniformi φ soddisfacenti al sistema differenziale proposto. Una di tali funzioni risulterà determinata quando si prestabiliscano i valori che devono assumere, in un punto assegnato, alcune (e precisamente $m \cdot n$) derivate della funzione φ » ⁽¹⁾.

(1) Casi particolari del teorema son già noti da ricerche precedenti. Si veda: L. BIANCHI, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni parziali di 2° ordine con 2 variabili*. (« Rendiconti Lincei », ser. 6°, vol. II, 2° sem., 1886); T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali*. (« Annali di Matematica », 1903, pp. 181-231). Nella ricerca del Boggio si esamina il caso (sotto alcuni riguardi notevole) che una delle due funzioni da noi denominate u e v sia identicamente nulla.

Nella dimostrazione del teorema non avremo necessariamente bisogno di supporre che le funzioni date u e v sian derivabili infinite volte: basterà che esse lo siano fino a quel massimo ordine (finito) che ci occorrerà di considerare.

Che la condizione (2) sia necessaria per l'esistenza di una funzione φ soddisfacente al sistema (1) si vede immediatamente: Supposto, difatti, che esista una tale funzione φ , si applichi ad ambo i membri della prima equazione del sistema (1) l'operatore B , e ad ambo i membri della seconda l'operatore A . Si ottiene

$$\begin{cases} BA\varphi = Bu \\ AB\varphi = Av. \end{cases}$$

Per il prodotto di due operatori a coefficienti costanti vige la proprietà commutativa (che sostanzialmente esprime il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione rispetto alle variabili indipendenti). Dall'identità dei primi membri delle precedenti equazioni segue l'eguaglianza dei secondi, e cioè la condizione (2).

Resta a dimostrare che la (2) è condizione sufficiente: allo scopo noi proveremo che, verificata la (2), risulta effettivamente possibile costruire delle funzioni φ soddisfacenti al sistema (1). Alla dimostrazione è necessaria la seguente premessa.

§ 1. — *Espressione di tutte le derivate di φ per mezzo di un numero determinato di esse.* — Supponiamo che esista una funzione φ soddisfacente al sistema (1). Proveremo allora che le equazioni (1) e le loro conseguenze differenziali consentono di esprimere tutte le derivate (di tale funzione φ) di ordine minore o eguale ad un prestabilito numero h , per mezzo di mn particolari di esse. S'intende che il numero h di cui si parla in questo enunciato dovrà esser scelto così grande che il numero delle derivate di ordine minore o eguale ad h superi, od almeno eguagli, il prodotto mn . Poichè le derivate (di ordine minore o eguale ad h) di una funzione di due variabili sono in numero di $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ (si hanno precisamente: 1 derivata di ordine zero, 2 derivate di prim'ordine, ..., $h+1$ derivate di ordine h) dovrà risultare

$$\frac{(h+1)(h+2)}{2} \geq mn.$$

Esaminiamo quali (e quante) equazioni possano scriversi fra le derivate di φ di ordine minore o eguale ad h .

Queste derivate dovranno, anzitutto, soddisfare alla prima delle equazioni (1), ed a tutte le conseguenze differenziali di tale equazione involgenti

derivate di ordine minore o eguale ad $h^{(1)}$. Siffatte conseguenze differenziali (e la prima delle (1) medesima) son del tipo

$$(3) \quad PA\varphi = P\psi,$$

P designando un generico operatore di ordine al massimo eguale ad $h - m$. Il numero delle equazioni (algebricamente) indipendenti del tipo (3) è eguale a quello degli operatori P (algebricamente indipendenti) di ordine al più eguale ad $h - m$, ossia ad $\frac{(h - m + 1)(h - m + 2)}{2}$.

Analogamente si vede che le derivate di φ di ordine minore o eguale ad h soddisfano ad $\frac{(h - n + 1)(h - n + 2)}{2}$ condizioni (indipendenti) del tipo

$$(4) \quad QB\varphi = Q\psi$$

provenienti dalla seconda equazione del sistema (1).

Le (3) e le (4) costituiscono altrettante equazioni lineari (a coefficienti costanti) cui devono soddisfare le derivate di φ di ordine minore o eguale ad h . Tali equazioni non sono però tutte mutuamente indipendenti. Esistono cioè delle combinazioni a coefficienti costanti fra le equazioni del tipo (3), identiche ad altre combinazioni lineari fra le equazioni del tipo (4). Quante sono queste relazioni identiche? Riflettiamo che ogni combinazione a coefficienti costanti fra le (3) è ancora un'equazione del medesimo tipo, dove però si consideri P come il più arbitrario operatore di ordine $h - m$. Ogni combinazione a coefficienti costanti fra le equazioni (4) è ancora, analogamente, una equazione tipo (4), dove però si consideri Q come il più arbitrario operatore di ordine $h - n$. Dunque: le combinazioni lineari delle (3), identiche a combinazioni lineari delle (4), sono tante quante sono le coppie di operatori P e Q (di ordini rispettivi $h - m$ ed $h - n$) soddisfacenti alla relazione

$$PA = QB.$$

Ma una tal relazione (dove A e B sono per ipotesi primi fra loro) può sussistere solo se P e Q son rispettivamente multipli di B e di A secondo un comune fattore K⁽²⁾:

$$P = KB, \quad Q = KA.$$

(1) Col nome di «conseguenze differenziali» di certe relazioni, intenderemo le altre relazioni che da quelle date si ottengono derivandole membro a membro un certo numero di volte; oppure le combinazioni lineari (a coefficienti costanti) di queste relazioni derivate.

(2) Si associ ad ogni operatore a coefficienti costanti, del tipo $A = \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial^r + s}{\partial x^r \partial y^s}$ il polinomio (caratteristico) $\bar{A} = \sum_{r,s} a_{rs} x^r y^s$. Si vede immediatamente che alle operazioni

L'ordine di questo fattore K sarà, al più, eguale ad $h - m - n$.

Fra le equazioni tipo (3) e le equazioni tipo (4) esistono dunque tante combinazioni lineari (indipendenti) identicamente verificate quanti sono gli operatori K (algebricamente indipendenti) di ordine al più eguale ad $h - m - n$.

Esistono cioè, nel gruppo delle (3) e delle (4), $\frac{(h-m-n+1)(h-m-n+2)}{2}$

equazioni che son conseguenze algebriche e lineari delle rimanenti. Il numero delle equazioni indipendenti del gruppo delle (3) e delle (4) è pertanto

$$\frac{(h-m+1)(h-m+2)}{2} + \frac{(h-n+1)(h-n+2)}{2} - \frac{(h-m-n+1)(h-m-n+2)}{2}$$

ossia

$$\frac{(h+1)(h+2)}{2} - mn.$$

Se indichiamo con S un sistema di $\frac{(h+1)(h+2)}{2} - mn$ equazioni algebricamente indipendenti estratte dal gruppo delle (3) e delle (4), possiamo concludere: le $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ derivate di φ di ordine minore o eguale ad h soddisfano ad un sistema S di $\frac{(h+1)(h+2)}{2} - mn$ equazioni lineari algebricamente indipendenti.

Il sistema S potrà risolversi rispetto ad $\frac{(h+1)(h+2)}{2} - mn$ particolari derivate. Rimane così dimostrato che le derivate di φ di ordine minore o eguale ad h si possono esprimere per mezzo di mn particolari di

(di somma e prodotto) fra due operatori corrispondono operazioni (di egual nome) fra i rispettivi polinomi caratteristici; sicchè il teorema di cui si fa uso nel testo equivale al seguente altro fra polinomi: Detti $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ quattro polinomi, se risulta

$$\bar{P}\bar{A} = \bar{Q}\bar{B},$$

ed è $\bar{A}$ primo con $\bar{B}$, è anche necessariamente

$$\bar{P} = \bar{K}\bar{B} \quad , \quad \bar{Q} = \bar{K}\bar{A},$$

$\bar{K}$ designando un nuovo polinomio. Il teorema equivale al seguente altro: Se il prodotto $\bar{P}\bar{A}$ di due polinomi è divisibile per un terzo polinomio $\bar{B}$, ed è $\bar{A}$ primo con $\bar{B}$, risulta necessariamente $\bar{P}$ divisibile per $\bar{A}$. Sotto questa forma, di solito, il teorema trovasi esposto nei trattati di Algebra (cfr. HEINRICH WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig, Vieweg, 1895, pp. 164-169).

esse. A queste mn particolari derivate si darà (con il Riquier⁽¹⁾) il nome di *derivate parametriche*.

Perchè certe mn derivate di φ possano assumersi come parametriche nel gruppo delle derivate di ordine minore o eguale ad h , occorre naturalmente che il sistema S sia di fatto risolubile rispetto alle rimanenti derivate; o, se si vuole, che sia differente da zero il determinante formato coi coefficienti (nel sistema S) delle derivate non parametriche. Questo determinante, d'altra parte, sarebbe eguale a zero quando (e soltanto quando) fosse possibile determinare una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle equazioni del sistema S , nella quale comparissero solo derivate parametriche. Possiam dunque affermare: mn particolari derivate di ordine minore o eguale ad h potranno riguardarsi come parametriche ogni qualvolta nel gruppo delle conseguenze differenziali delle (1), di ordine minore o eguale ad h , non sia compresa alcuna che interessi esclusivamente le mn derivate prescelte.

Esistono dei gruppi di mn derivate della funzione φ soddisfacenti alla condizione che fra le derivate di uno di questi gruppi non stabiliscono alcun vincolo nè le equazioni (1) nè le loro conseguenze differenziali di qualunque ordine⁽²⁾. Indichiamo con $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$ le derivate appartenenti a uno di questi gruppi. In funzione di $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$ saranno esprimibili le derivate di tutti gli ordini della funzione φ .

§ 2. — *Sistema di differenziali totali che sostituisce il sistema proposto.* — Saranno, in particolare, esprimibili per mezzo di $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$ la derivata di ordine nullo di φ (e cioè la φ medesima) e le derivate (rispetto ad x e rispetto ad y) di $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$. In simboli si avrà:

$$(5) \quad \varphi = f_0(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + F_0(x, y)$$

(1) Cfr. CH. RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Paris, Gauthier-Villars, 1910, p. 121.

(2) Uno di questi gruppi è il seguente:

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{mn-1} \varphi}{\partial x^{mn-1}}.$$

Vale, a provarlo, la seguente considerazione: L'eliminazione della variabile y fra due polinomi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ (primi fra loro e di gradi rispettivi m ed n) porta ad un polinomio in x di grado mn . Se ne conclude che ogni combinazione del tipo $\bar{P}\bar{A} + \bar{Q}\bar{B}$ (dove $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ son nuovi polinomi) contenente la sola variabile x , è certo di grado eguale o superiore ad mn . Val quanto dire che ogni operatore $\bar{P}A + \bar{Q}B$ il quale contenga derivate rispetto alla sola variabile x , è di ordine eguale o superiore ad mn . Non può, pertanto, esistere alcuna conseguenza differenziale delle equazioni $A\varphi = u, B\varphi = v$ la quale rivolga esclusivamente le derivate

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{mn-1} \varphi}{\partial x^{mn-1}}.$$

$$(6) \quad i = \begin{cases} \frac{\partial p_i}{\partial x} = f_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + F_i(x, y) \\ \frac{\partial p_i}{\partial y} = g_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + G_i(x, y) \end{cases}$$

$$(7) \quad i = 1, 2, \dots, mn$$

dove le f_i , le g_i , le F_i e le G_i ($i = 0, 1, 2, \dots, mn$) sono funzioni note dei loro argomenti. Le f_i e le g_i , in particolare, sono forme (lineari, a coefficienti costanti) negli argomenti $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$.

Le (6) e le (7) costituiscono un sistema di equazioni ai differenziali totali. Ora noi proveremo:

1° che esistono delle funzioni $p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_{mn}(x, y)$ soddisfacenti al sistema (6), (7); e che cioè quest'ultimo è « illimitatamente integrabile ».

2° che, una volta ottenute dal sistema (6), (7) le funzioni $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$, la funzione $\varphi(x, y)$ ricavabile colla formula (5) effettivamente soddisfa alle equazioni (1) proposte.

Cominciamo dal primo punto: Se si derivano membro a membro le equazioni (6) rispetto ad y , e poi si sostituiscono, in luogo delle derivate $\frac{\partial p_1}{\partial y}, \frac{\partial p_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial p_{mn}}{\partial y}$ che vengono a comparire nei secondi membri, le espressioni che per tali derivate si ricavano dalle equazioni (7), si ottengono, per le derivate seconde $\frac{\partial^2 p_i}{\partial x \partial y}$ certe espressioni del tipo

$$(8) \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial x \partial y} = f'_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + F'_i(x, y).$$

Ricavando invece le stesse derivate seconde dalle equazioni (7) (derivate rispetto ad x) si perviene ad altre espressioni del tipo

$$(9) \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial x \partial y} = f''_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + F''_i(x, y).$$

Per l'« illimitata integrabilità » del sistema (6), (7) è necessario e sufficiente⁽¹⁾ che risultino rispettivamente identiche le espressioni (8) e (9); che cioè separatamente risulti

$$f'_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) \equiv f''_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) \quad \text{ed} \quad F'_i(x, y) \equiv F''_i(x, y).$$

(1) Cfr. A. MAYER, *Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen*. (« Mathematische Annalen », 1872, pp. 448-470).

Nel caso nostro queste identità sono certo verificate. Notiamo, difatti, che da (8) e (9) si ha per differenza

$$(10) \quad f'_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) - f''_i(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + F'_i(x, y) - F''_i(x, y) = 0.$$

Se fosse (per uno o più valori dell'indice i) $f'_i \neq f''_i$, la (10) costituirebbe (per le funzioni $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$) un legame dedotto (con operazioni di derivazione, moltiplicazione per costanti, e somma) dalle equazioni (1) proposte. Un siffatto legame non può sussistere per il modo stesso come sono state scelte e definite le funzioni $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$. Le funzioni f'_i coincidono pertanto necessariamente con le funzioni f''_i ; e le (10) si riducono alla forma

$$(11) \quad F'_i(x, y) - F''_i(x, y) = 0.$$

Le (11) costituiscono delle relazioni (ottenute dal sistema (1) con operazioni di derivazione, moltiplicazione per costanti e somma) nelle quali manca ogni traccia della funzione φ o delle sue derivate. D'altra parte tutte le relazioni ottenibili dalle (1) con le operazioni di derivazione, moltiplicazione per costanti e somma, sono del tipo

$$(12) \quad (PA + QB)\varphi - (Pu + Qv) = 0$$

(P e Q designando due operatori qualsiansi). Se si vuole che nella (12) manchi traccia della φ e delle sue derivate è necessario che risulti $PA = -QB$, ossia (per un'osservazione ricordata in precedenza) $P = -KB$, $Q = KA$ (K designando un nuovo operatore). Con queste espressioni di P e Q la (12) assume l'aspetto

$$(12') \quad K(Bu - Av) = 0.$$

La (11) è necessariamente una relazione del tipo, (12'). Se è soddisfatta la condizione (2) di compatibilità, la (12') e quindi la (11) sono identicamente verificate.

Dimostrato che il sistema (6), (7) è illimitatamente integrabile, e che quindi si possono determinare delle funzioni $p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_{mn}(x, y)$ che lo soddisfano, resta a provare che la funzione $\varphi(x, y)$ ottenuta con la (5) effettivamente verifica le equazioni differenziali proposte. Cominceremo, allo scopo, con l'osservare che dalle (5), (6), (7) e loro conseguenze differenziali è possibile ricavare tutte le derivate di φ in funzione di $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$. Così, ad es., se si volesse ricavare l'espressione di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ basterebbe derivare rispetto ad x ambo i membri della (5), e poi sostituire, in luogo delle derivate $\frac{\partial p_1}{\partial x}, \frac{\partial p_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial p_{mn}}{\partial x}$ che verrebbero a comparire a

secondo membro, le espressioni che per tali derivate si ricavano dalle (6); in modo analogo si ricaverebbero le espressioni di $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e di tutte le altre successive derivate.

Sostituiamo nella prima delle equazioni (1), in luogo delle diverse derivate di cui si compone il primo membro $A\varphi$, le loro espressioni in funzione di $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$. A sostituzione eseguita la prima delle (1) si ridurrà a una relazione del tipo

$$f(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) + g(x, y) = 0.$$

Con lo stesso ragionamento già fatto in precedenza per dimostrare l'identico annullarsi della (10), si prova che è identicamente

$$f(p_1, p_2, \dots, p_{mn}) \equiv 0 \quad \text{e} \quad g(x, y) \equiv 0.$$

§ 3. - *Conclusione.* — Siamo ora in grado di enunciare il teorema che forma l'oggetto di questa Nota: *Il sistema differenziale proposto sotto la condizione (2) di compatibilità, è riconducibile a un sistema ai differenziali totali e coefficienti costanti. Una volta determinate (cioè che si fa con operazioni di quadratura) le funzioni incognite ($p_1, p_2, \dots, p_{mn}$) di un tale sistema ai differenziali totali, la funzione φ richiesta immediatamente si ottiene (v. formula (5)) con sole operazioni algebriche. La funzione φ risulta univocamente determinata (in ogni regione semplicemente connessa del piano) appena si prestabiliscano i valori che (in un dato punto della regione) devono assumere le $p_1, p_2, \dots, p_{mn}$ (le quali coincidono con certe mn particolari derivate della φ).*

Matematica. — *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale.* Nota di C. TOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. INTRODUZIONE. — Nelle applicazioni a casi concreti delle equazioni gravitazionali di Einstein, occorre prepararsi l'espressione esplicita del tensore G_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) di Ricci-Einstein. Non c'è di mezzo che un calcolo materiale, essendo gli elementi del tensore in questione combinazioni lineari dei simboli di Riemann, e questi ultimi funzioni razionali dei coefficienti del ds^2 e loro derivate prime e seconde. La forma semplificata, che assumono i simboli di Riemann, quando il ds^2 è riferito a coordinate ortogonali, si trova in molti trattati ⁽²⁾ nell'ipotesi, consueta in geometria differenziale e in meccanica classica, che la forma quadratica ds^2 sia definita.

Non mi consta che siano state dedotte, in modo da poter seguire comodamente i singoli passaggi, le formule che danno le componenti G_{ik} per un cronotopo relativistico, riferito a coordinate ortogonali. Tale è l'oggetto della presente Nota. Come caso particolare si ricavano le G_{ik} per un ds^2 della forma

$$(1) \quad ds^2 = V^2 dx_0^2 - H^2 dl_0^2,$$

dove dl_0 è l'elemento lineare in coordinate cartesiane di uno spazio tridimensionale euclideo; e poi si specializza ulteriormente, supponendo che V ed H dipendano, in modo qualunque da x_0 , ma dal posto soltanto pel tramite del raggio vettore ρ . La forma (1), con V e H funzioni soltanto di x_0 e di ρ , corrisponde, come è noto ⁽³⁾, all'ipotesi di completa simmetria (geometrica e cinematica) attorno ad un punto ben determinato O , che si assume come origine degli assi cartesiani, cui è riferito il dl_0^2 .

In una prossima Nota mi varrò delle formule qui stabilite per lumeggiare alcuni aspetti dell'universo in espansione (Friedmann-Lemaître-De Sitter).

2. SIMBOLI DI CHRISTOFFEL PER UN GENERICO ds^2 ORTOGONALE. — Un generico ds^2 (definito o no), in $n + 1$ variabili, quando comporti coordinate ortogonali e sia ad esse riferito, ha la forma

$$(2) \quad ds^2 = \sum_1^n e_i H_i^2 dx_i^2,$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) Cfr. per es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Bologna, Zanichelli, 3^a ed., vol. II, parte II, p. 433.

(3) Cfr. per es. T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. Bologna, Zanichelli, 1928, p. 139.

dove le e_l possono assumere i soli valori $+1$ e -1 , e le H_l sono funzioni reali *a priori* arbitrarie delle variabili.

Per il nostro calcolo ci occorrono anzitutto i simboli di Christoffel. Possiamo evitare la materiale e laboriosa sostituzione nella loro espressione di definizione, ricordando che, se t è un parametro qualsiasi di cui le coordinate x si possano riguardare come funzioni, e poniamo

$$T = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \sum_0^n e_l H_l^2 \dot{x}_l^2,$$

le equazioni lagrangiane

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r} - \frac{\partial T}{\partial x_r} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n),$$

risolte rispetto alle $\ddot{x}_r$, divengono

$$(4) \quad \ddot{x}_r + \sum_0^n \Gamma_{il}^r \dot{x}_i \dot{x}_l = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n),$$

dove le Γ_{il}^r denotano appunto i simboli di Christoffel di seconda specie relativi al ds^2 (2).

Esplicitando le (3) si ha

$$e_r H_r^2 \ddot{x}_r + 2 \sum_0^n e_r H_r \frac{\partial H_r}{\partial x_l} \dot{x}_r \dot{x}_l - \sum_0^n e_l H_l \frac{\partial H_l}{\partial x_r} \dot{x}_l^2 = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n),$$

donde, dividendo per $e_r H_r^2$ e notando che, in ogni caso, $\frac{1}{e_r} = e_r$,

$$\ddot{x}_r + 2 \sum_0^n \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_l} \dot{x}_r \dot{x}_l - \sum_0^n e_l e_r \frac{H_l}{H_r^2} \frac{\partial H_l}{\partial x_r} \dot{x}_l^2 = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n),$$

che, confrontate colle (4), danno

$$(5) \quad \begin{cases} \Gamma_{il}^r = 0 & \text{per } i \neq l, i \neq r, l \neq r; \quad \Gamma_{ii}^r = -e_i e_r \frac{H_i}{H_r^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} & \text{per } i \neq r; \\ \Gamma_{ri}^r = \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i}, & \text{sia per } i \neq r & \text{che per } i = r, \end{cases}$$

3. SIMBOLI DI RIEMANN E TENSORE G_{ik} PER UN GENERICO ds^2 ORTOGONALE. — Dei simboli di Riemann calcoleremo solo quelli di seconda specie del tipo particolare $R'_{i,rk}$, che sono sufficienti per la deduzione delle G_{ik} . Per definizione è

$$R'_{i,rk} = \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x_r} - \sum_0^n (\Gamma_{lr}^r \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lk}^r \Gamma_{ir}^l).$$

Attesa l'emisimmetria delle $R_{i,rk}^r$ rispetto agli ultimi due indici, se $k = r$ il simbolo corrispondente è nullo. Esso è nullo altresì per $i = r$, ove si tenga conto di $R_{i,rk}^r = \frac{e_r}{H_r^2} R_{ir,rk}$ e dell'emisimmetria delle componenti covarianti anche rispetto ai primi due indici.

Basta dunque considerare i casi in cui r è diverso tanto da i , quanto da k . Per $i = k \neq r$ si ha, in base alle (5),

$$R_{i,ri}^r = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \right) + e_i e_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{H_i}{H_r^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} \right) + \sum_0^n {}^{(ir)} l \left(\frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_l} e_i e_l \frac{H_i}{H_l^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_l} \right) - \\ - \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_i} - e_i e_r \frac{H_i}{H_r^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} + \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_r} e_i e_r \frac{H_i}{H_r^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} + \left(\frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \right)^2,$$

dove $\sum_0^n {}^{(ir)}$ significa che nella somma rispetto ad l vanno esclusi gli indici i, r . Semplificando opportunamente il secondo membro, si può scrivere

$$(6) \quad R_{i,ri}^r = \frac{1}{H_r} \frac{\partial^2 H_r}{\partial x_i^2} - \frac{1}{H_i H_r} \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} + e_i e_r \frac{H_i}{H_r^2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_r^2} - e_i e_r \frac{H_i}{H_r^3} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_r} + \\ + e_i \frac{H_i}{H_r} \sum_0^n {}^{(ir)} e_l \frac{1}{H_l^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_l} \frac{\partial H_r}{\partial x_l},$$

ovvero, sotto forma più concisa,

$$(6') \quad R_{i,ri}^r = \frac{H_i}{H_r} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \right) + e_i e_r \frac{H_i}{H_r} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{1}{H_r} \frac{\partial H_i}{\partial x_r} \right) + e_i \frac{H_i}{H_r} \sum_0^n {}^{(ir)} e_l \frac{1}{H_l^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_l} \frac{\partial H_r}{\partial x_l}.$$

Se i tre indici i, k, r sono tutti diversi, si trova analogamente

$$(7) \quad R_{i,rk}^r = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_k} \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} - \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_r}{\partial x_k} \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \\ = \frac{1}{H_r} \frac{\partial^2 H_r}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{H_r H_i} \frac{\partial H_r}{\partial x_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{1}{H_r H_k} \frac{\partial H_r}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i}.$$

In quanto al tensore G_{ik} , la sua espressione si deduce immediatamente da

$$G_{ik} = \sum_r^n R_{i,rk}^r,$$

notando in primo luogo che il termine generale del sommatorio si annulla quando ad r si attribuiscono i valori di i o k , cosicchè rimane

$$(8) \quad G_{ik} = \sum_0^n {}^{(ik)} R_{i,rk}^r,$$

in cui si devono introdurre i valori (6) o (7), secondochè k coincide o no con i .

4. TENSORE G_{ik} PER IL PARTICOLARE ds^2 ORTOGONALE (1). — Cominciamo ad occuparci delle G_{ik} ad indici diversi da zero.

La (6), applicata una volta al ds^2 (1), cioè con $e_0 = 1$, $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $H_0 = V$, $H_1 = H_2 = H_3 = H$, ed un'altra volta alla forma $dl'^2 = H^2 dl_0^2$, cioè con $e_1 = e_2 = e_3 = 1$, $H_1 = H_2 = H_3 = H$, ci dice che, se si contraddistinguono con un apice i simboli relativi a quest'ultima, è, per i, r diversi da zero e fra loro,

$$R_{i,ri}^r = R_{i,ri}^{r'} - \frac{\dot{H}^2}{V^2},$$

dove il punto denota derivazione rispetto ad x_0 .

Analogamente, per i, k, r diversi da zero e fra loro, si ha dalla (7)

$$R_{i,rk}^r = R_{i,rk}^{r'}.$$

Ciò tenendo presente, la (8) dà, se $i = k \neq 0$,

$$G_{ii} = \sum_r^{(i)} R_{i,ri}^{r'} - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} + R_{i,oi}^o = G_{ii}' - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} + R_{i,oi}^o,$$

e, se $i \neq k$, $i \neq 0$, $k \neq 0$,

$$G_{ik} = \sum_r^{(ik)} R_{i,rk}^{r'} + R_{i,ok}^o = G_{ik}' + R_{i,ok}^o.$$

Si presenta dunque un duplice calcolo: calcolo del tensore G_{ik}' relativo al dl'^2 e calcolo delle $R_{i,ok}^o$.

Ricordiamo che, per ipotesi, V ed H dipendono (oltre che da x_0) da una sola coordinata di spazio, la distanza ρ dal punto ben determinato O , assunto come origine delle coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 , alle quali è riferito il dl_0^2 . Ne segue che, anche di fronte al ds^2 , tutti i punti equidistanti da O si devono comportare nello stesso modo, talchè basta occuparsi di uno solo di essi, situato ad es. sull'asse delle x_1 , cioè di coordinate $x_1 = \rho$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Le derivate di una funzione, come H , solo di x_0 e ρ , che in punti generici sono, per i, k diversi fra loro e da zero,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = H' \frac{x_i}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} = H'' \frac{x_i^2}{\rho^2} + \frac{H'}{\rho} \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2} \right), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = H'' \frac{x_i x_k}{\rho^2} - H' \frac{x_i x_k}{\rho^3},$$

quando siano prese in un punto di coordinate $x_1 = \rho$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,
divengono

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_1} = H' & , & \frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = H'' & , & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} = \frac{H'}{\rho} & , & \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \end{cases}$$

dove gli apici denotano derivazione rispetto a ρ . Formule completamente analoghe valgono per le derivate di V .

Da (6), (7), (8) applicate a $dl^2 = H^2 d\rho^2$, cioè per $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ e $H_1 = H_2 = H_3 = H$, si ha, tenendo presente le (9),

$$G'_{11} = 2 \left(\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} + \frac{H'}{H\rho} \right) \quad , \quad G'_{22} = G'_{33} = \frac{H''}{H} + 3 \frac{H'}{H\rho} ,$$

e, se $i \neq k$,

$$G'_{ik} = 0 .$$

Le (6), (7) applicate al ds^2 (1), cioè per $e_0 = 1$, $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ e $H_0 = V$, $H_1 = H_2 = H_3 = H$, tenendo presente le (9), danno

$$\begin{aligned} R^0_{1,01} &= \frac{V''}{V} - \frac{H'V'}{HV} - \frac{H\ddot{H}}{V^2} + \frac{H\dot{H}\dot{V}}{V^3} = \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V'}{H} \right) - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right), \\ R^0_{2,02} = R^0_{3,03} &= \frac{V'}{V\rho} - \frac{H\ddot{H}}{V^2} + \frac{H\dot{H}\dot{V}}{V^3} + \frac{H'V'}{HV} = \frac{V'}{V\rho} + \frac{H'V'}{HV} - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right), \\ R^0_{i,0k} &= 0 \quad \text{per} \quad i \neq k, \quad i \neq 0, \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

Possiamo ora dare le espressioni delle G_{ik} ad indici diversi da zero:

$$(10) \quad \begin{cases} G_{11} = 2 \left(\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} + \frac{H'}{H\rho} \right) - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} + \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V'}{H} \right) - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right), \\ G_{22} = G_{33} = \frac{H''}{H} + 3 \frac{H'}{H\rho} - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} + \frac{V'}{V\rho} + \frac{H'V'}{HV} - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right), \\ G_{ik} = 0 & \text{se} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Ci restano da calcolare le componenti G_{01} , G_{02} , G_{03} , G_{00} . Si ha per le prime tre, da (7), (8) applicate al ds^2 (1), tenendo conto delle (9),

$$(11) \quad \begin{cases} G_{01} = R^0_{0,21} + R^0_{0,31} = 2 \left(\frac{\dot{H}'}{H} - \frac{\dot{H}V'}{HV} - \frac{H'\dot{H}}{H^2} \right), \\ G_{02} = G_{03} = 0; \end{cases}$$

e per G_{00} , da (8),

$$G_{00} = \sum_r R_{0,r,0}^r = \sum_r \frac{\ell_r}{H_r^2} R_{0r,0}^r = \sum_r \frac{\ell_r}{H_r^2} R_{r0,0}^r = \sum_r \ell_0 \frac{H_0^2}{H_r^2} R_{r,0}^r,$$

ossia, se si introducono al posto delle $R_{r,0}^r$ le già calcolate espressioni spettanti al ds^2 (1),

$$(12) \quad G_{00} = -\frac{V^2}{H^2} (R_{1,01}^0 + 2 R_{2,02}^0) = -\frac{V^2}{H^2} \left\{ \frac{V''}{V} + \frac{H' V'}{H V} + 2 \frac{V'}{V \rho} - 3 \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right) \right\}.$$

Diamo qui da ultimo anche l'espressione dell'invariante lineare del tensore G_{ik} , che è

$$(13) \quad G = \sum_{ik} g^{ik} G_{ik} = \frac{1}{V^2} G_{00} - \frac{1}{H^2} (G_{11} + 2 G_{22}) = \frac{1}{V^2} G_{00} - \\ - \frac{1}{H^2} (G'_{11} + 2 G'_{22}) + \frac{6}{H^2} \frac{\dot{H}^2}{V^2} = -\frac{2}{H^2} \left\{ \frac{V''}{V} + \frac{H' V'}{H V} + 2 \frac{V'}{V \rho} - 3 \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right) \right\} - \\ - \frac{2}{H^2} \left(2 \frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} + 4 \frac{H'}{H \rho} \right) + \frac{6}{H^2} \frac{\dot{H}^2}{V^2}.$$

5. ALTRA FORMA DELLE G_{ik} PER LO STESSO ds^2 . — Può convenire talvolta (non sempre), allo scopo di ottenere formule più semplici, di eseguire la sostituzione

$$V = e^v, \quad H = e^h,$$

che comporta per le derivate della H le relazioni

$$H' = H h', \quad H'' = H(h'' + h'^2); \quad \dot{H} = H \dot{h},$$

$$\ddot{H} = H(\ddot{h} + \dot{h}^2); \quad \dot{H}' = H(\dot{h}' + \dot{h} h');$$

e relazioni analoghe per le derivate della V .

Con tale sostituzione, le nuove espressioni delle G_{ik} sono

$$(10') \quad \begin{cases} G_{11} = 2 \left(h'' + \frac{h'}{\rho} \right) + v'' + v'^2 - v' h' - e^{2h-2v} (\ddot{h} + 3 \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}), \\ G_{22} = G_{33} = h'' + h'^2 + 3 \frac{h'}{\rho} + \frac{v'}{\rho} + v' h' - e^{2h-2v} (\ddot{h} + 3 \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}), \\ G_{ik} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq k, i \neq 0, k \neq 0; \end{cases}$$

e per le G_{ik} con uno o due indici uguali a zero

$$(11') \quad G_{01} = 2(\dot{h}' - \dot{h} v'), \quad G_{02} = G_{03} = 0;$$

e

$$(12') \quad G_{00} = -e^{2v-2h} \left(v'' + v'^2 + v' h' + 2 \frac{v'}{\rho} \right) + 3(\ddot{h} + \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}).$$

Infine per l'invariante lineare G

$$(13') \quad G = -2e^{-2h} \left(v'' + v'^2 + v' h' + 2 \frac{v'}{\rho} \right) + 6e^{-2v} (\ddot{h} + 2\dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}) - \\ - 2e^{-2h} \left(2h'' + h'^2 + 4 \frac{h'}{\rho} \right).$$

Matematica. — *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* II. *Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.* Nota di F. TRICOMI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. L'ufficio principale delle formule (6)-(8) o (6')-(8') della Nota I⁽²⁾ è quello di servire per l'inversione della trasformazione di Laplace. Esse possono però venir anche utilizzate per desumere da note formule sulla trasformazione di Laplace e da classici sviluppi in serie di potenze, nuovi sviluppi in serie di polinomi di Laguerre, classici o generalizzati, non così facilmente ottenibili per altre vie.

Per mostrare un elegante esempio di tali sviluppi possiamo servirci addirittura della (4') donde, dividendo ambo i membri $\Gamma(\alpha + n + 1)$ e sommando da $n = 0$ a ∞ , con una lecita integrazione termine a termine, si trae

$$\mathcal{L} \left[l^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} \left[\frac{l^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] = \\ = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n = \frac{e}{s^{\alpha+1}} e^{-\frac{1}{s}},$$

ma, per una nota formula⁽³⁾, è

$$\frac{k^\nu}{2^\nu s^{\nu+1}} e^{-\frac{k^2}{4s}} = \mathcal{L} \left[t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(k\sqrt{t}) \right]$$

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(2) Ved. questo stesso volume dei «Rendiconti», p. 232.

(3) G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions.* (Cambridge, 1922), p. 394.

dove k è un numero reale qualsiasi e J_ν denota la *funzione di Bessel di ordine* ν ; dunque, ponendo $k = 2$, $\nu = \alpha$ avremo che

$$\frac{1}{s^{\alpha+1}} e^{-\frac{1}{s}} = \mathcal{L}\left[t^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{t})\right],$$

eperò, pel teorema di Lerch, sarà:

$$(II) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} = e t^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{t}), \quad (\alpha > -1).$$

Da questa nuova, elegante formula sulle funzioni di Bessel si ha in particolare, per $\alpha = 0$:

$$(II^*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t}),$$

mentre per $\alpha = 1/2$, tenuto conto che allora $J(x)$ degenera nella funzione elementare

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

si ha la formula, che anche credo nuova:

$$(12) \quad \frac{\sin(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n L_n^{(\frac{1}{2})}(t)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)},$$

2. La (4') può utilmente esser posta a confronto con le formule di Doetsch ⁽¹⁾ sulle trasformate di Laplace dei *polinomi di Hermite* H_n che, definendo ⁽²⁾ questi mediante l'uguaglianza:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right),$$

(1) *Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome*. « Mathem. Zeitschr. », 32 (1930).

(2) I polinomi di Hermite del Doetsch, che indicheremo per un momento con $\bar{H}_n$, corrispondono ad una definizione un po' diversa. Essi sono legati a quelli qui usati dalla uguaglianza:

$$H_n(x) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right)^n \bar{H}_n \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

assumono la forma:

$$\mathcal{L}[H_{2n+1}(\sqrt{2t})] = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{n+\frac{1}{2}} n!} \sqrt{\pi} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n,$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{H_{2n}(\sqrt{2t})}{\sqrt{t}}\right] = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n.$$

Propriamente si hanno così le formule:

$$\mathcal{L}[H_{2n+1}(\sqrt{2t})] = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\pi} \mathcal{L}\left[t^{\frac{1}{2}} L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\right],$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{H_{2n}(\sqrt{2t})}{\sqrt{t}}\right] = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\pi} \mathcal{L}\left[t^{-\frac{1}{2}} L_n^{\left(\frac{-1}{2}\right)}(t)\right]$$

donde, sempre pel teorema di Lerch, si traggono le seguenti interessanti identità, già scoperte, per altra via, da Szegő⁽¹⁾:

$$(13) \quad \frac{H_{2n+1}(\sqrt{2t})}{\sqrt{2t}} = (-2)^n n! L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t), \quad H_{2n}(\sqrt{2t}) = (-2)^n n! L_n^{\left(\frac{-1}{2}\right)}(t).$$

In particolare dalla (12) e dalla prima delle (13) può desumersi il seguente semplice sviluppo della funzione seno in serie di polinomi di Hermite:

$$(14) \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{H_{2n+1}(x/\sqrt{2})}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$$

che non credo sia stato finora osservato.

3. Un'altra interessante conseguenza della (4') e del teorema di Horn, che asserisce che se si ha

$$\mathcal{L}[F(t)] = \mathcal{L}[F_1(t)] \mathcal{L}[F_2(t)]$$

allora è

$$F(t) = F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau,$$

(1) Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome « Mathem. Zeitschr. », 25 (1926), p. 112.

è un teorema di addizione trascendente (secondo la nomenclatura introdotta da Doetsch) per i polinomi di Laguerre $L_n^{(\alpha)}$. Invero, essendo manifestamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)] \mathcal{L}[t^\beta L_m^{(\beta)}(t)] &= \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \frac{\Gamma(\beta + m + 1)}{m!} \frac{1}{s^{\alpha + \beta + 2}} \left(\frac{s-1}{s} \right)^{m+n} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + m + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + m + n + 2)} \binom{m+n}{n} \mathcal{L}[t^{\alpha + \beta + 1} L_{m+n}^{(\alpha + \beta + 1)}(t)], \end{aligned}$$

se ne deduce subito che, posto per abbreviare:

$$\frac{n!}{\Gamma(\alpha + n + 1)} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t) = \Lambda(\alpha, n, t),$$

è

$$(15) \quad \Lambda(\alpha, n, t) * \Lambda(\beta, m, t) = \Lambda(\alpha + \beta + 1, m + n, t).$$

Con analoghi metodi si trova pure che

$$(16) \quad \Lambda(\alpha + \beta + 1, v, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \Lambda(\alpha, v, t) * t^\beta$$

donde, ponendo $v = m + n$ e confrontando con la (15), si trae l'altra formula:

$$(17) \quad \Lambda(\alpha, n, t) * \Lambda(\beta, m, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \Lambda(\alpha, m + n, t) * t^\beta.$$

In particolare per $\alpha = \beta = 0$ si ha la formula semplicissima:

$$(18) \quad \boxed{L_n(t) * L_m(t) = L_{m+n}(t) * 1}$$

che, scritta sotto forma più esplicita, diviene:

$$(18^*) \quad \int_0^t L_n(\tau) L_m(t - \tau) d\tau = \int_0^t L_{m+n}(\tau) d\tau.$$

Matematica. — *Sugli asintoti d'una curva algebrica piana in relazione alla teoria dei diametri.* Nota di M. PIAZZOLLA-BELOCH, presentata dal Socio A. DI LEGGE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla convergenza quasi continua di successioni di funzioni.* Nota di J. REY PASTOR, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sugli esponenti caratteristici di una configurazione d'equilibrio di un sistema dissipativo*⁽¹⁾. Nota di R. EINAUDI, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. La stabilità o l'instabilità di una configurazione di equilibrio di un sistema meccanico si può generalmente dedurre dalla posizione che gli esponenti caratteristici, relativi a quella configurazione, hanno nel piano complesso⁽³⁾.

Ed invero, se il sistema è soggetto esclusivamente a forze conservative, una configurazione di equilibrio è stabile, sia nel passato che nel futuro, se i suoi esponenti caratteristici sono immaginari puri, e instabile se almeno uno di essi è positivo. Se invece il sistema è soggetto, oltre che a forze conservative, ad azioni dissipative ed eventualmente ad azioni girostatiche, una configurazione di equilibrio è stabile nel futuro se tutti i suoi esponenti caratteristici hanno parte reale negativa, e instabile se almeno uno di essi è a parte reale positiva.

Ora è noto che, se il sistema è soggetto esclusivamente a forze conservative, i quadrati degli esponenti caratteristici coincidono coi coefficienti della forma quadratica, canonizzata, che rappresenta il potenziale nell'intorno della configurazione di equilibrio; per modo che l'esame della stabilità o della instabilità viene ricondotto in questo caso all'esame di una semplice forma quadratica.

Molto più complesso è invece, a prima vista, lo studio della stabilità o della instabilità nel caso dissipativo, inquanto l'esame della parte reale degli esponenti caratteristici implica la considerazione dei determinanti di Hurwitz, formati coi coefficienti dell'equazione algebrica cui soddisfano gli esponenti caratteristici stessi.

Orbene in questa Nota mi propongo di dimostrare che, se le forze dissipative dipendono da una funzione dissipativa definita positiva (circostanza necessariamente verificata nei problemi dinamici), la considerazione dei determinanti di Hurwitz può essere evitata, in quanto la posizione che gli esponenti caratteristici hanno nel piano complesso, in presenza di forze dissipative ed eventualmente di azioni girostatiche, può dedursi immediatamente, una

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo in Roma.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, cap. VI, p. 674.

volta nota la posizione che essi hanno sotto l'azione delle sole forze conservative.

§ 2. Consideriamo un sistema a n gradi di libertà, e indichiamo con $q_1 \cdots \dot{q}_n$ le coordinate Lagrangiane generalizzate. Supponiamo che il sistema sia sottoposto a forze conservative derivanti da un potenziale U , a forze dissipative caratterizzate da una funzione dissipativa F , e ad azioni di tipo girostatico provenienti da ignorazione di coordinate cicliche. Supponiamo che inoltre la configurazione $q_1 = 0 \cdots q_n = 0$ sia una configurazione di equilibrio, per modo che nell'intorno di essa il potenziale U , l'energia cinetica T e la funzione dissipativa F siano rappresentabili nella forma:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = -\frac{1}{2} \sum_{i,k}^n a_{ik} q_i q_k \\ T = T_2 + T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_i^n \left(B_i + \sum_k^n B_{ik} q_k \right) \dot{q}_i \\ F = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n c_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \end{array} \right.$$

essendo T_2 ed F due forme quadratiche nelle $\dot{q}_i$ entrambe definite positive.

Le equazioni di Lagrange nell'intorno della configurazione considerata assumono di conseguenza la forma:

$$(2) \quad \sum_k^n (b_{ik} \ddot{q}_k + (c_{ik} + e_{ik}) \dot{q}_k + a_{ik} q_k) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

essendo

$$(2') \quad e_{ik} = B_{ik} - B_{ki}.$$

Si procede all'integrazione del sistema (2), cercando delle soluzioni del tipo:

$$(3) \quad q_i = u_i e^{\lambda t}$$

per il che occorre che le u_i soddisfino il sistema di equazioni algebriche

$$(4) \quad \sum_k^n (b_{ik} \lambda^2 + (c_{ik} + e_{ik}) \lambda + a_{ik}) u_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

che ammette soluzioni diverse da zero solo e quando le λ sono radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} b_{11} \lambda^2 + c_{11} \lambda + a_{11} & b_{12} \lambda^2 + (c_{12} + e_{12}) \lambda + a_{12} & \cdots & b_{1n} \lambda^2 + (c_{1n} + e_{1n}) \lambda + a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} \lambda^2 + (c_{n1} + e_{n1}) \lambda + a_{n1} & b_{n2} \lambda^2 + (c_{n2} + e_{n2}) \lambda + a_{n2} & \cdots & b_{nn} \lambda^2 + c_{nn} \lambda + a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione (5) sono gli *esponenti caratteristici* relativi alla configurazione di equilibrio considerata.

Cominciamo a supporre il sistema sottratto alle azioni dissipative e girostatiche. Il sistema (4) si riduce a

$$(6) \quad \sum_k^n (b_{ik} \lambda^2 + a_{ik}) u_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

e l'equazione (5) assume la forma:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} b_{11} \lambda^2 + a_{11} & b_{12} \lambda^2 + a_{12} & \dots & b_{1n} \lambda^2 + a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} \lambda^2 + a_{n1} & b_{n2} \lambda^2 + a_{n2} & \dots & b_{nn} \lambda^2 + a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Indichiamo con σ_q^2 le n radici λ^2 (semplici o multiple) dell'equazione (7) che, come si dimostra facilmente, sono tutte reali. In corrispondenza ad esse le (6) ammettono n sistemi di soluzioni *reali* indipendenti $u_i^{(q)}$ e queste soluzioni possono essere scelte in modo (univoco nel caso che tutte le σ_q^2 siano distinte) che siano soddisfatte le seguenti condizioni di ortonormalità:

$$(8) \quad \sum_i^n b_{ik} u_i^{(q)} u_k^{(\tau)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho = \tau \\ 0 & \text{se } \rho \neq \tau. \end{cases}$$

Supponiamo che dei $2n$ valori di σ_q (due a due eguali ed opposti), $2r$ siano nulli, $2q$ immaginari puri, e $2p$ reali; la configurazione studiata ammette allora p gradi di instabilità. Indichiamo con $\pm i\sigma_{r+1} \dots \pm i\sigma_{r+q}$ i valori immaginari puri di σ_q e con $\pm \sigma_{r+q+1} \dots \pm \sigma_n$ i valori reali di σ_q .

Immaginiamo ora, fissi restando T_2 ed U , di far variare con continuità i coefficienti c_{ik} ed e_{ik} dal valore zero a certi valori prefissati, in modo però che la F rimanga sempre una forma definita positiva e vediamo come variano in corrispondenza gli esponenti caratteristici. A tal uopo cominciamo col premettere i seguenti teoremi, di cui il secondo già dimostrato da Routh:

Teorema A: Nessuna delle radici dell'equazione (5) può essere immaginaria pura.

Teorema B: Se i coefficienti e_{ik} sono nulli, le eventuali radici dell'equazione (5) che hanno parte reale positiva, sono reali.

Per dimostrare il teorema A moltiplichiamo la (4) per $\bar{u}_i$ (complessa coniugata di u_i) e sommiamo rispetto all'indice i ; si trova:

$$(9) \quad \lambda^2 \sum_i^n b_{ik} \bar{u}_i u_k + \lambda \sum_i^n c_{ik} \bar{u}_i u_k + \lambda \sum_i^n e_{ik} \bar{u}_i u_k + \sum_i^n a_{ik} \bar{u}_i u_k = 0.$$

Uguagliamo a zero il coefficiente dell'immaginario; a tal uopo osserviamo che le tre forme $\sum_{i,k}^n a_{ik} \bar{u}_i u_k$, $\sum_{i,k}^n b_{ik} \bar{u}_i u_k$, $\sum_{i,k}^n c_{ik} \bar{u}_i u_k$ sono reali, mentre la forma $\sum_{i,k}^n e_{ik} \bar{u}_i u_k$ è immaginaria. Se si pone:

$$\lambda = a + ib$$

si trova allora che

$$(10) \quad 2ab \sum_{i,k}^n b_{ik} \bar{u}_i u_k + b \sum_{i,k}^n c_{ik} \bar{u}_i u_k + a \sum_{i,k}^n e_{ik} \bar{u}_i u_k = 0.$$

Dalla (10) si vede che, se a è nullo, deve essere nullo anche b , in quanto la forma $\sum_{i,k}^n c_{ik} \bar{u}_i u_k$ è definita positiva: il che equivale all'enunciato del teorema A.

Dalla (10) si deduce poi immediatamente anche il teorema B: ed inverso se i coefficienti e_{ik} sono nulli e b è diverso da zero, a deve essere necessariamente negativo, in quanto le due forme quadratiche $\sum_{i,k}^n b_{ik} \bar{u}_i u_k$ e $\sum_{i,k}^n c_{ik} \bar{u}_i u_k$ sono definite positive. Ne segue che se a è positivo, b deve essere nullo, come asserisce il teorema B.

Ciò premesso, allo scopo di scrivere l'equazione (5) sotto una forma più opportuna, operiamo un cambiamento di coordinate, assumendo come nuove coordinate le $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ definite dalla relazione:

$$(11) \quad q_i = \sum_{\mathfrak{e}} u_i^{(\mathfrak{e})} \Phi_{\mathfrak{e}}.$$

Dalla (8) si deduce immediatamente che, nelle nuove coordinate $\Phi_{\mathfrak{e}}$, il potenziale U , l'energia cinetica T e la funzione dissipativa F assumono rispettivamente la forma:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = -\frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{e}} \sigma_{\mathfrak{e}}^2 \Phi_{\mathfrak{e}}^2 \\ T = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{e}} \dot{\Phi}_{\mathfrak{e}}^2 + \sum_{\mathfrak{e}, \tau} (\beta_{\mathfrak{e}} + \beta_{\mathfrak{e}\tau} \Phi_{\tau}) \dot{\Phi}_{\mathfrak{e}} \\ F = -\frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{e}, \tau} \gamma_{\mathfrak{e}\tau} \dot{\Phi}_{\mathfrak{e}} \dot{\Phi}_{\tau} \end{array} \right.$$

essendo

$$(12') \quad \beta_{\mathfrak{e}} = \sum_i u_i^{(\mathfrak{e})} B_i; \quad \beta_{\mathfrak{e}\tau} = \sum_{i,k} u_i^{(\mathfrak{e})} u_k^{(\tau)} B_{ik}; \quad \gamma_{\mathfrak{e}\tau} = \sum_{i,k} u_i^{(\mathfrak{e})} u_k^{(\tau)} e_{ik}.$$

Nelle nuove coordinate Φ_q le equazioni di Lagrange assumono quindi la forma:

$$(13) \quad \ddot{\Phi}_q + \sum_{\tau}^n (\gamma_{q\tau} + \eta_{q\tau}) \dot{\Phi}_\tau + \sigma_q^2 \Phi_q = 0 \quad (q = 1, \dots, n)$$

in cui le $\eta_{q\tau}$, definite dalle relazioni:

$$(14) \quad \eta_{q\tau} = \beta_{q\tau} - \beta_{\tau q}$$

sono emisimmetriche al pari delle e_{ik} . Ponendo:

$$\Phi_q = v_q e^{\lambda t}$$

si trae per le v_q il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\sum_{\tau}^n (\lambda^2 \delta_{q\tau} + (\gamma_{q\tau} + \eta_{q\tau}) \lambda + \sigma_q^2 \delta_{q\tau}) v_\tau = 0 \quad (q = 1, \dots, n)$$

che è risolubile solo e quando λ è una soluzione dell'equazione:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 + \gamma_{11} \lambda & \dots & (\gamma_{1r} + \eta_{1r}) \lambda & (\gamma_{1,r+1} + \eta_{1,r+1}) \lambda & \dots & (\gamma_{1n} + \eta_{1n}) \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\gamma_{r1} + \eta_{r1}) \lambda & \dots & \lambda^2 + \gamma_{rr} \lambda & (\gamma_{r,r+1} + \eta_{r,r+1}) \lambda & \dots & (\gamma_{rn} + \eta_{rn}) \lambda \\ (\gamma_{r+1,1} + \eta_{r+1,1}) \lambda & \dots & (\gamma_{r+1,r} + \eta_{r+1,r}) \lambda & \lambda^2 + \gamma_{r+1,r+1} \lambda + \sigma_{r+1}^2 & \dots & (\gamma_{r+1,n} + \eta_{r+1,n}) \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\gamma_{n1} + \eta_{n1}) \lambda & \dots & (\gamma_{nr} + \eta_{nr}) \lambda & (\gamma_{n,r+1} + \eta_{n,r+1}) \lambda & \dots & \lambda^2 + \gamma_{nn} \lambda + \sigma_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Per il modo con cui è stata ottenuta, l'equazione (15) è manifestamente equivalente alla (5). Sviluppando il determinante (15) colla regola di Laplace secondo i minori di ordine $n - r$ contenuti nelle ultime $n - r$ righe, si ottiene:

$$(16) \quad \lambda^r \sigma_{r+1}^2 \sigma_{r+2}^2 \dots \sigma_n^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{12} + \eta_{12} & \dots & \gamma_{1r} + \eta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r1} + \eta_{r1} & \gamma_{r2} + \eta_{r2} & \dots & \gamma_{rj} \end{vmatrix} + \lambda^{r+1} G(\lambda) = 0.$$

L'equazione (16) ammette manifestamente r radici nulle qualunque siano i valori delle costanti $\gamma_{q\tau}$ ed $\eta_{q\tau}$. Affinchè essa ne ammetta $r + 1$, deve essere necessariamente nullo il determinante che compare nella formula (16). Ora se questo determinante potesse essere nullo in corrispondenza a dei

particolari valori delle costanti $\gamma_{\varrho\tau}$ ed $\eta_{\varrho\tau}$, ammetterebbe soluzioni diverse da zero, in corrispondenza a questi valori, il sistema di equazioni algebriche:

$$(17) \quad \sum_{\tau}^r (\gamma_{\varrho\tau} + \eta_{\varrho\tau}) y_{\tau} = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, r).$$

Moltiplicando la (17) per $\bar{y}_{\varrho}$ e sommando rispetto a ϱ si otterrebbe:

$$\sum_{\varrho\tau}^r \gamma_{\varrho\tau} \bar{y}_{\varrho} y_{\tau} + \sum_{\varrho\tau}^r \eta_{\varrho\tau} \bar{y}_{\varrho} y_{\tau} = 0$$

da cui, essendo la prima sommatoria reale e la seconda immaginaria pura, si trarrebbe:

$$\sum_{\varrho\tau}^r \gamma_{\varrho\tau} \bar{y}_{\varrho} y_{\tau} = 0$$

contro l'ipotesi che i coefficienti $\gamma_{\varrho\tau}$ siano i coefficienti di una forma, quadratica, definita positiva. Rimane così dimostrato il

Teorema C: Se la dissipatività non è nulla, l'equazione (5) ammette r , e non più di r , radici nulle.

Ciò premesso, indichiamo con $\lambda_1 \dots \lambda_r$ gli esponenti caratteristici che rimangono nulli al variare dei coefficienti c_{ik} ed e_{ik} ; con $\lambda_{r+\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) gli esponenti caratteristici che si annullano quando $c_{ik} = e_{ik} = 0$; con $\lambda_{2r+\beta}$ ($\beta = 1, \dots, 2q$) gli esponenti caratteristici che, per $c_{ik} = e_{ik} = 0$, coincidono rispettivamente con $\pm i\sigma_{r+1} \dots \pm i\sigma_{r+q}$; con $\lambda_{2r+2q+\gamma}$ ($\gamma = 1, \dots, p$) gli esponenti caratteristici che, per $c_{ik} = e_{ik} = 0$, coincidono rispettivamente con $-\sigma_{r+q+1} \dots -\sigma_n$ e finalmente con $\lambda_{2r+2q+p+\gamma}$ gli esponenti caratteristici che, per $c_{ik} = e_{ik} = 0$, coincidono rispettivamente con $\sigma_{r+q+1} \dots \sigma_n$.

In seguito, per semplicità di esposizione, indicheremo con π_1 il semi-piano complesso luogo dei punti con ascissa negativa, e con π_2 il semi-piano complesso luogo dei punti con ascissa positiva.

I teoremi A e C esprimono che, se si fanno variare i coefficienti c_{ik} ed e_{ik} dal valore zero ai valori attuali, gli esponenti caratteristici $\lambda_{2r+2q+\gamma}$ ($\gamma = 1, \dots, p$) si mantengono nel semi-piano π_1 , mentre gli esponenti caratteristici $\lambda_{2r+2q+p+\gamma}$ si mantengono nel semi-piano π_2 .

Vediamo che cosa si può dire degli esponenti $\lambda_{r+\alpha}$. A tal uopo cominciamo a far variare i coefficienti c_{ik} del valore zero a dei valori infinitamente piccoli δc_{ik} , mantenendo nulle le e_{ik} . In corrispondenza le $\gamma_{\varrho\tau}$ vareranno dal valore zero a dei valori infinitamente piccoli $\delta\gamma_{\varrho\tau}$; le $\eta_{\varrho\tau}$ rimarranno nulle e le $\lambda_{r+\alpha}$ vareranno dal valore zero a dei valori infinitamente piccoli $\delta\lambda_{r+\alpha}$. In corrispondenza alle radici $\delta\lambda_{r+\alpha}$ dell'equazione (15), gli elementi del determinante (15) sono tutti infinitesimi del secondo ordine, fatta eccezione per gli elementi diagonali della $(r+1)^{ma} \dots n^{ma}$ riga: ne segue che queste radici dovranno soddisfare, a meno di infinitesimi di ordine superiore, all'equazione:

luogo dei punti di ascissa negativa, gli altri r esponenti nulli restano nulli, i p esponenti reali e negativi rimangono nel semi-piano complesso luogo dei punti di ascissa negativa, e i p esponenti reali e positivi rimangono nel semi-piano complesso luogo dei punti di ascissa positiva.

In altre parole, in seguito all'intervento di azioni dissipative, la configurazione di equilibrio considerata ammetterà r esponenti caratteristici nulli, $2q + p + r$ esponenti caratteristici a parte reale negativa e p esponenti caratteristici a parte reale positiva.

Ne segue in particolare che:

Il numero di gradi di instabilità, che una configurazione di equilibrio di un sistema conservativo possiede in assenza di dissipatività e di termini girostatici, rimane inalterato quando alle forze conservative si aggiungono delle forze dissipative (ed eventualmente delle azioni girostatiche).

I risultati precedenti contengono inoltre, come caso particolare, il teorema di Lord Kelvin sulle stabilità dei sistemi dissipativi, in base al quale:

Se il potenziale di un sistema conservativo è massimo in una data configurazione, che risulta di conseguenza una configurazione di equilibrio stabile, tale stabilità ha carattere secolare, e cioè essa si mantiene anche sotto l'azione di forze dissipative (siano o no presenti azioni girostatiche).

Se ne conclude che, per studiare la stabilità o l'instabilità di una configurazione di equilibrio di un sistema soggetto a forze conservative, a forze dissipative (ed eventualmente ad azioni girostatiche) è sufficiente esaminare se la configurazione è stabile o instabile sotto l'azione delle sole forze conservative.

Meccanica. — *Complément à une Note antérieure sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes.* Nota di M. L. DUBREIL-JACOTIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans une Note antérieure ⁽²⁾ nous avons montré que dans un liquide hétérogène incompressible il ne pouvait se propager d'onde barotrope (c'est à dire pour la quelle les lignes de pression constante sont confondues avec les lignes de densité constante), dans le cas de la profondeur finie; et nous avons démontré que les ondes de Gerstner étaient, au contraire, pour la profondeur infinie, une solution possible quelle que soit la répartition de la densité ⁽³⁾. Je voudrais signaler ici que *l'onde de Gerstner est la seule solution barotrope possible.*

Dans un Mémoire récent, M. J. Kiebel ⁽⁴⁾ vient en effet de démontrer que, si on suppose la pression constante sur les lignes de courant, l'onde de Gerstner est la seule solution adiabatique possible dans un fluide compressible parfait. Or les mouvements barotropes d'un liquide hétérogène sont les mêmes que les mouvements adiabatiques d'un fluide compressible pour lesquels la pression est constante sur chaque ligne de courant.

En effet, comparons les équations permettant d'étudier les mouvements plans permanents dans les liquides hétérogènes et les mouvements adiabatiques des fluides compressibles. Dans l'un et l'autre cas les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(gy - \frac{1}{2} w^2 \right) + v \zeta \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(gy - \frac{1}{2} w^2 \right) - u \zeta \end{cases}$$

où $\zeta = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$, l'axe des x étant horizontal et l'axe des y dirigé vers le bas; avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0.$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) « Atti della R. Acc. Naz. dei Lincei », XV, asc. 10, pp. 814-819, 1932.

(3) Il est signalé déjà dans J. BOUSSINESQ (*Essai sur la théorie des eaux courantes*, « Mémoires de l'Institut Savants étrangers », 1877, p. 345) que l'onde de Gerstner peut se propager dans une masse liquide composée de plusieurs fluides superposés et compressibles.

(4) « Revue de Math. Appliquées et de Mécanique », Moscou, vol. I, fasc. 1^o, 1933, p. 51. Ce Mémoire que M. H. Villat vient d'avoir l'amabilité de me signaler est en langue russe. Je remercie ici M. Kravtchenko de la traduction qu'il a bien voulu m'en faire.

A ces équations il faut ajouter l'équation d'état. Dans le cas du liquide incompressible on a :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

D'où en tenant compte de l'équation de continuité :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \rho = \rho(\Psi)$$

$\Psi(x, y) = \text{const.}$ désignant les lignes de courant.

En portant ces valeurs dans les équations du mouvement et formant la combinaison $u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}$, on déduit l'équation de Bernoulli :

$$(A) \quad p = \rho(\Psi) \left[gy - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \right] + l(\Psi).$$

D'autre part l'élimination de p entre les deux équations (I) donne

$$(B) \quad \Delta \Psi - \frac{\rho'(\Psi)}{\rho(\Psi)} \left[gy - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \right] = f(\Psi)$$

où f comme l sont des fonctions arbitraires.

Les mouvements barotropes s'obtiennent donc en cherchant les solutions communes à :

$$\Delta \Psi = H_1(\Psi) \quad \text{et} \quad 2gy - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 = H_2(\Psi)$$

où H_1 et H_2 sont arbitraires.

Considérons maintenant un fluide parfait en mouvement adiabatique ou, plus généralement, pour lequel existe une relation de piézotropie. L'équation d'état s'écrit alors, avec les variables d'Euler⁽¹⁾ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{n}{p} \frac{dp}{dt} \quad \text{c'est à dire} \quad \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \log \frac{\rho}{p^n} = 0.$$

Soient alors $h(x, y) = \text{const.}$ les lignes de courant. L'équation de continuité montre que l'on peut poser

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial y} \quad v = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

(1) Voir par exemple V. BJERKNES, *Hydrodynamique Physique*. Paris, 1934. p. 91.

Il résulte alors de l'équation d'état que :

$$\rho = j(h) p^n.$$

On déduit alors des équations du mouvement les deux relations :

$$(a) \quad \frac{p^{1-n}}{1-n} = j(h) \left[gy - \frac{1}{2} w^2 \right] + l(h)$$

$$(b) \quad \frac{\zeta}{\rho} + \frac{j'(h)}{j(h)} \left[gy - \frac{1}{2} w^2 \right] = -f(h).$$

Remarquons que pour obtenir une équation aux dérivées partielles déterminant h il faudrait pouvoir éliminer p et ρ entre ces trois dernières équations; la méthode que nous avons utilisée pour l'étude complète⁽¹⁾ des ondes dans les liquides ne pourra donc sans doute pas s'étendre au cas des fluides compressibles.

Si on se borne aux mouvements particuliers pour lesquels la pression est constante sur les lignes de courant, on a également $\rho = \rho(h)$, donc d'après (a) :

$$gy - \frac{1}{2} w^2 = h_1(h)$$

et d'après la relation (b) :

$$\zeta = h_2(h).$$

Si on pose $\Psi = \int \frac{dh}{\rho(h)}$, on a $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et on est encore ramené, ce que nous voulions établir, à trouver les solutions communes à :

$$\Delta \Psi = H_1(\Psi) \quad \text{et} \quad 2gy - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 = H_2(\Psi).$$

Signalons pour terminer que M. J. Kiebel n'a pas traité le problème à ce point de vue. Il a ramené la recherche des ondes adiabatiques dans les fluides parfaits compressibles à la résolution d'une certaine équation aux dérivées partielles en une fonction $\Phi(y, h)$ et a étudié les solutions particulières de la forme $p(h)y + p_1(h)$.

(1) Voir par exemple « C. R. de l'Académie des Sciences », to. 200, 1935, p. 91.

Meccanica. — *Sullo studio di un moto einsteiniano mediante i principi di equivalenza del Levi-Civita.* Nota di M. CIMINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Levi-Civita ha dato ⁽²⁾ due principi di equivalenza (il secondo dei quali si presenta come un perfezionamento del primo) per lo studio in seconda approssimazione ⁽³⁾ del moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo, di un corpo di massa infinitamente piccola e sottoposto all'azione di un campo gravitazionale generato da una distribuzione statica di masse. Servendoci allora del primo dei suddetti principi, ci fu dato ⁽⁴⁾ di ricavare una legge delle aree del moto einsteiniano, nonchè una legge del tempo cosmico sulla traiettoria ed i periodi di rivoluzione anomalistica e siderale, sempre per il moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo.

Vogliamo ora, nella presente Nota, servirci invece del secondo principio di equivalenza del Levi-Civita per ritrovare, in maniera molto più immediata, sia la legge delle aree che la legge del tempo cosmico sulla traiettoria; e vogliamo pure porre in luce il criterio secondo il quale va fatto il confronto dei risultati ottenuti, per uno *stesso* moto einsteiniano, servendoci dei due principi, dato che nel condurre tale confronto occorre avere qualche avvertenza non del tutto rilevabile a prima vista.

§ 1. — Il secondo principio di equivalenza del Levi-Civita afferma che: *le stesse equazioni differenziali reggono il moto einsteiniano, nelle circostanze fisiche cui corrisponde (secondo lo schema ordinario) il potenziale* $U_0 = \frac{k_0}{\rho}$ *unitario dell'assegnato campo di forze newtoniane, nonchè il moto newtoniano sotto l'azione di forze derivanti dal potenziale:*

$$(1) \quad \bar{U} = \left(1 + \frac{+E_0}{c^2}\right) U_0 + \frac{3}{c^2} U_0^2$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) In questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. IV, 1926, pp. 3-5; e ser. 6^a, vol. XX, 1934, pp. 388-403.

(3) Si assumono come termini del secondo ordine quelli dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, vessendo la velocità del mobile e c quella della luce; dello stesso ordine si presenta pure, nell'ordinario moto planetario, il termine $\frac{fM}{\rho c^2}$ (con evidente significato delle notazioni).

(4) In questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. XVI, 1932, pp. 120-126; e pp. 223-227.

ove c è la velocità della luce ed ove E_0 rappresenta il valore che assume l'espressione $\frac{1}{-2}v^2 - U_0$ in corrispondenza ai dati iniziali.

L'integrazione di questo moto conduce allora, senz'altro, alla traiettoria del moto einsteiniano, in seconda approssimazione e considerata nell'ordinario spazio euclideo, nonchè alle leggi temporali nel tempo cosmico t , senza che sia necessaria alcuna ulteriore trasformazione della variabile temporale che compare nelle equazioni differenziali. L'integrazione di questo moto retto dal potenziale (1) risale a Newton; noi riportiamo qui solo i risultati che ci interessano.

Sia A_2 la costante areolare del moto (che è centrale e piano), e sia E_2 il valore effettivamente assunto dall'espressione $\frac{1}{2}v^2 - \bar{U}$ in corrispondenza ad un atto di moto einsteiniano iniziale. Dato poi sul piano del moto un riferimento polare (ρ, θ) con polo nel centro di forza e asse polare fisso, l'equazione polare della traiettoria è data dalla:

$$(2) \quad \rho = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos \sqrt{\lambda} \theta}$$

ove p_2 ed e_2 sono due costanti di integrazione, legate A_2 ed E_2 , ed ove si è posta uguale a zero l'anomalia iniziale supposta diretta verso un punto di minima distanza della traiettoria (2) dal centro di forza. e_2 si può poi sempre supporre positiva (cambiando eventualmente θ in $\theta + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$), e noi la supporremo sempre compresa tra 0 e 1. Infine si è posto:

$$\lambda = 1 - \frac{6k_0^2}{c^2} \frac{1}{A_2^2}.$$

Sappiamo ancora che la traiettoria si può considerare come una vera ellisse, di equazione:

$$(3) \quad \rho = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos w}$$

purchè ci si riferisca ad un riferimento (ρ, w) , polare con lo stesso polo del precedente (ρ, θ) , ma con asse polare (lentamente) rotante, per modo che il raggio vettore sia ancora ρ e l'anomalia abbia, istante per istante, il valore $w = \sqrt{\lambda} \theta$. L'ellisse testè ottenuta risulta allora percorsa con legge kepleriana, con costante areolare data da:

$$\bar{A}_2 = A_2 \sqrt{\lambda}^{(1)}.$$

(1) Cfr. ad es., la prima delle mie citate Note. Si tenga presente, anche per il seguito, che il moto sull'ellisse (3) ha ancora la stessa energia E_1 e tutto va come se agisse il potenziale: $U = \left(1 + \frac{4E_0}{c^2}\right) U_0$.

Inoltre il riferimento mobile (ρ, w) ruota rispetto a quello (ρ, θ) con velocità areolare $(1 - \sqrt{\lambda})\theta$, ciò che dà subito, per il nostro moto einsteiniano, lo spostamento del perielio: $S_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} - 2\pi$, e, in seconda approssimazione:

$$(4) \quad S_p = \frac{6 k_0 \pi}{c^2 a_2 (1 - e_2^2)}$$

essendo a_2 il semi-grand'asse dell'ellisse.

Avremo così per il nostro moto einsteiniano nello spazio euclideo:

1) I due integrali delle aree (validi, rispettivamente nel riferimento (ρ, θ) e in quello (ρ, w)):

$$(5) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = A_2 \quad ; \quad \rho^2 \frac{dw}{dt} = \bar{A}_2.$$

2) Nel riferimento (ρ, w) vale l'equazione kepleriana:

$$(6) \quad n_2 (t - t_0) = \varphi - e_2 \sin \varphi$$

(n_2 = moto medio; φ = anomalia eccentrica).

3) La durata della rivoluzione anomalistica (ritorno del mobile al punto di minima distanza dal centro di forza) è allora:

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2}.$$

4) La durata T_2' della rivoluzione siderale, a partire da un generico valore dell'anomalia eccentrica φ , sarà data invece da T_2 a cui si sottragga l'intervallo di tempo τ che intercorre mentre l'anomalia eccentrica si sposta dal valore $\varphi - S_\varphi$ al valore φ , essendo S_φ l'angolo del quale avanza φ durante una rivoluzione anomalistica rispetto al riferimento fisso (ρ, θ) . Si dimostra ⁽¹⁾ allora che è:

$$\tau = \frac{1}{n_2} \cdot S_p \cdot \frac{(1 - e_2 \cos \varphi)^2}{\sqrt{1 - e_2^2}}$$

e quindi per la (4):

$$\tau = \frac{2\pi}{n_2} \cdot \frac{3 k_0}{a_2 c^2} \cdot \frac{(1 - e_2 \cos \varphi)^2}{(1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde sarà, per il periodo di rivoluzione siderale, e passando nuovamente alle anomalie w :

$$T_2' = T_2 - \tau = \frac{2\pi}{n_2} \left[1 - \frac{3 k_0}{a_2 c^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{(1 + e_2 \cos w)^2} \right]$$

(1) Cfr. la seconda delle mie citate Note.

ed ove ancora, sempre in seconda approssimazione, si può senz'altro sostituire alla w la θ .

§ 2. Il primo principio di equivalenza del Levi-Civita identificava invece la traiettoria di un moto einsteiniano nello spazio euclideo con quella di un moto newtoniano *ausiliario* retto dal potenziale:

$$(1') \quad \bar{U}' = \left(1 + \frac{4 E_1}{c_0}\right) U_0 + \frac{3 U_0^2}{c^2}$$

ove E_1 era l'energia del moto einsteiniano. Inoltre detto t_1 il tempo (ordinario) di questo ausiliario moto newtoniano, il tempo cosmico t si otteneva in base alla relazione differenziale:

$$dt = dt_1 \left(1 + \frac{4 U_0}{c^2}\right).$$

Si vede allora subito come il potenziale $(1')$ differisca da quello (1) per termini di ordine superiore al secondo, dato che E_1 differisce ⁽¹⁾ da E_0 per termini del secondo ordine. Sicchè possiamo assumere, anche nel primo principio di equivalenza, senz'altro lo stesso potenziale (1) . Sia allora A_1 la costante areolare del moto newtoniano ausiliario; otterremo per questo moto, formalmente, quanto si è ottenuto nel § 1, salvo il cambiamento dell'indice 2, che compare nei simboli usati allora, con l'indice 1.

Per questo moto ausiliario valgono, nel tempo ordinario t_1 , gli integrali delle aree (rispettivamente nei due riferimenti (ρ, θ) e (ρ, w)):

$$(7) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt_1} = A_1 \quad ; \quad \rho^2 \frac{dw}{dt_1} = \bar{A}_1$$

e, nel tempo cosmico t :

$$(8) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = A_1 \left(1 - \frac{4 U_0}{c^2}\right) \quad ; \quad \rho^2 \frac{dw}{dt} = \bar{A}_1 \left(1 - \frac{4 U_0}{c^2}\right).$$

Ora, lo stesso moto einsteiniano studiato nel § 1 si presentava con una costante areolare uguale ad A_2 ; questa A_2 dovrà allora coincidere con la $A_1 \left(1 - \frac{4 U_0}{c^2}\right)$. Però, mentre nel § 1 il moto einsteiniano si presentava come un moto newtoniano (anche per la legge temporale) retto dal potenziale (1) , nel caso presente il moto einsteiniano non si presenta più come newtoniano retto dallo stesso potenziale, in quanto si è modificata nel moto newtoniano ausiliario la *sola* velocità areolare, avendo lasciato inalterati tutti gli altri parametri dell'orbita. Se vogliamo allora confrontare il moto einsteiniano

(1) Cfr. la seconda delle citate Note di LEVI-CIVITA.

quale appare usando il secondo principio di equivalenza con quello che appare usando invece il primo, dobbiamo ridurre quest'ultimo moto ad un moto newtoniano, retto-sempre da un potenziale (1), avente come costante areolare $A_1 \left(1 - \frac{4U_0}{c^2}\right)$ e cambiando opportunamente le costanti geometriche che determinano la traiettoria, o, ciò che è lo stesso, l'energia E_1 in una certa E'_1 .

Il moto allora, retto dal potenziale (1) e avente costante areolare $A_1 \left(1 - \frac{4U_0}{c^2}\right)$ ed energia E'_1 , dovrà coincidere esattamente con il moto trovato nel § 1. Sarà cioè anche: $E'_1 = E_2$. Detto poi n'_1 il moto medio (nel riferimento (ρ, w)) di questo nuovo moto newtoniano di energia E'_1 e costante areolare $A_1 \left(1 - \frac{4U_0}{c^2}\right)$, dovrà pure essere:

$$n'_1 = n_2.$$

Si tratta allora di assegnare il valore di E'_1 .

Ora noi sappiamo, dalla seconda delle nostre citate Note, che per il moto einsteiniano vale il periodo anomalistico:

$$T = \frac{2\pi}{\bar{n}}$$

essendo (sempre in seconda approssimazione):

$$\bar{n} = n_1 \left(1 - \frac{4U_0}{c^2}\right).$$

e quindi $\bar{n}$ dovrà coincidere con n'_1 , e con n_2 infine.

Ma essendo ancora:

$$a_1^3 n_1'^2 = k \quad ; \quad a_1^3 n_1^2 = k$$

(ove si è posto per brevità $k = k_0 \left(1 + \frac{4E_0}{c^2}\right)$), avremo sempre in seconda approssimazione:

$$a'_1 = a_1 \left(1 + \frac{8}{3} \frac{U_0}{c^2}\right).$$

Sarà allora pure, dalle:

$$a'_1 = -\frac{k}{2E'_1} \quad ; \quad a_1 = -\frac{k}{2E_1}$$

la relazione cercata:

$$E'_1 = E_1 \left(1 - \frac{8}{3} \frac{U_0}{c^2}\right).$$

§ 3. L'analisi fatta nel § 2 prova come tra le costanti A_1 ed E_1 , A_2 ed E_2 , che si usano nei due principî di equivalenza per ottenere lo stesso moto einsteiniano, nell'ordinario spazio euclideo e nel tempo cosmico, passino le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = A_1 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \right) \\ E_2 = E_1 \left(1 - \frac{8}{3} \frac{U_0}{c^2} \right). \end{array} \right.$$

Viceversa, si ottiene lo stesso moto einsteiniano scegliendo le costanti A_1 ed E_1 allorchè si applica il primo principio, e le A_2 ed E_2 allorchè si applica il secondo. Le formule trovate per i periodi anomalistici e siderali nel § 1, corrispondono allora, per questa scelta delle A_2 ed E_2 , a quelle da noi già trovate nelle precedenti Note partendo dal primo principio.

A prima vista però, si potrebbe essere indotti in errore dopo aver fatta la suddetta scelta delle costanti, perchè partendo, ad esempio, con le costanti A_1 ed E_1 ed integrando il moto col primo principio di equivalenza, si ottengono le costanti geometriche dell'orbita p_1 ed e_1 , che sono diverse da p_2 ed e_2 . Ma in realtà un confronto delle due orbite così effettuato è erroneo, perchè un tale confronto si deve invece fare partendo dal presupposto (e tale è appunto il significato dei due principî di equivalenza, e così ci dice il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali) che i due moti sono identici e che essi debbono corrispondersi se confrontati *globalmente*, oppure anche individualmente a partire *dalle stesse condizioni iniziali*. La separazione che si fa nei due casi degli elementi spaziali da quelli temporali conduce, nel secondo principio, a ritenere l'orbita come percorsa con legge temporale newtoniana (integrali primi (5)), mentre nel primo principio l'orbita non è percorsa con legge newtoniana, dovendosi modificare la costante areolare (integrali primi (8), e non già (7)). Questa differente separazione degli elementi temporali da quelli spaziali può rendere due orbite ottenute coi due principî, e pur relative allo stesso moto einsteiniano, realmente diverse.

Astronomia. — *Sul calcolo d'orbita dei sistemi doppi del tipo 61 Cygni.* Nota di F. ZAGAR, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. SILVA.

1. È stato più volte lamentato che il metodo puramente analitico per il calcolo d'orbita di un sistema binario visuale, metodo detto generalmente di Kowalski, non tiene conto della legge delle aree — o, ciò che è lo stesso, delle epoche di osservazione — se non che alla fine dei calcoli, per la determinazione degli elementi dinamici P e T , mentre tutti gli altri vengono determinati senza la premessa di questa legge. In tale metodo, infatti, si deduce dapprima dall'insieme di tutte le posizioni relative osservate la equazione dell'orbita apparente, nella sola ipotesi che questa sia una conica; si determinano poi, in base a certe trasformazioni analitiche che sfruttano la ulteriore condizione che l'astro principale debba occupare un fuoco nell'orbita vera, mediante i 5 coefficienti dell'equazione dell'orbita apparente i 5 elementi geometrici a, e, i, ω, Ω , dopo di che finalmente l'applicazione dell'equazione di Kepler, equivalente alla legge delle aree — e con ciò la utilizzazione delle epoche di osservazione — conduce ai due ultimi elementi P e T . Ciò costituisce un vero inconveniente per il metodo, inquantochè i tempi di osservazione sono i dati più sicuri del problema.

L'impossibilità di introdurre sin da principio la legge delle aree in questo metodo ha condotto più volte i calcolatori a risultati che dovevano essere abbandonati, dato che la conica apparente in luogo di un'ellisse risultava una parabola o una iperbole. Ciò è tanto più da deplorare in quanto il metodo è da considerarsi tra i migliori, dato che si serve di tutte le osservazioni disponibili ed è basato solamente sul calcolo, evitando così tutte quelle arbitarietà che possono introdursi nel tracciare l'ellisse nei metodi grafici o semigrafici. Nè è da credere che esso richieda troppa fatica, inquantochè la risoluzione del necessario sistema di equazioni col metodo dei minimi quadrati non può dirsi laboriosa quando il calcolatore abbia a disposizione una macchina calcolatrice moderna.

Il fatto, infine, che questo metodo ammette indistintamente tutti e tre i tipi di conica, deve considerarsi, almeno per i casi in questione, pure come un suo pregio, inquantochè, ammessa una volta la legge di Newton, se la legge delle aree ne è una conseguenza necessaria, e quindi deve essere presa in considerazione, i tre tipi di orbita sono ugualmente possibili e la limitazione al caso ellittico sarebbe una condizione restrittiva che ricorda il procedimento dei metodi grafici, nei quali qualunque arco dato viene completato in una traiettoria chiusa.

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

Non mi sembra perciò inutile di esporre un semplice modo di ovviare a tale deficienza del metodo, almeno per quanto riguarda le orbite di sistemi simili a 61 Cygni, cioè di sistemi formati da due stelle relativamente distanti, con periodo di rivoluzione di parecchi secoli e che hanno quindi percorso finora soltanto un arco limitato della loro orbita relativa, con numerose osservazioni distribuite sopra tutto questo arco senza interruzioni. Come inoltre accennerò, non è però escluso che il procedimento possa applicarsi in via approssimata anche ad orbite per le quali si conosca un arco maggiore.

2. Come è ben noto, se x ed y sono le coordinate ortogonali cartesiane del compagno riferito al principale nel solito piano di proiezione, tangente alla sfera celeste nel punto occupato dal principale, e quindi

$$(1) \quad x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

dove ρ e ϑ sono le due coordinate polari che usualmente si misurano, la equazione dell'orbita apparente ha la forma

$$(2) \quad Ax^2 + By^2 + 2 Cxy + 2 Dx + 2 Ey = 1.$$

Se ora con $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ denotiamo le derivate delle due coordinate suddette rispetto al tempo, la legge delle aree esige che si abbia in tutti i punti

$$(3) \quad x\dot{y} - \dot{x}y = c,$$

dove c è una quantità costante (doppia velocità areolare), la quale relazione può anche scriversi nelle due seguenti maniere

$$(3') \quad x - y \frac{dx}{dy} = \frac{c}{\dot{y}}, \quad x \frac{dy}{dx} - y = \frac{c}{\dot{x}}.$$

Avendosi però dalla (2) facilmente

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{By + Cx + E}{Ax + Cy + D},$$

le precedenti, tenendo conto della (2), si trasformano in

$$(4) \quad \begin{cases} cAx + cCy + cD + Dx\dot{y} + Ey\dot{y} = +\dot{y} \\ cBy + cCx - Dx\dot{x} + cE - Ey\dot{x} = -\dot{x} \end{cases}$$

e, con le posizioni

$$(5) \quad X_1 = cA, X_2 = cB, X_3 = cC, X_4 = cD, X_5 = cE, X_6 = D, X_7 = E,$$

conducono alle seguenti due relazioni

$$(6) \quad \begin{cases} xX_1 + yX_3 + X_4 + x\dot{y}X_6 + y\dot{y}X_7 = +\dot{y} \\ yX_2 + xX_3 + X_5 - x\dot{x}X_6 - y\dot{x}X_7 = -\dot{x} \end{cases}$$

Supposto per un momento di conoscere insieme alle x ed y anche $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ per le epoche di osservazione (o per le epoche dei luoghi normali), i due sistemi di equazioni che derivano rispettivamente dalla prima e dalla seconda delle precedenti applicate alle dette epoche, forniscono col metodo dei minimi quadrati i valori più probabili delle cinque costanti $A \dots E$, più quello della costante delle aree c . Essi possono risolversi sia separatamente, nel quale caso le quattro incognite C, D, E e c risultano indipendentemente da ambidue i sistemi, dando così un valido controllo e un'idea della attendibilità dell'orbita calcolata; sia insieme, considerando l'unico sistema a 7 incognite che deriva dall'unione dei due precedenti. Nel caso che uno od ambidue i sistemi (6) presentassero qualche indeterminatezza, che per la natura del problema non può escludersi, si potrà considerare come sufficientemente esatto il valore di c determinato da tutti i valori $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, in base alla (3) e calcolare le rimanenti incognite dai due sistemi con sole quattro incognite

$$(7) \quad \begin{cases} cxA + cyC + (c + x\dot{y})D + y\dot{y}E = +\dot{y} \\ cyB + cxC - x\dot{x}D + (c - y\dot{x})E = -\dot{x}, \end{cases}$$

che seguono facilmente dalle (4).

I valori $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ non sono però dati direttamente dall'osservazione, ma conoscendosi insieme alle coordinate anche i relativi tempi t , è chiaro che le prime diventano indirettamente definite dalle osservazioni. Limitando, come abbiamo premesso, le nostre considerazioni ai sistemi del tipo 61 Cygni, è possibile di risolvere il problema con sufficiente rigore analitico determinando uno sviluppo in serie di potenze del tempo per le due coordinate x, y , del tipo

$$(8) \quad x = a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots \quad y = a' + b't + c't^2 + d't^3 + \dots$$

(t contato da un'epoca iniziale t_0 che viene convenientemente scelta). La massima parte degli archi in questione verrà rappresentata con sufficiente esattezza dai primi 3 o 4 termini di queste serie. Le (8) possono applicarsi a tutti i luoghi normali, i quali possono essere gli stessi che poi saranno utilizzati per le (6). Risolti col metodo dei minimi quadrati i due sistemi che ne derivano si otterranno le espressioni numeriche delle (8), dalle quali si avranno subito le derivate

$$(9) \quad \dot{x} = b + 2ct + 3dt^2 + \dots \quad \dot{y} = b' + 2c't + 3d't^2 + \dots$$

che per ogni epoca normale t daranno i valori di $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ da introdurre insieme alle x ed y nelle (6) o (7). È da notarsi che i due sistemi (8) vengono risolti con una sola compensazione, dato che i coefficienti delle incognite $a, b, \dots$ sono gli stessi nei due sistemi. Risulta poi chiaramente

dalle (8), come pure dalle (6) e (7), quanto sia semplice ed immediato il calcolo dei coefficienti delle incognite.

Trovati i coefficienti $A \dots E$, l'ulteriore calcolo procede in base al semplice formulario ben noto che conduce in un primo tempo ai 5 elementi geometrici dell'orbita reale ed in un secondo tempo ai due elementi dinamici. Aggiungiamo soltanto che questa seconda parte può essere nel caso nostro notevolmente semplificata. Basta ricordare che la costante delle aree c (essendo proiezione della costante delle aree nell'orbita vera) è legata al periodo P dalla relazione

$$c = \frac{ab\pi}{P} \cos i,$$

cosicchè, ricordando ancora che c risulta già dai sistemi (6), il primo elemento dinamico P risulta immediatamente dopo aver ottenuto gli elementi geometrici. Infine, notando che dalle due note formule

$$\rho \sin (\vartheta - \Omega) = r \cos i \sin (\omega + v) \quad , \quad \rho \cos (\vartheta - \Omega) = r \cos (\omega + v)$$

segue, in base alle (1),

$$\operatorname{tg} (\omega + v) \cos i = \frac{y \cos \Omega - x \sin \Omega}{x \cos \Omega + y \sin \Omega},$$

risulta, per le (8), per il tempo t_0

$$\operatorname{tg} (\omega + v_0) = \frac{a' \cos \Omega - a \sin \Omega}{a \cos \Omega + a' \sin \Omega} \cdot \frac{1}{\cos i}$$

la quale determina v_0 , dopo di che le due formule

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_0 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 \quad , \quad \frac{360}{P} (t_0 - T) = E_0 - e \sin E_0$$

conducono all'ultimo elemento T .

È ovvio che col procedimento esposto una correzione differenziale diventa superflua, essendo l'orbita già basata sopra tutte le osservazioni e dedotta mediante una compensazione secondo il metodo dei minimi quadrati.

3. Nel caso di un sistema binario per il quale le osservazioni abbracciano un arco maggiore, il procedimento indicato non è applicabile perchè gli sviluppi (8), arrestati a pochi termini, non sono sufficienti per rappresentare tutto l'arco. Tuttavia accennerò ad una facile applicazione del principio esposto per calcolare una buona orbita anche nel caso di un arco molto esteso, purchè coperto senza interruzioni da sufficienti osservazioni.

Calcolati i valori x ed y secondo le (1) e tavolati insieme ai rispettivi tempi t , determiniamo le cosiddette differenze divise prime per x ed y ,

cioè i rapporti $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}$ dove $\Delta x, \Delta y$ sono le differenze tra due x o y successivi (nel senso: seguente—precedente) e Δt le corrispondenti differenze tra le epoche di osservazione. Fatta corrispondere ogni tale differenza divisa all'epoca media tra le due epoche che hanno servito a determinarla, tracciamo in scala conveniente i quattro diagrammi che in funzione di t rappresentano rispettivamente x, y e le predette differenze divise relative ad x, y . Data la continuità delle funzioni $x(t), y(t)$, ogni differenza divisa rappresenta il valore della derivata $\dot{x}(t)$, rispettivamente $\dot{y}(t)$ in un punto interno all'intervallo Δt , e perciò è evidente che i due ultimi diagrammi rappresentano con grande approssimazione le funzioni $\dot{x} = \dot{x}(t), \dot{y} = \dot{y}(t)$. Per la supposta continuità delle osservazioni i due primi diagrammi potranno tracciarsi con molta sicurezza, per gli altri due la dispersione dei singoli punti sarà maggiore, dato che nelle quantità $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}$ gli errori di osservazione hanno una parte notevole, ma tuttavia si riesce a determinare dei diagrammi abbastanza sicuri osservando certe proprietà delle curve $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$; esse devono infatti avere (entro una rivoluzione) un solo massimo ed un minimo, e in nessun altro punto esse sono parallele all'asse dei tempi, vale a dire non esistono flessi con tangente parallela all'asse delle ascisse. Ciò risulta subito dalle equazioni del moto

$$\ddot{x} = -k^2(m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{\mu^2} \cos \vartheta,$$

$$\ddot{y} = -k^2(m_1 + m_2) \frac{y}{r^3} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{\mu^2} \sin \vartheta,$$

secondo le quali $\ddot{x}$ ed $\ddot{y}$ si annullano soltanto per due valori di ϑ .

Da questi quattro diagrammi sarà facile desumere per un certo numero di epoche i valori di $x, y, \dot{x}, \dot{y}$; si sceglieranno le epoche in modo da abbracciare tutto l'arco osservato e nei punti nei quali i diagrammi risultano tracciati con la maggiore sicurezza. Introdotte le quattro quantità $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ relative alla prima di queste epoche nelle relazioni (6) o (7), e facendo altrettanto per le ulteriori epoche, si otterranno le equazioni di condizione per i coefficienti A...E, e da questo punto il calcolo procede come prima.

L'applicazione in pratica dei principi esposti in questa Nota sarà oggetto di un prossimo lavoro.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la "Nouvelle Conception de la Lumière"* ⁽¹⁾ du prof. Louis de Broglie. Nota I di R. L. GOMES, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans sa *Nouvelle Conception de la Lumière* le prof. Louis de Broglie aboutit à l'équation symbolique

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} A_1 + \frac{\partial}{\partial y} A_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_3 + 2\kappa \mu_0 c A_4 \right] \Phi_{ik}; (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les Φ_{ik} constituent un système de 16 fonctions (les composantes d'un vecteur); A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) quatre matrices hermitiennes à 16 lignes et 16 colonnes; $\kappa = \frac{2\pi i}{h}$; $2\mu_0$ = masse propre du photon; h et c les deux constantes bien connues constante de Planck et vitesse de la lumière dans le vide.

Les quatre équations de Dirac et leurs matrices α_i sont, donc, remplacées par les seize équations (1) et les matrices A_i .

Le prof. Louis de Broglie nous donne aussi leurs éléments:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} (A_1)_{ik;lm} &= \frac{1}{2} [(\alpha_1)_{il} \delta_{km} + (\alpha_1)_{km} \delta_{il}] \\ (A_2)_{ik;lm} &= \frac{4}{2} [(\alpha_2)_{il} \delta_{km} - (\alpha_2)_{km} \delta_{il}] \\ (A_3)_{ik;lm} &= \frac{1}{2} [(\alpha_3)_{il} \delta_{km} + (\alpha_3)_{km} \delta_{il}] \\ (A_4)_{ik;lm} &= \frac{1}{2} [(\alpha_4)_{il} \delta_{km} - (\alpha_4)_{km} \delta_{il}]. \end{aligned} \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ étant les quatre matrices de Dirac et δ_{ij} les éléments de la *matrice unité*.

Or, en regardant ces formules de plus près et en nous rappelant la définition du *produit direct* γ de deux matrices à 4 lignes et 4 colonnes α et β ⁽³⁾:

$$(3) \quad \gamma = \alpha \times \beta \quad \text{avec} \quad \gamma_{ij;kl} = \alpha_{ik} \beta_{jl},$$

(1) « Actualités scientifiques et industrielles », fasc. 181, *Exposés de physique théorique*, publiés sous la direction de M. LOUIS DE BROGLIE.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

(3) WIGNER, *Gruppentheorie*, p. 19 et 20.

il s'ensuit que

$$(4) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} (\alpha_1 \times 1 + 1 \times \alpha_1) \\ A_2 = \frac{1}{2} (\alpha_2 \times 1 - 1 \times \alpha_2) \\ A_3 = \frac{1}{2} (\alpha_3 \times 1 + 1 \times \alpha_3) \\ A_4 = \frac{1}{2} (\alpha_4 \times 1 - 1 \times \alpha_4) \end{cases}$$

Et cette forme des matrices A_i nous permet d'en déduire leurs propriétés les plus caractéristiques avec une grande facilité.

Ainsi :

1) L'hermitité des A_i est une conséquence immédiate de l'hermité des facteurs qui forme les produits directs.

$$\begin{aligned} 2) \text{ trace de } A_i &= \frac{1}{2} \text{ trace de } (\alpha_i \times 1) \pm \text{ trace de } (1 \times \alpha_i) \\ &= \frac{1}{2} \text{ trace de } \alpha_i \cdot \text{ trace de } 1 \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \text{ trace de } 1 \cdot \text{ trace de } \alpha_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

vu que les matrices α_i ont leur traces nulles.

$$\begin{aligned} 3) \quad 4 A_i^2 &= (\alpha_i \times 1 \pm 1 \times \alpha_i)^2 \\ &= (\alpha_i \times 1)^2 + (1 \times \alpha_i)^2 \pm (\alpha_i \times 1)(1 \times \alpha_i) \\ &\quad \pm (1 \times \alpha_i)(\alpha_i \times 1) \\ &= 2 \pm \alpha_i \times \alpha_i \end{aligned}$$

vu que ⁽¹⁾

$$(5) \quad (\alpha \times \beta)(\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = \bar{\alpha} \times \beta \bar{\beta}$$

et

$$\alpha_i^2 = 1.$$

Nous avons donc

$$A_i^2 = \frac{1}{2} (1 \pm \alpha_i \times \alpha_i),$$

avec le signal + ou - selon que $i = 1, 3$ ou $i = 2, 4$.

(1) WIGNER, déjà cité.

En élevant de nouveau au carré il vient

$$\begin{aligned} 4A_i^4 &= 1 + (\alpha_i \times \alpha_i)^2 \pm 2\alpha_i \times \alpha_i \\ &= 2(1 \pm \alpha_i \times \alpha_i) \\ A_i^4 &= \frac{1}{2}(1 \pm \alpha_i \times \alpha_i) \end{aligned}$$

et en conséquence

$$(6) \quad A_i^4 = A_i^2.$$

D'une manière générale:

$$A_i^{2n} = A_i^2$$

En formant les produits

$$\begin{aligned} A_i^2 A_j^2 &= \frac{1}{4}(1 \pm \alpha_i \times \alpha_j)(1 \pm \alpha_j \times \alpha_i) \\ &= \frac{1}{4}(1 \pm \alpha_i \times \alpha_i \pm \alpha_j \times \alpha_j + \alpha_i \alpha_j \times \alpha_i \alpha_j) \end{aligned}$$

et en remarquant que

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0,$$

on voit que

$$A_i^2 A_j^2 = A_j^2 A_i^2.$$

Les quatre matrices A_i^2 sont donc commutables et admettent, en conséquence une même transformation canonique, une matrice unitaire que les réduit toutes à la forme diagonale.

Si nous représentons par d une constante fondamentale ou valeur propre de A_i^2 , l'identité (6) exige que

$$\begin{aligned} d^2 &= d \\ d(d-1) &= 0. \end{aligned}$$

C'est à dire, les valeurs propres des matrices A_i^2 ce sont des zeros ou l'unité.

Mais combien égales à l'unité?

Pour en répondre ayons recours aux traces:

$$\text{trace de } A_i^2 = \text{trace de } \frac{1}{2} = 8.$$

Ce sont par conséquent 8.

Les valeurs propres des A_i se disposent donc ainsi: 8 zéros, 4 égales à 1 et 4 égales à -1.

Finalement

$$A_i A_j + A_j A_i = \frac{1}{2} (\alpha_j \times \alpha_i \pm \alpha_i \times \alpha_j),$$

vu les propriétés des matrices de Dirac et du produit ordinaire de deux produits directs (égalité (5)).

En résumé:

$$(7) \quad \begin{cases} A_i^2 = \frac{1}{2} (1 \pm \alpha_i \times \alpha_i) \\ A_i A_j + A_j A_i = \frac{1}{2} (\alpha_j \times \alpha_i \pm \alpha_i \times \alpha_j), \end{cases}$$

au lieu des relations de Dirac

$$\alpha_i^2 = 1 \quad ; \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0.$$

Les carrés A_i^2 sont, pourtant, commutables et ont pour valeurs propres 0 et 1.

2. On peut donner à l'équation de Broglie la forme schrödinguienne correspondante:

$$(8) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + H \Phi_{ik} = 0.$$

Il suffit de poser

$$(9) \quad H = c p_x A_1 + c p_y A_2 + c p_z A_3 - 2 \mu_0 c^2 A_4$$

avec

$$p_x = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad p_y = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad p_z = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Et H est un opérateur hermitique, vu que A_i sont des matrices de Hermite et p_x, p_y, p_z des opérateurs différentielles aussi hermitiques.

En nous rappelant l'expression des A_i :

$$A_i = \frac{1}{2} (\alpha_i \times 1 \pm 1 \times \alpha_i),$$

il est permis d'écrire

$$(10) \quad H = H_1 + H_2$$

avec

$$(11) \quad \begin{cases} H_1 = \frac{c}{2} (p_x \alpha_1 \times 1 + p_y \alpha_2 \times 1 + p_z \alpha_3 \times 1) - \mu_0 c^2 \alpha_4 \times 1 \\ H_2 = \frac{c}{2} (p_x 1 \times \alpha_1 - p_y 1 \times \alpha_2 + p_z 1 \times \alpha_3) + \mu_0 c^2 1 \times \alpha_4, \end{cases}$$

et H_1, H_2 ce sont aussi des opérateurs de Hermite.

Or, ces deux opérateurs ont les deux propriétés suivantes :

$$(12) \quad \begin{cases} H_1^2 = H_2^2 = \frac{c^2}{4} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \mu_0^2 c^4 \\ \quad \quad \quad = \mu_0^2 c^4 - \frac{c^2 h^2}{16 \pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ H_1 H_2 = H_2 H_1. \end{cases}$$

En effet, nous avons d'une manière générale

$$\begin{aligned} (p_x \alpha_1 \times 1)^2 &= p_x^2 (\alpha_1 \times 1)^2 = p_x^2 \alpha_1^2 \times 1 \\ &= p_x^2 \end{aligned}$$

$$(p_x \alpha_1 \times 1) (p_y \alpha_2 \times 1) = p_x p_y \alpha_1 \alpha_2 \times 1$$

$$(p_y \alpha_2 \times 1) (p_x \alpha_1 \times 1) = p_x p_y \alpha_2 \alpha_1 \times 1$$

d'où

$$\begin{aligned} p_x (\alpha_1 \times 1) p_y (\alpha_2 \times 1) + p_y (\alpha_2 \times 1) p_x (\alpha_1 \times 1) \\ = p_x p_y (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) \times 1 = 0. \end{aligned}$$

Et pour ce qui se rapporte aux produits $H_1 H_2$ et $H_2 H_1$:

$$p_x (\alpha_1 \times 1) p_y (1 \times \alpha_2) = p_x p_y \alpha_1 \times \alpha_2$$

$$p_y (1 \times \alpha_2) p_x (\alpha_1 \times 1) = p_x p_y \alpha_1 \times \alpha_2$$

d'où

$$p_x (\alpha_1 \times 1) p_y (1 \times \alpha_2) = p_y (1 \times \alpha_2) p_x (\alpha_1 \times 1).$$

L'opérateur H c'est donc la somme de deux opérateurs commutables H_1 et H_2 tels que

$$H_1^2 = H_2^2 = \mu_0^2 c^4 - \frac{c^2 h^2}{16 \pi^2} \Delta.$$

En représentant maintenant par S l'opérateur de Schrödinger ⁽¹⁾ nous avons la solution générale de (8), en posant

(1) Voir la Note présentée à cette même Accademia dans la séance du 3 février. (Questi « Rendiconti » p. 179).

$$\Phi = e^{-\frac{2\pi i}{b}S} \varphi = e^{-\frac{2\pi i}{b}Ht} \Phi_0,$$

vu que le temps t ne figure pas explicitement dans H .

Mais H_1 et H_2 commutant avec H_2 et H_1 et, par conséquent avec

$$H = H_1 + H_2,$$

nous avons encore

$$H_1 \Phi = e^{-\frac{2\pi i}{b}Ht} H_1 \Phi_0$$

$$H_2 \Phi = e^{-\frac{2\pi i}{b}Ht} H_2 \Phi_0.$$

Sous la condition initiale

$$H_1 \Phi_0 = H_2 \Phi_0$$

nous obtenons

$$(13) \quad H_1 \Phi = H_2 \Phi$$

et, en conséquence,

$$(14) \quad \frac{h}{4\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H_1 \Phi = 0.$$

Les solutions Φ de (8) qui initialement vérifient l'équation (13), sont aussi des solutions de (14).

En dérivant de nouveau l'équation (14) il vient

$$\frac{h}{4\pi i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + H_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

ou

$$\left(\frac{h^2}{16\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + H_1^2 \right) \Phi = 0.$$

Mais

$$H_1^2 = \mu_0^2 c^4 - \frac{c^2 h^2}{16\pi^2} \Delta,$$

donc

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{h^2}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = \mu_0^2 c^2 \Phi \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \frac{16\pi^2 \mu_0^2 c^2}{h^2} \Phi. \end{cases}$$

En posant

$$\Phi = \frac{2\pi i}{e^b} [wt - p_x x - p_y y - p_z z]^{(1)} \quad ; \quad p_x, p_y, p_z = \text{const.}$$

il viendrait

$$-\frac{4\pi^2}{b^2} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{w^2}{c^2} \right) = -\frac{16\pi^2 \mu_0^2 c^2}{b^2}$$

d'où

$$(16) \quad \frac{w^2}{c^2} = p^2 + (2\mu_0)^2 c^2 \quad (2),$$

comme relation reliant les constantes w et p_x, p_y, p_z .

Chimica. — *Sulla costituzione dell'acido tellurico* ⁽³⁾. Nota di L. PASSERINI e M. A. ROLLIER, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. BRUNI.

All'acido tellurico, come è noto, vengono attribuite due differenti formule: la prima corrispondente al normale acido ortotellurico, cioè H_6TeO_6 l'altra corrispondente a un idrato dell'acido H_2TeO_4 , cioè $\text{H}_2\text{TeO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ⁽⁵⁾.

Esistono argomenti in favore dell'una e dell'altra delle due formule accennate senza che si possa ancora decidere sicuramente quale delle due sia la giusta.

In favore della prima formula (H_6TeO_6) sta l'esistenza di eteri in cui i sei atomi di idrogeno sono sostituiti dal radicale alchilico. Pellini, per esempio ⁽⁶⁾ ha ottenuto col diazometano l'etere esametilico $\text{Te}(\text{OCH}_3)_6$. Baker e Aldam ⁽⁷⁾ osservano anche che l'acido tellurico lasciato per lungo tempo su anidride fosforica conserva sempre una composizione rispondente alla formula H_6TeO_6 , mentre questo non dovrebbe avvenire se contenesse acqua di cristallizzazione che dovrebbe almeno in parte perdere.

In favore dell'altra formula $\text{H}_2\text{TeO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, sta il fatto che per la massima parte dei tellurati due soli degli atomi di idrogeno dell'acido sono sostituiti dal metallo, in modo che sembra che gli altri quattro idrogeni abbiano

(1) On suppose que l'équation (8) admet une solution de cette forme.

(2) Relation donnée par M. LOUIS DE BROGLIE, p. 41, en note.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(4) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(5) J. W. MELLOR, *Compr. Treatise on Inorganic and Theor. Chemistry*, XI, pp. 83 e seg. Longmans, London, 1931; PASCAL, *Traité de Chimie Minérale*, II, p. 481 e seg., Paris, 1932.

(6) PELLINI, « Gazz. Chim. Ital. », 46, 247, 1916.

(7) BAKER e ALDAM, « Journ. Chem. Soc. », 99, 507, 1911.

proprietà differenti dai primi due, come appunto avverrebbe quando all'acido tellurico si attribuisse la formula prima indicata.

Un argomento decisivo per stabilire la reale formula dell'acido tellurico si deve considerare la determinazione della sua struttura reticolare. Si può infatti prevedere che se la formula dell'acido tellurico fosse H_6TeO_6 dovrà risultare una disposizione equivalente di tutti i sei gruppi OH^- intorno all'atomo di tellurio, se invece la formula fosse $H_2TeO_4 \cdot 2H_2O$ è prevedibile che intorno all'atomo di tellurio i gruppi OH^- e le molecole di H_2O occupino posizioni non equivalenti, e siano inoltre distinguibili anche per le loro diverse dimensioni.

Col proposito appunto di portare un argomento utile alla risoluzione di questo problema abbiamo intrapreso l'esame coi raggi X della modificazione cubica dell'acido tellurico, ed è probabile che in lavori successivi estenderemo ricerche analoghe anche ad alcuni tellurati.

L'acido tellurico esiste, come è noto, in due modificazioni cristalline: una cubica ed una monoclina. La modificazione più stabile è la monoclina che si ottiene comunemente nel far cristallizzare dall'acqua l'acido tellurico. Quella cubica è stata da noi preparata col procedimento indicato da Gutbier e Flury ⁽¹⁾ cioè sciogliendo il tellurio metallico in acido nitrico diluito caldo, aggiungendo quindi una adatta quantità di CrO_3 in soluzione acquosa e precipitando infine l'acido tellurico per aggiunta di HNO_3 (di densità 1.32). Per purificare l'acido tellurico lo abbiamo poi fatto ricristallizzare dall' HNO_3 della densità indicata. L'acido tellurico si ottiene sotto forma di ottaedri incolori, ben concresciuti, di dimensioni che in genere non oltrepassano i due o tre decimi di millimetro.

Abbiamo esaminato questo prodotto coi raggi X usando un tubo Philips a ioni, servendoci delle radiazioni $K\alpha$ e $K\beta$ emesse da un anticatodo di rame, per alcuni fotogrammi, e di ferro per altri. I fotogrammi più chiari si ottengono con quest'ultimo anticatodo. I dati ottenuti dal calcolo di uno di questi fotogrammi sono riportati nell'annessa tabella I.

Le linee dei fotogrammi si ordinano nel sistema cubico per una cella elementare con un lato di $15.68 \pm 0.01 \text{ \AA}$.

Dal calcolo della densità röntgenografica (3.158, mentre il valore sperimentale è di 3.035 secondo Gutbier ⁽²⁾ e di 3.053 secondo Gossner ⁽³⁾) risulta che la cella elementare contiene 32 molecole di acido tellurico.

La forma cubica dell'acido tellurico è stata già esaminata coi raggi X col metodo di Laue e del cristallo rotante da L. Merle Kirkpatrick e L. Pauling ⁽⁴⁾. Essi trovano per lato della cella, $15,48 \text{ \AA}$ valore alquanto

(1) A. GUTBIER e F. FLURY, «Zeit. anorg. Chem.», 32, 272, 1902.

(2) GUTBIER, «Zeit. anorg. Chem.», 29, 22, 1901 e 32, 96, 1902; «Sonderabdruck Sitzungsber. Physik. Mediz. Soc. Erlangen», 37, 270, 1906.

(3) B. GOSSNER, «Zeit. Kristallographie», 38, 501, 1904.

(4) L. MERLE KIRKPATRICK e L. PAULING, «Zeit. f. Kristallographie», 63, 502 1926.

TABELLA I.

h k l	λ	$\sin \frac{\theta}{2}$	d	a	I. oss.	I. calc.
(1 1 3) 2	β	0.382	2.296	15.24	d	—
(1 1 3) 2	α	0.418	2.312	15.34	mf	620
(2 0 4) 2	β	0.507	1.730	15.47	dd	—
(1 3 3) 2	α	0.544	1.777	15.48	mf	932
(2 0 4) 2	α	0.559	1.731	15.48	mf	413
(2 3 3) 2	α	0.587	1.648	15.46	dd	23
(2 2 4) 2	α	0.612	1.580	15.49	mf	785
(1 5 1) 2	α	0.646	1.496	15.55	mf	175
(3 3 3) 2						400
(4 4 0) 2	α	0.707	1.368	15.49	m	717
(6 0 0) 2	α	0.737	1.312	15.61	f	62
(4 4 2) 2						1155
(2 6 0) 2	α	0.785	1.231	15.55	mf	750
(5 3 3) 2	α	0.809	1.195	15.66	mf	792
(2 2 6) 2	α	0.821	1.177	15.63	mf	612
(4 4 4) 2	α	0.859	1.126	15.59	d	217
(5 5 1) 2	α	0.882	1.096	15.65	mf	1058
(4 0 6) 2	α	0.891	1.085	15.64	m	693
(2 4 6) 2	α	0.923	1.048	15.68	ff	1206
(5 5 3) 2	α	0.948	1.020	15.67	fff	522
(7 3 1) 2						1567

diverso dal nostro e giustificabile con la minor precisione che si può raggiungere in questa determinazione coi metodi usati dai predetti autori. Essi iniziano anche lo studio della struttura cristallina del composto, che limitano però alla determinazione della posizione nel reticolo degli atomi di tellurio, disposti secondo il gruppo spaziale O_h^8 , tralasciando gli altri.

Nella ricerca della struttura cristallina dell'acido tellurico abbiamo tenuto conto delle due formule ad esso attribuibili, cioè $H_2TeO_4 \cdot 2H_2O$ e H_6TeO_6 (o $Te(OH)_6$): con la prima sarebbero contenuti nella cella elementare 32 ioni Te^{+6} , 64 gruppi OH^- , 64 ioni O^{--} , 64 molecole di H_2O ; con l'altra, 32 ioni Te^{+6} e 192 gruppi OH^- . Abbiamo dovuto scartare la prima possibilità perchè nessuno dei gruppi spaziali del sistema

cubico permette di ordinare una serie di gruppi di atomi come quella da essa richiesta.

Prendendo in considerazione l'altra ipotesi, i gruppi spaziali del sistema cubico che comprendono 32 atomi o gruppi di una specie e 192 di un'altra sono sólo quattro, e cioè O_h^5 , O_h^6 , O_h^7 , O_h^8 .

Abbiamo scartato subito il gruppo O_h^6 perchè non ammette la possibilità di disporre i 32 atomi di tellurio in maniera equivalente, ma in due gruppi rispettivamente di 8 e 24 atomi. Nella scelta del gruppo spaziale giusto tra i rimanenti tre ci siamo naturalmente basati sulla qualità degli indici delle facce rilevate dai fotogrammi. Come si vede dalla tabella I, compaiono solo facce con indici tutti pari (considerando tale anche lo zero). Questo farebbe scartare senz'altro i gruppi O_h^5 e O_h^7 che ammettono anche la comparsa di alcune facce con indici tutti dispari, per scegliere il gruppo O_h^8 , che ammette invece, come nel caso nostro, la comparsa solo di facce con indici tutti pari (ritenendo, come abbiamo detto, tale anche lo zero).

Non riportiamo per brevità le coordinate degli atomi. Secondo questa struttura ogni ione tellurico occupa il centro di un cubetto di lato $a/4$, avendo tangenti intorno a sè e disposti secondo i vertici di un ottaedro regolare, il cui centro sia appunto l'ione Te^{+6} , i sei gruppi OH^- . Tutto questo complesso è iscritto, come si è detto, in un cubetto di lato $a/4$.

I valori dell'intensità teorica ottenuti per le varie facce secondo questa struttura sono riportati nell'ultima colonna della tabella I.

Paragonandoli con la intensità osservata si rileva che l'accordo è sufficiente per assegnare all'acido tellurico la detta struttura.

Il diametro dell'ione tellurico esavalente risulta di $0,83_2 \text{ \AA}$; quello del gruppo OH^- $2,01_6 \text{ \AA}$. La struttura rilevata obbliga ad attribuire all'acido tellurico la formula H_6TeO_6 , o meglio $Te(OH)_6$, scartando la formula $H_2TeO_4 \cdot 2H_2O$.

Analogamente, ai tellurati in cui due soli atomi di H sono sostituiti da atomi di metallo, si deve attribuire la formula $Me_2H_4TeO_6$ (indicando con Me un atomo di metallo monovalente) e non $Me_2TeO_4 \cdot 2H_2O$.

Riassunto. — 1. Viene esaminata coi raggi X, col metodo delle polveri, la modificazione cubica dell'acido tellurico, allo scopo di dedurre in base alla struttura reticolare del composto la formula che si deve attribuirgli, se H_6TeO_6 oppure $H_2TeO_4 \cdot 2H_2O$.

2. Il lato della cella elementare risulta $a = 15,68 \pm 0,01 \text{ \AA}$; la densità calcolata 3,158; la cella elementare contiene 32 molecole del composto. Viene determinata la sua struttura reticolare e provata in base al calcolo dell'intensità teorica delle linee comparse nei fotogrammi. La disposizione degli atomi nel reticolo avviene secondo il gruppo spaziale O_h^8 .

3. La disposizione, nello spazio, di ognuna delle 32 molecole di acido tellurico che entrano nella cella elementare, è rappresentabile mediante un ottaedro regolare di cui l'ione Te^{+6} occupa il centro e i 6 gruppi OH^- , tangenti ad esso, i vertici. Questo ottaedro è iscritto in un cubetto di lato $a/4$. La struttura rilevata mostra che la sola formula ammissibile per l'acido tellurico è H_6TeO_6 .

NOTA. — Dopo chiusa la redazione del presente lavoro è venuta a nostra conoscenza la Nota di B. GOSSNER e O. KRAUS (« Zeitschr. f. Kristallogr. », 88, 298, 1934) sulla struttura della modificazione cubica dell'acido tellurico col metodo del cristallo rotante. I risultati sperimentali di questi autori coincidono in modo perfetto coi nostri (Gossner e Kraus $\bar{A} = 7.83$; Passerini e Rollier $\bar{A} = 15,68 = 7.82 \times 2$). Essi però danno un'interpretazione diversa dalla nostra, secondo la quale la disposizione degli atomi nel reticolo avverrebbe secondo il gruppo spaziale O_h^8 , in una cella di lato metà della nostra, contenente 4 molecole di acido tellurico. La struttura proposta da questi autori non è da loro provata col calcolo della intensità teorica delle linee comparse nei fotogrammi. Noi riteniamo più attendibile la nostra conclusione e ci riserbiamo di discuterla in una prossima Nota.

Chimica. — *L'acido xanturenico* ⁽¹⁾. Nota I di L. MUSAJO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. BARGELLINI.

È noto come S. Baglioni ⁽³⁾ tenendo i ratti albinì ad alimentazione iperproteica (albume d'uovo) abbia osservato la comparsa di una colorazione verde nelle urine, dopo circa un mese dall'inizio di tale alimentazione. Questa colorazione sparisce alcalinizzando o acidificando le urine e ritorna per neutralizzazione. Galamini ⁽⁴⁾ continuando ad occuparsi dell'argomento ha anche largamente studiato le condizioni in cui il fatto si verifica, le relazioni esistenti fra comparsa della colorazione verde e natura della proteina ingerita, l'influenza della somministrazione contemporanea di alcool ⁽⁵⁾.

Perrini ⁽⁶⁾ inoltre ha messo in evidenza che la colorazione verde compare prima, presentando anche intensità di colore molto maggiore, nelle urine di ratti alimentati con fibrina, che non in quelli alimentati con caseina o ovalbumina.

Sulle urine provenienti da ratti così alimentati, io nel 1930 ho fatto la prima osservazione dalla quale hanno avuto sviluppo le presenti ricerche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università « Benito Mussolini », Bari.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) BAGLIONI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », V, II, fasc. 8 (1927).

(4) GALAMINI, « Arch. Farm. Sper. e Sc. Affini », p. 215 (1928).

(5) Per ricerche su diete iperproteiche vedi anche RONDONI, « Arch. Ist. Bioch. It. », II, 243 (1930).

(6) PERRINI, « Bollettino dell'Accademia Pugliese di Scienze », Rendiconti delle sedute 1930, e « Rend. Acc. Lincei », 8, 520, 1933.

Osservai infatti ⁽¹⁾ che per aggiunta di qualche goccia di soluzione diluita di solfato ferroso le urine debolmente o affatto verdi si colorano intensamente in verde, ed in quelle già verdi la colorazione aumenta di molto. Anche questa colorazione, per così dire artificiale, scompare per acidificazione o alcalinizzazione e ricompare neutralizzando. Le urine danno pure nettamente la reazione di Millon e con acido diazobenzol-solfonico alcalino si colorano intensamente in rosso (diazoreazione). Queste ricerche che furono per qualche tempo rimandate sono state da me riprese e in varie comunicazioni ⁽²⁾ ho reso noto di aver dalle urine in parola isolato la sostanza che dà la intensissima colorazione col solfato ferroso. Tale sostanza dà anche le altre due reazioni osservate nelle urine: colorazione rossa intensa con acido diazobenzolsolfonico alcalino e reazione di Millon.

Per le ricerche su questa sostanza sono state finora lavorate parecchie diecine di litri di urine ottenute alimentando ratti albinì quasi esclusivamente con fibrina ⁽³⁾. Dopo pochi giorni da tale alimentazione le urine, che sono ancora di colore presso a poco normale, cominciano a presentare positiva la reazione col solfato ferroso e vengono raccolte. Vari procedimenti sono stati tentati per isolare la sostanza prima di riuscire nello scopo, accennerò solo che molto utile è stata la reazione con il solfato ferroso, che ha permesso di seguire la sostanza nei vari trattamenti dell'urina, e che buoni risultati si sono avuti defecando con idrato di bario, eliminando l'eccesso di questo, evaporando ed estraendo il residuo prima con acetore e poi con alcool metilico ⁽⁴⁾. La soluzione metilica concentrata lascia depositare una piccola quantità di sostanza che è quella cercata. Opportunamente purificata si è dimostrata essere un sale sodico: da questo è stato ottenuto l'acido corrispondente sciogliendolo in acqua e acidificando con acido solforico diluito. Si ottiene così una sostanza microcristallina giallo-solfo, che purificata fonde a 286°, il cui studio ha fornito i seguenti dati: 1°) L'analisi conduce alla formula $C_{10}H_7O_4N$; è pochissimo solubile nei vari solventi, si scioglie facilmente negli idrati e carbonati alcalini fornendo soluzioni gialle dalle quali precipita per acidificazione ed in questo modo è stato purificata. Si scioglie in acido cloridrico diluito a caldo e a freddo cristallizza inalterata, si scioglie pure in alcool e acido acetico glaciale contenenti piccole quantità di acido cloridrico; 2°) Con il reattivo di Millon colorazione rossa; con l'acido diazobenzolsolfonico alcalino colorazione rosso rubino intensa; con il solfato ferroso colorazione verde intensissima. Per osservare quest'ultima occorre portare

(1) MUSAJO, « Boll. dell'Acc. Pugliese di Scienze », Anno IV, fasc. I, dicembre 1930.

(2) MUSAJO, « Atti della XXII Riunione della Soc. It. Progresso Scienze, Sezione di Chimica e Sezione di Fisiologia », Bari, ottobre, 1933; « Atti del IX Congresso Internazionale di Chimica pura e applicata », Madrid, aprile, 1934.

(3) La fibrina è stata fornita a questo Istituto dal Consorzio Macellatori di Milano, che qui ringraziamo vivamente.

(4) Questo metodo può essere leggermente modificato, vedi parte sperimentale.

in soluzione l'acido mediante aggiunta di piccole quantità di bicarbonato sodico; la colorazione è ancora visibile a diluizioni molto grandi (1 : 200.000). Con piccole quantità di cloruro ferrico si ottiene pure colorazione verde però meno intensa che con il solfato ferroso (1); 3° Il sale sodico, di bario e di rame corrispondono alla formula $C_9H_6O_2N - COOMe'$; 4° Con alcool metilico e acido cloridrico gassoso si ottiene l'etere della costituzione $C_9H_6O_2N - COOCH_3$, giallo cristallino, P. F. 262°, solubile negli idrati e carbonati alcalini ed in ammoniaca fornendo soluzioni colorate in giallo; 5° Dall'etere metilico in piridina con cloruro di benzoile si ottiene

un derivato dibenzoilico $C_9H_4O_2N \begin{matrix} \swarrow COOCH_3 \\ \searrow (CO \cdot C_6H_5)_2 \end{matrix}$ a P. F. 171°; 6° Per

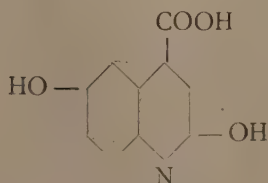
distillazione dell'acido con polvere di zinco in corrente di idrogeno si ottiene un olio ad intenso odore chinolinico, che fornisce in soluzione alcoolica un picrato, che dopo ripetute cristallizzazioni dell'alcool fonde a 200°-201°. Il picrato dà all'analisi numeri concordanti per il picrato di chinolina ed il punto di fusione misto con questo resta invariato; 7° Riscaldando l'acido al disopra del suo punto di fusione perde una sola molecola di anidride carbonica. Estruendo il residuo con acido cloridrico diluito si ottiene un cloridrato che cristallizza dall'acido cloridrico diluito e che all'analisi ha dimostrato possedere la formula $C_9H_7O_2N \cdot HCl \cdot H_2O$ (seccato $C_9H_7O_2N \cdot HCl$) dal quale per mezzo dell'acetato sodico si ottiene la base, che purificata, si presenta in aghetti bianchi, dà numeri corrispondenti per $C_9H_7O_2N$ e fonde oltre 300°; 8° La base o il suo cloridrato danno: a) con piccola quantità di cloruro ferrico colorazione verde azzurra che con una goccia di bicarbonato sodico o ammoniaca diventa violetta; b) con il reattivo di Millon colorazione rossa già a freddo, che aumenta di molto per riscaldamento; 9° Dal cloridrato della base per azione del cloruro di benzoile in piridina si ottiene un derivato dibenzoilico che cristallizza dall'alcool in aghetti incolori fondenti a 178° che all'analisi dà numeri concordanti per $C_9H_5O_2N = (CO \cdot C_6H_5)_2$.

Dall'esame di questi dati si rileva dunque la presenza nell'acido $C_{10}H_7O_4N$ del nucleo chinolinico e di un solo carbossile, si rileva anche che tanto l'acido che la base da esso ottenuta per decarbossilazione hanno contegno di sostanze ossidrilate. Che poi gli ossidrili siano due, mentre lo si intravede dalla composizione del derivato dibenzoilico dell'etere metilico, viene confermato anche dall'analisi della base, del suo cloridrato e del suo derivato dibenzoilico. Tutto ciò porta ad attribuire all'acido $C_{10}H_7O_4N$, per il quale ho proposto il nome di *acido xanturenico* (2), la costituzione di un acido diossichinolincarbonico.

(1) La colorazione verde che si riscontra direttamente nelle urine è probabile che sia dovuta alla presenza contemporanea nelle urine dell'acido $C_{10}H_7O_4N$ e di piccole quantità di sali di ferro. Le urine in parola contengono effettivamente piccole quantità di sali di ferro come io stesso ho potuto constatare. Ciò sembrerebbe confermato da ricerche di GALLERANI e CHIANCONE, vedi « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », IX, 8, 733 (1934).

(2) Dal colore giallo suo e dei suoi sali e per la sua origine.

Le proprietà dell'acido xanturenico non coincidono però con quelle dei pochi acidi diossichinolincarbonici noti. Fra questi il più interessante è il cosiddetto « β -acido » o acido 2-6-dirossichinolin-4-carbonico,



anch'esso naturale, ottenuto nel 1911 da Suzuki dalla orizanina greggia, ricavata dalla crusca di riso ⁽¹⁾ ed è legato ad alcune ricerche sulle vitamine. La costituzione venne determinata nel 1926 da Sahashi ⁽²⁾ che ne ha fatto la sintesi ⁽³⁾ e ne ha anche studiata la base corrispondente dal punto di vista dell'azione nella polineurite dei piccioni ⁽⁴⁾. Fonde dopo 315° e dà con cloruro ferrico colorazione rosso bruna. L'acido xanturenico ha tuttavia qualche analogia con il β -acido, si mostra ad esempio bibasico alla fenolfaleina, contegno che sta in relazione con la presenza degli ossidrili fenici ed è ricordato nel β -acido che dà un sale di calcio $C_{10}H_7O_4NCa$; dà come il β -acido, sali che contengono molecole di acqua di cristallizzazione che perdono solo a 150°-160° ⁽⁵⁾ ed in cloridrato della 2-6-dirossichinolina cristallizza come quello della base dell'acido xanturenico con una molecola di acqua di cristallizzazione ⁽⁶⁾.

La parte sperimentale sarà estesamente pubblicata altrove.

(1) « Biochem. Z. », 43, 89.

(2) « Biochem. Z. », 168, 69; « Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Resear. », Tokio, maggio, 1926.

(3) « Biochem. Z. », 189, 208.

(4) « Chem. Zentralbl. », 1928, I, 87.

(5) SAHASHI, « Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Resear. ». Tokio, maggio 1926, p. 218.

(6) SAHASHI, « Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Resear. ». Tokio, gennaio 1927, p. 194. Anche il cloridrato della 2-8 diossichinolina fa lo stesso (DIAMANT, « Monatsh. », 16 (1885), p. 764.

Chimica. — *Influenza di anelli esatomici sulla viscosità delle soluzioni di polimeri a molecole filiformi*⁽¹⁾. Nota di S. BEZZI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Staudinger e collaboratori⁽³⁾, nella numerosa serie dei loro lavori intesi a chiarire la costituzione dei polimeri organici naturali e sintetici a molecole filiformi, sono giunti a stabilire che le misure di viscosità di soluzioni diluite permettono determinazioni di pesi molecolari quando sostanze omeopolari siano sciolte in solventi omeopolari.

In una serie omologa di polimeri, in cui si ha sola differenza nel grado di polimerizzazione, essendo i vari pesi molecolari multipli del peso della molecola base costituente i polimeri stessi, la viscosità cresce proporzionalmente al peso molecolare.

Tale proporzionalità, è espressa dalla formula $\frac{\eta_{sp}}{c} = K_m \times M$, dove M è il peso molecolare del polimero, K_m la costante di proporzionalità, e $\frac{\eta_{sp}}{c}$ la viscosità specifica della soluzione molare-base, della soluzione cioè che in un litro contiene sciolto il peso della molecola base del polimero.

Dimostrarono inoltre che, per soluzioni equiconcentrate di polimeri di diversa natura, la viscosità specifica è indipendente o quasi dal diametro delle molecole, ma proporzionale alla loro lunghezza.

Le soluzioni al 1.4 % delle paraffine a catena normale (come molecola base in esse si considera il $-\text{CH}_2-$) hanno viscosità uguale alle soluzioni 1.4 % di un qualsiasi polimero a molecole della stessa lunghezza, qualunque sia la natura, la complessità e il numero dei gruppi in catena laterale, e quindi qualunque sia il diametro di queste ultime molecole e qualunque sia il peso molecolare, sia che si tratti di composti saturi o non saturi, idrocarburi o polieteri o poliesteri ecc.

La relazione molto semplice, fra la viscosità specifica e la lunghezza delle molecole è espressa dalla formula $\eta_{sp(1.4\%)} = n \times y$ dove « y » è la viscosità specifica di un atomo di catena in soluzione 1.4 %, « n » il numero degli atomi formanti la catena principale della molecola filiforme, i cosiddetti atomi di catena.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

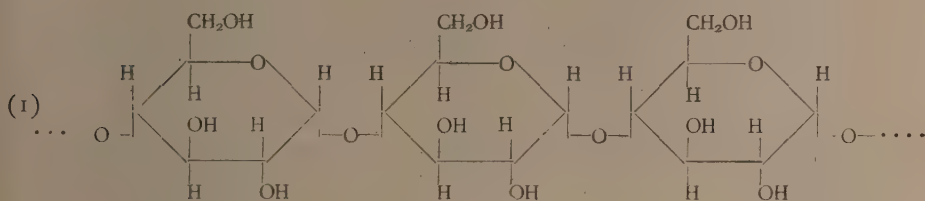
(3) Cfr. p. es.: STAUDINGER, *Die Hochmolecularen Organischen Verbindungen*. Springer, Berlino, 1932.

I valori di « γ » per soluzioni benzeniche variano fra 1.3×10^{-3} e 1.36×10^{-3} , nelle diverse serie di polimeri sino ad ora studiate.

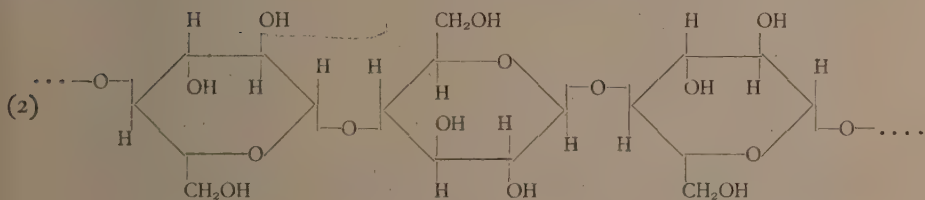
Strettamente unito a questo vi è che le costanti K_m sono diverse per le diverse serie omologhe, ma sono approssimativamente proporzionali al numero degli atomi delle molecole basi che contribuiscono all'aumento di lunghezza della molecola del polimero: il quoziente tra K_m e tale numero di atomi dà la nuova costante $K_{eq.}$, il cui valore è appunto uguale nelle diverse serie omologhe: per paraffine normali, poliprene, poliprano, poliisobutilene, polistirolo, poliindene ecc., ad es., si ha il valore medio di 0.83×10^{-4} (1).

Eccezioni importanti a questa uguaglianza di $K_{eq.}$ nelle diverse serie di polimeri si hanno per l'amido e la cellulosa.

Secondo le più recenti ricerche (2) le formule di questi due composti sono le seguenti:



Amido



Cellulosa

A parità di peso molecolare le soluzioni equiconcentrate di amido e di cellulosa e dei loro derivati dovrebbero avere la stessa viscosità e avrebbero dovuto perciò essere uguali le due costanti K_m e $K_{eq.}$.

Dato che la molecola base, glucosio, corrisponde a un incremento di lunghezza del polimero pari a circa 5 atomi di una paraffina, si dovrebbero avere $K_m = K_{eq.} \times 5 = 0.83 \times 10^{-4} \times 5 = 4.15 \times 10^{-4}$.

È stato trovato sperimentalmente invece per la cellulosa $K_m = 1.6 \times 10^{-4}$ e per l'amido $K_m = 2.0 \times 10^{-4}$: questo significa che la viscosità per la cellulosa è più del doppio della prevista e per l'amido meno della metà.

(1) « Ztschr. Elektrochem. », 40, 442, 1934.

(2) HAWORTH, « Ber. », 65, 58, 1932.

Così ad es. un amido del peso molecolare medio di 10.000 ha in soluzione molare base $\frac{\eta_{sp}}{c} = 2$ mentre una soluzione di ugual concentrazione di una cellulosa di ugual peso molecolare ha viscosità quasi 6 volte maggiore: $\frac{\eta_{sp}}{c} = 11.6$.

Ho detto che per tutte le altre serie omologhe di polimeri sino ad ora studiate, la viscosità in soluzione 1.4 % per un atomo di catena è circa 1.33×10^{-3} ; per la cellulosa si trova invece una media di 2.78×10^{-3} e per l'amido 0.6×10^{-3} .

Lo Staudinger spiega il valore troppo piccolo delle viscosità per l'amido ammettendo che le molecole di questo in soluzione non abbiano la massima lunghezza che loro competerebbe se avessero struttura rigida filiforme secondo la formula (1), ma siano invece accorciate assumendo struttura meandriforme per reciproche attrazioni delle singole molecole di glucosio.

Ne risultano così molecole più corte e più grosse e poichè la viscosità non è funzione del diametro, ma solo della lunghezza risulta viscosità più bassa della teorica.

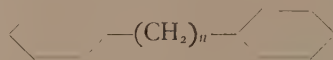
La viscosità troppo elevata che hanno le soluzioni della cellulosa e derivati dipende, sempre secondo Staudinger, da un incremento dovuto agli anelli piranici.

La viscosità delle soluzioni di cellulosa al 1.4 % non è quindi data dalla formula $\eta_{sp(1.4\%)} = 1.33 \times 10^{-3} \times \zeta n$, dove « n » è il grado di polimerizzazione, ma dalla $\eta_{sp(1.4\%)} = 1.33 \times 10^{-3} \times \zeta n + nx$ dove « x » è l'incremento di viscosità dovuto a un anello piranico: in media si ha $x = 9.0 \times 10^{-3}$ (1).

Era però da dimostrare che tale incremento è dovuto realmente alla struttura ad anello esatomico della molecola base e non ad altre cause, ad esempio il gran numero degli ossidrili i quali potrebbero provocare la formazione di aggregati associativi delle macromolecole, analoghi a quelli che si hanno negli acidi poliacrilici.

Tale dimostrazione è stata portata dallo Staudinger e collaboratori in alcuni casi e cioè per composti sintetici a basso e ad alto peso molecolare.

Le ricerche su composti a basso peso molecolare del tipo

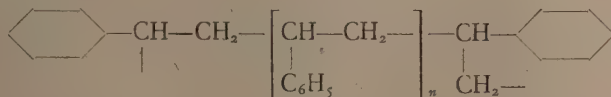


dove « n » varia da 2 a 9 e gli anelli delle estremità sono o due fenili o due cicloesili, hanno dimostrato che ogni anello cicloesano porta un incremento pari a 2.2×10^{-3} in soluzione benzoica e 4×10^{-3} in soluzione

(1) STAUDINGER, libro cit., p. 469.

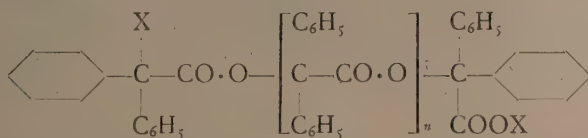
di CCl_4 , mentre a anello benzoico spetta nei due solventi rispettivamente un incremento di 3.5×10^{-3} e 3.9×10^{-3} (1).

Anche per composti ad alto peso molecolare è stata data la dimostrazione che gli anelli benzenici all'estremità della catena portano un incremento di viscosità; così per il polistirolo (2)



è stato dimostrato che mentre tutti i nuclei benzenici in catena laterale sono senza influenza sulla viscosità, soltanto i due dell'estremità, che portano un aumento della lunghezza della catena, provocano un incremento di viscosità uguale a 8.8×10^{-3} .

Analogamente per il poliossidifenilchetene (3) la cui costituzione è



è stato dimostrato che solo ai due anelli benzoici dell'estremità compete un incremento di viscosità uguale a 5×10^{-3} .

Inoltre misure di Ruzicka (4) dimostrarono che anche per macroanelli, cioè formati da 15 a 34 atomi, si hanno incrementi dovuti a tale particolare struttura che vanno da 4.8×10^{-3} a 19×10^{-3} .

Può essere così ritenuto esaurientemente dimostrato che l'incremento di viscosità osservato per la cellulosa è esclusivamente dovuto agli anelli in essa presenti?

Per diversi motivi è da ritenere che ciò non sia:

1° L'incremento trovato per gli anelli esatomici negli idrocarburi a basso peso molecolare è molto più piccolo; il valore quasi uguale trovato nei composti ad alto peso molecolare non è sufficientemente probatorio, perchè in questi troppo elevata è la viscosità dovuta al resto della molecola rispetto a quella dei gruppi terminali, e può sorgere il dubbio che i valori di questo incremento siano da considerarsi non strettamente rigorosi.

2° L'incremento trovato si riferisce ad anelli ad estremità di catena e mai, come invece si ha per la cellulosa, a catene costituite da successioni di anelli. E non è detto che l'incremento di un anello sia lo stesso quando questo si trova al centro o all'estremità di una catena.

(1) «Ztschr. Elektrochem.», 40, 438 (1934).

(2) STAUDINGER, libro cit., p. 157.

(3) STAUDINGER e BEZZI: in corso di pubblicazione.

(4) «Zeitschr. Elektrochem.», 40, 439.

Quindi se può ritenersi dimostrato che in alcuni casi esiste un'incremento di anello, non è ancora dimostrato esaurientemente che l'incremento riscontrato per la cellulosa sia da attribuirsi agli anelli piranici in essa presenti e solo a questi.

Lo scopo delle presenti ricerche è appunto quello di studiare un idrocarburo polimero sintetico, costituito da una successione di nuclei aromatici, in modo che la sua molecola possa esser considerata come modello di quella proposta per la cellulosa: dato che le relazioni tra viscosità e pesi molecolari negli idrocarburi sono sempre le più semplici, è da ritenere poter giungere così a stabilire esattamente quale è l'influenza degli anelli esatomici non in catena laterale ma come costituenti integrali della molecola. Ho scelto a tale scopo il polibenzile.

La formazione dell'idrocarburo polimero $(C_6H_4-CH_2)_n$ per eliminazione di HCl dal cloruro di benzile per azione di diversi catalizzatori quali Cu, Ag, Zn, $AlCl_3$, $FeCl_3$, $ZnCl_2$, ecc. è nota da tempo, ma sino ad oggi naturalmente le conoscenze erano limitate a formula bruta, solubilità e punto di fusione.

A seconda del catalizzatore usato e delle condizioni sperimentali il prodotto della polimerizzazione è incolore o colorato più o meno intensamente dal giallo al rosso scuro, con fluorescenza verde⁽¹⁾.

Zincke⁽²⁾ facendo reagire il cloruro di benzile sul toluolo in presenza di vari catalizzatori, ottenne quasi quantitativamente parabenziltoluolo accanto a pochissimo orto-benziltoluolo: è da ritenersi che analogamente nella sintesi del polibenzile sia l'idrogeno in para che viene eliminato e l'attacco della molecola del polimero sia quasi esclusivamente in para. Si può quindi con quasi certezza attribuirgli la formula:



La dimostrazione sperimentale di ciò sarà oggetto di ricerche in corso.

Parte sperimentale.

POLIMERIZZAZIONE. — Per ottenere prodotti a diversi gradi di polimerizzazione vennero fatti agire a diverse temperature diversi catalizzatori (Zn , $Zn + ZnCl_2$, $AlCl_3$) sul cloruro di benzile puro o diluito con solfuro di carbonio o con etere di petrolio.

Dalla massa di reazione il catalizzatore veniva asportato lavando prima con acido nitrico diluitissimo e poi con acqua. Una parte del prodotto di

(1) Cfr.: « Ber. », 2, 739 (1869); « Ber. », 17, 833 (1884); « Ber. », 28, 1135 (1895); « C. », 1929, 464; « Bl. » (2), 43, 415; « C. », 1904, 1135.

(2) « Ann. », 161, 93.

reazione (la quasi totalità nelle polimerizzazioni fatte in soluzioni di CS_2 con catalizzatore AlCl_3) è insolubile in tutti i solventi organici, forse per un grado molto elevato di polimerizzazione; è noto che in ogni serie di polimeri la solubilità diminuisce col crescere del peso molecolare. La parte solubile venne purificata precipitandola con alcool dalla soluzione in benzolo. I polimeri a peso molecolare più basso, solubili anche in alcool, si purificarono precipitandoli ripetutamente dalle soluzioni alcooliche con acqua.

DETERMINAZIONI CRIOSCOPICHE. — Il peso molecolare di alcuni dei polimeri solubili in benzolo fu determinato usando un termometro Beckman diviso in 0.001 di grado: i risultati sono raccolti nella tabella I.

TABELLA I.

Determinazioni crioscopiche in benzolo. (Solvente gr. 30.78).

N.	Polimero gr.	%	Δ	Peso molecolare medio	Grado medio di polimerizzazione
1	0.2820	0.917	0.106	445	5.0
2	0.2922	0.950	0.067	730	8.1
3	0.2770	0.900	0.050	926	10.3
	0.3715	1.207	0.063	985	11.0
5	0.3695	1.202	0.054	1145	12.7
6	0.3370	1.095	0.048	1172	13.0
7	0.3910	1.270	0.036	1815	20.0
8	0.4428	1.438	0.040	1850	20.6
9	0.2346	0.763	0.019	2060	23.0
10	0.4450	1.447	0.028	2660	29.5

VISCOSITÀ. — Le viscosità furono misurate con un viscosimetro di Ostwald nel quale cc. 0.5 di benzolo a 20° impiegano 238' a passare. Ho fatto misure a diverse temperature e a diverse concentrazioni e da queste è risultato che le sostanze in esame si comportano in modo normale: la viscosità specifica è proporzionale alle concentrazioni e i rapporti fra le viscosità a 60° e a 20° sono compresi fra 0.80 e 0.90, essendo al solito maggiore per i polimeri a più elevato grado di polimerizzazione. Riporto nella tabella II i valori della viscosità a 20°, che sono quelli necessari per il calcolo della costante K_m , riservando a una prossima pubblicazione gli altri risultati.

Nella tabella III sono riporti i valori delle costanti K_m e K_{eq} .

TABELLA II.

Viscosità in benzolo a 20°.

N.	%	Molarità (c)	η_{sp}	$\frac{\eta_{sp}}{c} = \eta_{sp}(9^{\circ}/_{10})$	$\eta_{sp}(1.4^{\circ}/_{10})$
1	2.714	0.3018	0.055	0.182	0.028
2	2.415	0.2683	0.080	0.300	0.047
3	2.743	0.3047	0.108	0.356	0.055
4	1.380	0.1533	0.060	0.395	0.061
5	1.050	0.1166	0.049	0.440	0.068
6	1.798	0.1958	0.094	0.465	0.072
7	1.578	0.1755	0.135	0.770	0.120
8	1.872	0.2079	0.160	0.769	0.120
9	1.776	0.1972	0.156	0.793	0.123
10	1.832	0.2035	0.235	1.050	0.163

TABELLA III.

N.	Grado medio di polimerizzazione	Peso molecolare medio	$\eta_{sp}(9^{\circ}/_{10})$	$K_m \times 10^4$	$K_{eq} = \frac{K_m}{5} \times 10^4$	n	$\gamma = \frac{\eta_{sp}(1.4^{\circ}/_{10})}{n}$
1	5.0	445	0.182	4.09	0.82	25	1.13×10^{-3}
2	8.1	730	0.300	4.11	0.82	40	1.15 »
3	10.3	926	0.356	3.85	0.77	51	1.07 »
4	11.0	985	0.395	4.01	0.80	55	1.11 »
5	12.7	1145	0.440	3.84	0.77	63	1.08 »
6	13.0	1172	0.465	3.97	0.79	65	1.11 »
7	20.0	1816	0.770	4.25	0.85	100	1.20 »
8	20.6	1850	0.769	4.15	0.83	103	1.16 »
9	23.0	2060	0.793	3.85	0.77	115	1.07 »
10	29.5	2660	1.050	3.95	0.79	147	1.11 »
Media . . .				4.01	0.80		1.12×10^{-3}

Come si vede il valore trovato per $K_{eq} = 0.80 \times 10^{-4}$ è circa uguale a quello di tutti gli idrocarburi non contenenti nuclei in catena (0.83×10^{-4}). E anche il valore trovato per $\gamma = 1, 12 \times 10^{-3}$ è quasi uguale, e cioè leggermente inferiore, a quello medio per gli idrocarburi senza anelli in catena

Ciò dimostrerebbe che gli anelli benzenici della molecola del polibenzile non portano nessun incremento di anello alla viscosità: se a tutti i nuclei benzenici competesse un incremento uguale a quello trovato per il polistirolo e per il poliossidifenilchetene la costante K_m dovrebbe avere un valore più che doppio:

Se si avesse questo incremento il valore della costante, per il polimero a grado di polimerizzazione ad esempio 20 e a peso molecolare 1800 sarebbe:

$$\eta_{sp(1.4\%)} = 20 \times (5 \times 1.33 \times 10^{-3}) + 20 \times 0.005 = 0.133 + 0.100 = 0.233.$$

$$\eta_{sp(9\%)} = \frac{0.233 \times 9}{1.4} = 1.50, \quad K_m = \frac{\eta_{sp(9\%)}}{M} = \frac{1.50}{1800} = 8.34 \times 10^{-4}.$$

La differenza fra i valori di K_m trovati e quelli che si calcolerebbero se i nuclei portassero un incremento alla viscosità è troppo forte perchè possa essere attribuibile ad errori sperimentali; d'altra parte l'errore più probabile, la presenza di impurezze a basso peso molecolare, avrebbe provocato sì un abbassamento di viscosità, ma un abbassamento ancor maggiore nel peso molecolare e quindi un innalzamento di K_m ; cioè un errore contrario.

Possono quindi essere avanzate le seguenti spiegazioni:

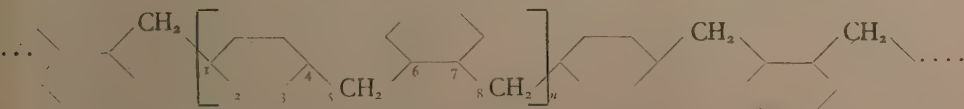
1° Idrocarburi a nuclei aromatici in catena hanno le stesse viscosità delle paraffine di uguale lunghezza. Non vi è quindi nessun incremento per gli anelli esatomici e i valori elevati della costante K_m della cellulosa devono essere attribuiti ad altre cause.

2° Il polimero formato non ha costituzione ammessa a molecole filiformi, ma è costituito da un macroanello ad esempio:



Le molecole avrebbero le loro lunghezze ridotte a metà e quindi pure a metà si ridurrebbero i valori delle viscosità e di K_m (1).

3° Le molecole sono filiformi, ma l'attacco dei radicali benzilici non è solo in para, ma anche in orto: ammettendo per esempio un attacco alternato orto-para la costituzione dei polimeri sarebbe schematicamente:



(1) Questo naturalmente nell'ipotesi poco probabile che non si abbia un incremento per il macroanello (cfr. ad esempio STAUDINGER, «Ztschr. Elektrochem.», 40, 438 (1934), e quanto è detto precedentemente sulle ricerche di Ruzicka).

I nuclei benzenici uniti in orto si considerano in catena laterale, quelli in para in catena normale; questi ultimi soltanto possono portare un incremento alla viscosità.

Se si calcola ora per un polimero a grado di polimerizzazione ad esempio 20, la costante K_m , e per facilità di calcolo si consideri il polimero come formato ad esempio di 10 gruppi uguali a quello scritto in parentesi quadra (per ognuno di questi abbiamo viscosità per otto atomi in catena e un incremento per un nucleo benzenico) si ottiene:

$$\eta_{sp}(1.4\%) = 10 \times (8 \times 1.33 \times 10^{-3}) + 10 \times 0.005 = 0.107 + 0.050 = 0.157$$

$$\eta_{sp}(9\%) = \frac{9 \times 0.157}{1.4} = 1.01, \quad K_m = \frac{\eta_{sp}(9\%)}{M} = \frac{1.01}{1800} = 5.6 \times 10^{-4}$$

Come si vede pur avendo considerato che l'anello benzenico unito in orto non porti nessun incremento, ciò che è poco verosimile, si arriva lo stesso ad un valore del K_m più alto del trovato 4.01×10^{-4}

Si arriverebbe ad un valore della costante uguale al trovato soltanto ammettendo che l'unione in orto sia preponderante: ma questo, come ho già detto, è poco probabile.

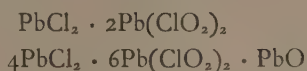
Si può quindi concludere che più verosimile è la prima ipotesi: i nuclei aromatici in catena si comportano come quelli in catena laterale e non portano incremento alla viscosità.

Ulteriori ricerche in corso porteranno nuovi dati sperimentali a convalidare questa asserzione.

Chimica. — *Clorito di piombo: sali doppi e basici*⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e G. PEYRONEL presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Uno di noi ha già avuto occasione di occuparsi del clorito di piombo in precedenti lavori: si tratta di un sale particolarmente stabile, di confronto agli altri cloriti, ed era noto fin dalle prime ricerche di Millon; recentemente è stato studiato cristallograficamente⁽³⁾.

Sali doppi. — Nella vecchia letteratura abbiamo un lavoro di J. Schiel⁽⁴⁾ che avrebbe ottenuto dalle acque madri della cristallizzazione di $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ i seguenti due composti:



così riportati nel Gmelin⁽⁵⁾. Lo stesso Schiel ammette però nella nota originale che il PbO debba considerarsi come in miscela per cui si concluderebbe per l'esistenza di due sali doppi nei rapporti 1 a 2 e 2 a 3. L'esistenza di questi composti appariva verosimile; per il primo si poteva pensare che un atomo di Pb funzionasse da centro del complesso con numero di coordinazione 6 e quindi anche sperare in un alto grado di simmetria cristallina.

Abbiamo perciò preso in esame questi composti ma, come risulta dalla parte sperimentale sotto riportata, siamo venuti alla conclusione che entrambi i composti descritti da Schiel non esistono; si forma invece abbastanza facilmente, ed in modo ben netto, il composto $\text{PbCl}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ che ha una struttura cristallina sua propria riconoscibile e al microscopio e al roentgenogramma corrispondente.

Il composto analogo col bromuro di piombo, $\text{PbBr}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$, si forma altrettanto bene, ma è molto meno stabile; quello con l'ioduro di piombo non si lascia preparare perchè si ha subito energica ossidazione, prima con liberazione di iodio, poi ossidazione di questo.

Preparazioni con eccesso di clorito o di alogenuro hanno sempre mostrato il componente in eccesso inalterato, senza variazione nella com-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) «Zeit. f. Krist.», 76, 431 (1931).

(4) «Liebigs Annalen», 109, 317-25 (1859) largamente riassunto in «C. B.», 593-5 (1859).

(5) Gmelin, 7^a ed., IV/2, p. 355 (1924).

posizione del sale doppio. Questi composti possono essere messi in relazione con quelli già ottenuti da uno di noi ⁽¹⁾ per i cloriti di K, NH₄, Rb e Cs con CuCl₂ e che hanno la composizione MeClO₂ · CuCl₂.

La preparazione del sale doppio PbCl₂ · Pb(ClO₂)₂ può essere eseguita mescolando le soluzioni calde dei due sali, ma il complesso è più solubile dei componenti; si forma perciò meglio mescolando, anche a temperatura ordinaria, i due sali nei rapporti indicati in presenza di poca acqua; se si adopera un eccesso di PbCl₂ questo si può eliminare abbastanza facilmente per lavaggio e se l'eccesso non è molto forte, rimane direttamente nelle acque madri. Pb(ClO₂)₂ in eccesso non si può invece eliminare per lavaggio perchè il clorito è meno solubile del sale doppio. Le tavolette del clorito si rivelano facilmente al microscopio per il loro aspetto caratteristico (loc. cit.) anche se sono presenti in piccolissima quantità. I roentgenogrammi del preteso composto PbCl₂ · 2Pb(ClO₂)₂ mostrano del resto evidentissime le linee del clorito di piombo mentre quelli del prodotto PbCl₂ · Pb(ClO₂)₂ si mostrano caratteristici e nettamente diversi da quelli dei sali semplici. Appare superfluo riportare le letture dei singoli fotogrammi.

PbCl₂ · Pb(ClO₂)₂ è fortemente birifrangente in cristalli gialli privi dei riflessi verdastri, caratteristici del clorito, e dello sviluppo tabulare tipico per quest'ultimo: il sale doppio è più facilmente solubile in acqua del clorito di piombo, ricristallizza inalterato per evaporazione delle soluzioni; allo stato solido è stabile e, anche dopo qualche settimana, non mostra variazioni all'analisi e non rivela odore di vapori clorosi. Esplode per percussione. Analisi:

%	Trovato	PbCl ₂ · Pb(ClO ₂) ₂	Calcolato per		PbCl ₂ · 2Pb(ClO ₂) ₂
			2PbCl ₂ · 3Pb(ClO ₂) ₂		
Pb	66.68-66.75	66.81	65.46		64.59
Cl	21.49-21.66	22.86	22.40		22.10
ClO ₂	21.73-21.77	21.75	25.57		28.04

Facciamo notare che la maggiore solubilità di PbCl₂ porta al lavaggio ad una leggera perdita in esso, con conseguente diminuzione nelle percentuali di Pb e Cl. L'acido cloroso fu determinato trattando il composto con poca acqua, aggiungendo dopo alcuni minuti KI e H₂SO₄ diluito, scaldando mezz'ora a 40° e titolando dopo raffreddamento l'iodio liberato; il piombo fu dosato come solfato e il cloro totale per precipitazione sul filtrato del trattamento con H₂S, con che si elimina il piombo e si riduce contemporaneamente tutto il cloro.

(1) « Gazzetta », 53, 200 (1923).

La preparazione del sale $\text{PbBr}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ si conduce in modo analogo; le principali differenze da osservare sono: il sale è in cristalli giallo oro e cioè ha un colore più intenso e più arancio del precedente, è assai alterabile e in presenza di acqua, dopo 24 ore specie se $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ è in eccesso, si ha decomposizione completa e formazione di PbO_2 . Coi rapporti stechiometrici e operando rapidamente si può conservare il composto quasi inalterato: il prodotto asciugato nel vuoto e fotografato due ore dopo la preparazione mostra ai raggi X un fotogramma identico a quello del composto precedente con un leggerissimo restringimento nella posizione delle linee, cioè aumento della cella, per l'introduzione di Br al posto di Cl.

Appena preparato e asciugato il prodotto ha però già odore di bromo e, come risulta dalle analisi sotto riportate, il tenore di bromo risulta inferiore al calcolato e cioè si giunge ad un % in alogenuro anche qui più basso del previsto, ma per una causa diversa da quella indicata al clorito-cloruro. Analisi:

%	Trovato	Calcolato per		
		$\text{PbBr}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$	$2\text{PbBr}_2 \cdot 3\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$	$\text{PbBr}_2 \cdot 2\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$
Pb	58.59-58.66	58.44	58.85	59.13
Br	20-09	22.54	18.16	15.20
Cl	9-97	9.99	12.08	13.49
ClO_2	19-08	19.02	22.99	25.66

Anche il composto $\text{PbBr}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ è più solubile in acqua dei componenti e si lascia ricristallizzare per evaporazione della sua soluzione acquosa. Conservato allo stato secco, anche nell'oscurità, si decompone continuamente e in uno spazio limitato è possibile osservare, dopo qualche ora, ad occhio l'atmosfera dei vapori di bromo che si producono.

Cloriti basici di piombo. — La preparazione di questi composti è assai delicata perchè, a differenza del clorito neutro, i cloriti basici sono estremamente alterabili e, già a moderato calore, si decompongono imbrunendo con formazione di PbO_2 : la stessa alterazione si verifica più lentamente anche a temperatura ordinaria. Inoltre i cloriti basici sono pochissimo solubili in acqua perciò non si possono ottenere per evaporazione a freddo di soluzioni acquose. Siamo stati quindi costretti a limitarci agli esami microscopico e roentgenografico per stabilire la loro esistenza. Le tre vie seguite nella preparazione sono:

- mescolare l'ossido idrato di piombo col clorito di piombo a freddo in presenza di poca acqua;
- mescolare l'ossido idrato precipitato di fresco col clorito come sopra;

c) aggiungere idrato sodico a freddo in una sospensione di $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ in acqua agitando con precauzione.

Il metodo c) è risultato il migliore; a) è troppo lento e b) non dà prodotti omogenei. Secondo c) se si aggiunge l'idrato alcalino in rapporti inferiori od anche eguali a quello 1:1, cioè per la formazione del composto $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Pb}(\text{OH})_2$, si osserva sempre al microscopio e ai raggi X del clorito neutro inalterato: arrivando invece al rapporto 1:2, cioè per il composto $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{Pb}(\text{OH})_2$, si ottiene un prodotto omogeneo in aghetti corti giallo chiari quasi incolori e si ha la scomparsa completa del clorito neutro. L'esame coi raggi X si accorda con questa osservazione; nel prodotto preparato secondo il rapporto 1:1 si osserva un nuovo reticolo, ma anche diverse linee del sale neutro: col rapporto 1:2 si trovano invece solo le linee del sale basico precedente: una prova di confronto eseguita sull'idrato di piombo ha mostrato che le linee di esso non si rivelano nella preparazione del rapporto 1:2. Resta così stabilita attraverso la doppia identificazione microscopica e roentgenografica la esistenza di un clorito basico di piombo.

Abbiamo fatto degli estratti acquosi a freddo di questi prodotti per cercare di stabilire la composizione del composto, ma il quantitativo disciolto è minimo e non permette di trarre deduzioni; col tempo il quantitativo di sale disciolto aumenta, ma a seguito di alterazione. Non vogliamo escludere la possibilità di esistenza di altri sali basici di piombo, oltre quello così identificato, sebbene l'aver riscontrato un solo roentgenogramma caratteristico renda l'ipotesi poco probabile.

Riassumendo. — Viene dimostrato che i composti $\text{PbCl}_2 \cdot 2\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ e $\text{PbO} \cdot 4\text{PbCl}_2 \cdot 6\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ descritti nella vecchia letteratura e riportati in Gmelin 7^a ed. IV 2^o, p. 365, 1924 non esistono.

Si preparano i sali doppi $\text{PbCl}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ giallo e $\text{PbBr}_2 \cdot \text{Pb}(\text{ClO}_2)_2$ giallo arancio, il primo abbastanza stabile, il secondo autodecomponibile con sviluppo di bromo.

Viene dimostrata l'esistenza di un clorito basico di piombo che ha struttura cristallina caratteristica, ma la cui formula non ha potuto essere dedotta con sicurezza; esso è del tipo $\text{PbClO}_2(\text{OH})$ oppure $\text{Pb}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{Pb}(\text{OH})_2$ o di basicità intermedia.

Chimica. — *Ricerche sull'acido xanturenico.* Nota II di L. MUSAJO, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Genesi dell'acido xanturenico.* Nota III di L. MUSAJO, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — « *Mercallite* » nuovo minerale fra i prodotti dell'attività fumarolica vesuviana del 1933 ⁽¹⁾. Nota di G. CAROBBI presentata ⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Le fenditure incandescenti e stridenti delle lave del maggio-giugno 1933 ed in particolare di quelle del fontanile lavico apertosi il 3 giugno alla base sud del conetto eruttivo nel fondo del cratere vesuviano ⁽³⁾, erano ricche di miscugli salini assai interessanti dal punto di vista mineralogico. Le ricerche eseguite in questo istituto hanno infatti permesso di identificare, nelle miscele a cloruri alcalini, la polialite e la glauberite ⁽⁴⁾, minerali nuovi per il Vesuvio, nonchè cristalli di allumogeno. Fra i prodotti di ferro che imbevevano i blocchi a cloruri e solfati alcalini è stato poi trovato il solfato ferroso esaidrato che sarebbe una specie mineralogica nuova ⁽⁵⁾. Sono anche abbondanti le aftitaliti cuprifere, che stiamo studiando. Notevole è l'assenza di acido borico e di fluoborati ⁽⁶⁾.

In special modo la mia attenzione è stata attirata da una stalattite di colore cilestrino, lunga circa 15 cm., raccolta dopo la pioggia ⁽⁷⁾ sulle lave del fontanile del 3 giugno 1933. Essa conteneva i seguenti ioni: HSO 4', SO 4'', K·, Na·, Ca·, Al· e tracce di rame al quale era dovuto il colore.

La presenza di bisolfati alcalini, per quanto io so, non era mai stata segnalata fra i minerali vesuviani.

In natura si trova un solo minerale contenente bisolfati: la misenite rinvenuta da Arcangelo Scacchi ⁽⁸⁾ (sotto forma di croste costituite da fasci

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) Le lave scaturite dal fontanile apertosi il 3 giugno 1933 alla base sud del conetto eruttivo nel cratere vesuviano, dopo aver notevolmente elevato la parte orientale del fondo craterico, si sono riversate dall'orlo N. E. del cratere in Valle dell'Inferno e verso la fine di novembre cominciarono a discendere verso Terzigno. Secondo calcoli di Malladra alla fine del 1933 il fontanile aveva già dato circa 13 milioni di metri cubi di lava che sul suo percorso ha formato caverne, cunicoli e voccolilli.

(4) « Annali del R. Osservatorio Vesuviano », ser. 4^a, vol. 3^o, p. 73 (1934).

(5) « Annali del R. Osservatorio Vesuviano », ser. 4^a, vol. 3^o, p. 83 (1934).

(6) Per i fluoborati, vedi: G. CAROBBI, *Sulla presenza di un nuovo minerale fra i prodotti dell'attività fumarolica del Vesuvio*. « Periodico di Mineralogia », vol. 4^o, p. 3. (1933).

(7) Dal prof. A. MALLADRA, direttore del R. Osservatorio Vesuviano, che qui vivamente ringrazio.

(8) *Memorie geologiche sulla Campania*. III. « Rend. R. Accad. delle Scienze di Napoli », 1849, fasc. 4^o, p. 322.

di sottilissimi cristalli fibrosi) nella grotta dello zolfo a Capo Miseno presso Napoli e studiata da Zambonini⁽¹⁾ che la ritenne monoclina e le assegnò la formula: $K_2SO_4 \cdot 6KHSO_4$.

Si tratta cioè di cristalli identici a quelli del corrispondente composto artificiale monoclini preparati da Wyruboff⁽²⁾ e poi da Stortenbeker⁽³⁾ che per primo dimostrò che essi, effettivamente, avevano la formula del sale doppio fra solfato neutro e solfato acido e non corrispondevano ad una fase monoclina del bisolfato potassico come aveva pensato Marignac.

Le ricerche che sotto espongo hanno accertata la presenza, nel miscuglio costituente la stalattite vesuviana, di cristalli del composto rombico $KHSO_4$ che deve quindi considerarsi come una nuova specie minerale per la quale propongo il nome di « *mercallite* » per ricordare l'illustre Direttore del Reale Osservatorio Vesuviano prof. Giuseppe Mercalli⁽⁴⁾ ben noto studioso dei terremoti e di tutte le manifestazioni dei vulcani italiani ed in particolare del Vesuvio.

I risultati dell'analisi quantitativa del miscuglio salino costituente la stalattite in esame sono i seguenti:

	%	Rapporti molecolari
HSO_4'	65.68	0.676
SO_4''	4.25	0.044
K.	21.99	0.562
Na.	3.67	0.159
Cu.	0.77	0.012
Ca.	0.25	0.006
Al.	0.12	0.004
$H_2O_{su} CaCl_2^{(5)}$	1.81	
$H_2O_{a} 110^\circ$	0.64	
Residuo ins. in H_2O	0.57	
Somma	99.75	

La miscela per riscaldamento fonde e poi svolge anidride solforica, comportamento caratteristico dei bisolfati.

(1) *Su alcuni minerali della grotta dello zolfo a Miseno.* « Rend. R. Accad. Scienze di Napoli », fasc. 12°, dicembre 1907.

(2) « Bull. Soc. Française Min. », vol. 7, 5 (1884); « Z. für Krystall. », vol. 11, 200.

(3) « Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas », vol. 21, 403 (1903).

(4) Nacque a Milano il 21 maggio 1850 e morì tragicamente a Napoli, vittima di un incendio, la notte dal 18 al 19 marzo 1914. Per maggiori notizie vedi: « Annali R. Osservatorio Vesuviano », ser. 3ª, vol. 1 (1924).

(5) Occorre ricordare che il materiale è stato raccolto dopo la pioggia e, perciò, è ricco di acqua (che non è legata ai sali che costituiscono il miscuglio).

L'analisi è stata eseguita con i soliti metodi, cioè, il sodio è stato separato del potassio con acido cloroplatinico, il rame è stato dosato come solfuro; l'anione solforico totale è stato dosato come solfato di bario e poi con soda N/10 è stato determinato, volumetricamente, l'anione HSO_4' . Queste due determinazioni sono state ripetute varie volte ed hanno dato valori assolutamente concordanti. Come appare dai rapporti molecolari la somma dei cationi è eguale alla somma degli anioni.

Il miscuglio è costituito in prevalenza da bisolfato potassico; deve però anche essere presente bisolfato sodico ed inoltre piccole quantità (6-7 %) di solfato neutro di sodio o di potassio (con ogni probabilità almeno in parte legato al bisolfato sotto forma di misenite).

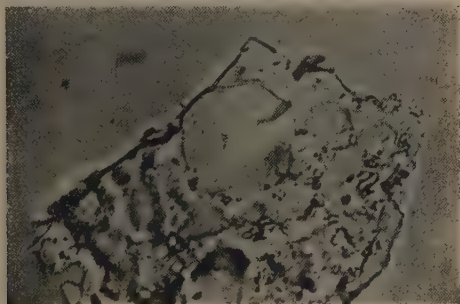


Fig. 1.

La quantità di solfato neutro presente (anche nel caso che fosse tutto K_2SO_4 e che il sodio si trovasse come bisolfato) non è sufficiente per trasformare in misenite tutto il bisolfato potassico; quindi, dall'analisi, *risulta in modo sicuro* che deve essere presente il composto KHSO_4 isolato.

Le ricerche microscopiche hanno confermato nettamente questo risultato. È stato infatti possibile identificare moltissimi cristallini tabulari fortemente birifrangenti biassici, otticamente positivi, riferibili al composto KHSO_4 .

Detti cristallini non hanno quasi mai contorni cristallograficamente definiti in accordo col fatto che la stalattite in esame, costituita da composti solubilissimi in acqua, era stata raccolta dopo la pioggia che l'aveva in parte disciolta. Le loro dimensioni (misurate con l'oculare micrometrico ed un millimetro diviso in 100 parti) sono comprese fra 0.01 e 0.04 mm. Le fotografie⁽¹⁾ delle figure 1-2 riproducono uno dei migliori di tali cristalli associato a molti altri.

(1) Sono state eseguite al microscopio con la macchina Leica di Leitz a forte ingrandimento (obiettivo 6) e sono state poi ingrandite nello stamparle. La 1 è stata fatta a nicol paralleli, la 2 a nicol incrociati.

Dalla coppia di facce secondo le quali i cristallini sono appiattiti esce normalmente la normale ottica. Col metodo della linea di Becke è stato, quindi, possibile determinare due indici di rifrazione principali. Abbiamo trovato, per $\lambda = 550 \mu\mu$ ⁽¹⁾

$$\alpha = 1.445$$

$$\gamma = 1.491$$

dai quali si calcola $\gamma - \alpha = 0.046$. Per la determinazione di γ è stato usato un miscuglio di essenza di lavanda e cannella, per quella di α un miscuglio di alcool etilico anidro e toluolo. Alcuni frammenti di cristalli dai quali usciva quasi normalmente un asse ottico hanno permesso di ac-

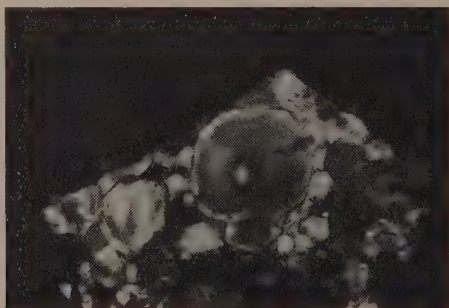


Fig. 2.

certare che β è assai vicino a 1.460 e quindi di confermare, indirettamente, che dai cristalli precedentemente descritti esce veramente una normale ottica (e non eventualmente una bisettrice di un angolo molto ottuso degli assi ottici) e che quindi sono stati sicuramente determinati gli indici γ e α . — Il peso specifico, determinato col metodo della sospensione, usando un miscuglio di ioduro di metilene e toluolo, è risultato eguale a

$$2.307 - 2.310 \quad \text{a } 15^\circ$$

Con il tavolino di Federow, riportando sul reticolo di Wulff la posizione dei due piani dell'indicatrice e la proiezione di un asse ottico, è stato possibile misurare l'angolo degli assi ottici e nello stesso tempo confermare il carattere ottico positivo. Si è avuto:

$$2V_\gamma = 56^\circ$$

Questi dati, uniti a quelli dell'analisi chimica, permettono di identificare i cristallini in esame con quelli del composto rombico KHSO_4 che,

(1) Filtro «Lifa» a luce solare.

come risulta dalle ricerche da me eseguite e che espongo qui sotto, ha le stesse proprietà ottiche dei cristalli sopra descritti.

Ricerche sul bisolfato potassico artificiale.

Il bisolfato potassico è stato misurato cristallograficamente da Mari-gnac⁽¹⁾ e poi da Rammelsberg⁽²⁾ e Tschermak⁽³⁾, esso è rombico bipira-midale⁽⁴⁾, otticamente positivo; il piano degli assi ottici è (001). I cristalli sono generalmente tabulari secondo la base e limitati da facce della bipira-mide {111} e anche {113} e {121} nonchè dei prismi: {110}, {210}, {101} {102} e anche {011}, {021} sempre subordinati alle bipiramidi per l'esten-sione delle loro facce, il pinacoide {100} è stato trovato, con esili faccette, nei cristalli misurati da Marignac e da Rammelsberg.

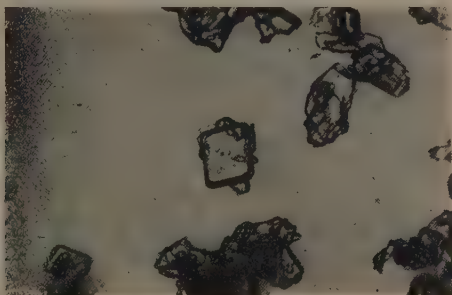


Fig. 3.

Per accertare l'identità del composto naturale con il KHSO_4 erano necessarie accurate determinazioni ottiche su cristalli artificiali di bisolfato potassico. Il prodotto che si trova in commercio contiene sempre K_2SO_4 ; varie determinazioni di acidità hanno dato a me valori oscillanti intorno al 68 % di HSO_4' (cioè il 95 % di KHSO_4) mentre il composto puro ne contiene il 74.01 %.

Per cristallizzazione frazionata ho ottenuto un sale, assolutamente puro, che ha dato all'analisi: 70.35 % SO_4'' mentre dalla formula si calcola 70.54 %. Esso è costituito da cristallini rombici tabulari secondo la base (fig. 3-4) nei quali si possono riconoscere le seguenti forme semplici:

$$\{001\} ; \{111\} ; \{100\} ; \{010\}$$

(1) « Annales d. mines », vol. 9 (5), (1856).

(2) « Poggendorffs Ann. d. Phys. », vol. 97, 92 (1856).

(3) « Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien », vol. 43, 382 (1861); vedi anche: GROTH, *Chemische Krystallographie*, vol. II, p. 313, Leipzig, 1908.

(4) a: b: c: = 0.8609:1:1.9344 (Marignac).

Sono fortemente birifrangenti come i cristalli naturali e otticamente positivi; il piano degli assi ottici è (001). Dalla base esce quindi, normalmente, la normale ottica. La traccia della bisettrice acuta fa un angolo di circa 50° con lo spigolo [001·111].

Col metodo dell'immersione, usando un miscuglio di essenza di lavanda e essenza di cannella, ho misurato:

$$\gamma = 1.491$$

e con un miscuglio di alcool etilico anidro e toluolo l'altro indice principale:

$$\alpha = 1.445 \quad \text{per } \lambda = 550 \mu\mu$$

indici di rifrazione identici a quelli del composto naturale.

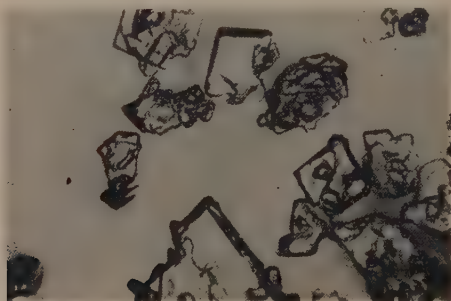


Fig. 4.

Nel prodotto commerciale ho trovato una sezione normale alla bisettrice acuta dove ho potuto misurare con l'oculare micrometrico a filo mobile la distanza fra i punti di emergenza degli assi ottici, distanza che è risultata eguale a 388 divisioni dell'oculare. Conoscendo che una mica con angolo degli assi ottici di 72° dava invece 350 divisioni ho potuto calcolare:

$$2E = 81^\circ.25'$$

mentre le vecchie determinazioni davano $2E = 81^\circ.20'$ (1). Se si accetta per β il valore 1.460 si ha:

$$2V_\gamma = 53^\circ$$

mentre per il composto naturale col tavolino di Federow è stato trovato $2V_\gamma = 56^\circ$. I valori si possono considerare in buono accordo se si pensa che il valore di β non è stato possibile di determinarlo esattamente per mancanza di sezioni opportunamente orientate.

(1) GROTH, *Chemische Krystallographie*, vol. II, p. 134. Leipzig, 1908.

Il bisolfato potassico del commercio contiene inoltre dei cristalli prismatici riuniti in fasci ma, talvolta, anche isolati, spesso leggermente tabulari secondo una coppia di facce della zona di allungamento. La fig. 5 dà un'idea di questi cristalli.

In alcuni di questi cristalli l'estinzione è quasi parallela alla direzione di allungamento⁽¹⁾ che è positiva; la traccia del piano degli assi ottici è normale alla direzione di allungamento. Dalla coppia di facce secondo la quale sono leggermente tabulari esce un asse ottico inclinato.

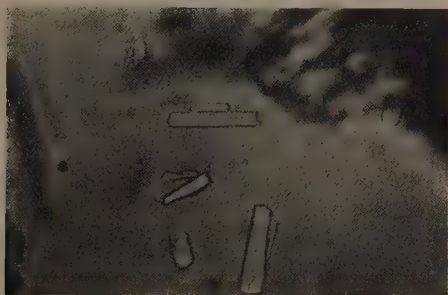


Fig. 5.

Col tavolino di Federow è stato possibile confermare che i cristalli sono otticamente positivi e misurare anche graficamente (riportando sul reticolo di Wulff due piani dell'indicatrice e la posizione dell'asse ottico) l'angolo degli assi ottici. Si è avuto:

$$2V_{\gamma} = 34^{\circ}$$

Nei cristalli ora descritti col metodo dell'immersione è stato trovato:

$$\gamma' = 1.468 \quad \text{e} \quad \alpha' = 1.462$$

in accordo con la debole birifrangenza dei cristalli così orientati. Tale debole birifrangenza ed il piccolo angolo degli assi ottici servono a distinguerli sicuramente dal bisolfato anche quando non si volesse tener conto dell'*habitus* nettamente diverso.

Non mancano individui sempre allungati ma con estinzione molto inclinata; la direzione di allungamento fa con la direzione di estinzione positiva un angolo di 15-20° e la birifrangenza è assai più forte.

Se si assume come asse delle x la direzione di allungamento i cristallini resulterebbero prismatici in tale direzione e terminati da faccette di

(1) Può darsi, specialmente per i preparati in balsamo, che l'estinzione sembri non esattamente parallela perchè la lamina dei minutissimi cristallini non è esattamente parallela al vetrino portaoggetti.

{110}. Il piano degli assi ottici sarebbe normale a {010} e l'asse cristallografico γ coinciderebbe con l'asse α dell'indicatrice.

Ritengo che questi cristalli, che non ho potuto isolare in quantità sufficiente per l'analisi, siano quelli del composto $K_2SO_4 \cdot 6KHSO_4$ corrispondente alla misenite studiata da Ferruccio Zambonini ⁽¹⁾.

Infatti lo studio dell'isoterma a 18° del sistema $K_2SO_4 - H_2SO_4 - H_2O$ eseguito da Stortenbecker ⁽²⁾ ha messo in evidenza, oltre al bisolfato, i seguenti composti:

- 1) $K_2SO_4 \cdot KHSO_4$
- 2) $K_2SO_4 \cdot 6KHSO_4$
- 3) $K_2SO_4 \cdot 3KHSO_4$

quest'ultimo metastabile. Gli stessi composti sono stati anche trovati nello studio dell'isoterma a 25° del sistema $K_2O - SO_3 - H_2O$ insieme al bisolfato, al solfato ed ai composti più acidi: $KHSO_4 \cdot H_2SO_4 \cdot H_2O$ e KHS_2O_7 . Uno studio più recente di Balajewa ⁽³⁾ ha confermato l'esistenza dei composti 1) 2) 3) sopra citati, che sono anche stati riscontrati nell'analisi termica del sistema $K_2SO_4 - H_2SO_4$ (Kendall e London) ⁽⁴⁾.

Il composto 1) è monoclino otticamente negativo; il 3) è rombico e solo il 2) è monoclino otticamente positivo perciò ritengo che sia il composto sopra descritto che accompagna il bisolfato artificiale.

Ricerche sul minerale che accompagna la mercallite.

Insieme ai cristallini tabulari di mercallite fortemente birifrangenti e che costituiscono la grande massa del miscuglio vesuviano in esame sono stati anche identificati dei rari cristallini assai meno birifrangenti con *habitus* prismatico allungati (fig. 6) e talvolta tabulari secondo una coppia di facce

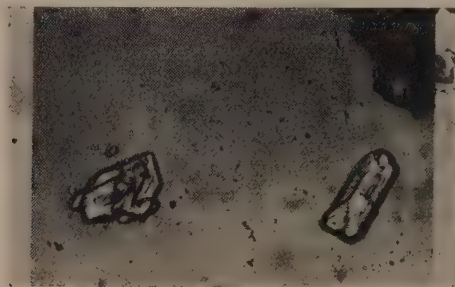


Fig. 6.

(1) Loco citato.

(2) «Rec. Trav. Chim. des Pays Bas», vol. XXI, 399 (1902).

(3) «Trans. Inst. Pure chem. Reag.», vol. XI, 5 (1931).

(4) «Journ. Am. Chem. Soc.», vol. XLII, 2135 (1920).

della zona di allungamento sulle quali la direzione di estinzione positiva fa un angolo di circa 28° con la direzione di allungamento. In questi cristalli: $\gamma' = 1.466$ e α' poco minore; essi sono otticamente positivi. Assumendo la direzione di allungamento come asse delle x questa coppia di facce potrebbe essere $\{010\}$, il piano degli assi ottici è ad esse normale. Altri cristalli tabulari forse secondo due facce di prisma hanno un angolo della direzione positiva di estinzione con l'allungamento di circa 16° . Dai cristalli così orientati in luce convergente emerge un asse all'orlo del campo; i due indici sono poco minori di 1.466.

Non mancano cristalli con estinzione parallela o quasi all'allungamento⁽¹⁾. Importante è la determinazione dell'angolo degli assi ottici che ho potuto fare col tavolino di Federow in un cristallino dove erano accessibili due piani dell'indicatrice ed un asse ottico. È stato confermato il carattere ottico positivo e si è avuto:

$$2 V_\gamma = 33^\circ$$

Specialmente in base a questo ultimo dato ritengo che i cristallini in esame siano da identificarsi con la misenite che secondo Zambonini è costituita da cristalli monoclيني allungati secondo x prismatici o tabulari secondo la base con sfaldatura parallela a $\{010\}$ e piano degli assi ottici normale a $\{010\}$.

Larsen dà per gli indici di rifrazione della misenite $\alpha = 1.475$ $\beta = 1.480$ $\gamma = 1.487$, ma accetta la formula KHSO_4 . Ora i cristalli di bisolfato potassico sono assolutamente e nettamente diversi dalla misenite che deve essere considerata un sale doppio come ha mostrato Zambonini⁽²⁾.

Tali indici non sono certamente quelli del bisolfato potassico; disgraziatamente non sono riuscito a procurarmi un campione del minerale di Zambonini per eseguire nuove determinazioni.

La misenite non era stata finora rinvenuta al Vesuvio. In base ai dati dell'analisi abbiamo visto che nel miscuglio potrebbe esserci al massimo il 7 % di solfato neutro. L'analisi microscopica ha permesso di identificare solo qualche raro cristallino di misenite di circa 0.05 mm. di lunghezza sui quali è impossibile eseguire ricerche più dettagliate.

(1) Vedi nota 1 a p. 391.

(2) Loc. cit.

Fisiologia. — *L'azione dell'insulina sull'alcoolemia provocata nell'uomo normale*⁽¹⁾. Nota di E. SERIANNI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Ricerche precedenti di Hirschfelder e Maxwell⁽³⁾ e di Galamini⁽⁴⁾, eseguite sui conigli, sono state dirette allo studio dell'azione dell'insulina sugli effetti tossici dell'alcool e reciprocamente dell'alcool sull'insulina.

Secondo Hirschfelder e Maxwell, i quali non hanno determinato l'alcoolemia, l'insulina non avrebbe alcun effetto sull'intossicazione alcoolica, provocata con somministrazione di alcool mediante sonda gastrica.

Dalle ricerche di Galamini risulta invece che la somministrazione per via endovenosa di alcool e di insulina, eseguita a breve intervallo l'una dall'altra, aumenta la resistenza degli animali alle due sostanze. Per ciò che riguarda l'alcoolemia, determinata solo sporadicamente, esulando tale studio dall'intento del lavoro, l'A. non trae alcuna conclusione.

Le presenti ricerche sono state eseguite sull'uomo, in quattro soggetti normali a digiuno da almeno 12 ore, ai quali è stata somministrata una bevanda idroalcoolica (in un solo caso il vino) costituita da cc. 0,5 di alcool a 95° per Kg. di peso corporeo in soluzione al 20 %. In ognuno dei soggetti sono state eseguite due prove di alcoolemia provocata; in una di queste la somministrazione dell'alcool veniva preceduta da una iniezione sottocutanea di insulina.

Il dosaggio del tasso alcoolemico, determinato col micrometodo di Widmark modificato da Baglioni, Galamini e Bracaloni⁽⁵⁾, veniva eseguito a vari intervalli: di circa ogni 10' nella prima fase della curva e successivamente di circa ogni 15', 20', 30'.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(3) A. D. HIRSCHFELDER a. H. C. MAXWELL, *Effect of insulin in experimental intoxication with alcohol and acetone*. «The Am. Journ. of Physiol.», 70, 1924, p. 520.

(4) A. GALAMINI, *Alcool e insulina*. «Boll. R. Acc. Medica di Roma», 1932.

(5) A. GALAMINI e L. BRACALONI, *Modificazioni al micrometodo «Widmark» per il dosaggio dell'alcool nel sangue*. «Arch. Farm. Sper.», 45, 1928, p. 97.

I.

G. M., d. 64, Kg. 82, 14 marzo 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall'ingestione dell'alcool
9.20	iniezione sottocutanea di 10 U. di insulina (Degewop)		
11.05		0.06	
11.08	ingestione di cc. 315 di vino a 13°		
11.15		0.15	7'
11.25		0.39	17'
11.35		0.49	27'
11.45		0.60	37'
12.00		0.48	52'
12.30		0.40	82'
13.00		0.31	112'

II.

G. M. (v. esperienza I) 24 marzo 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall'ingestione dell'alcool
10.40	ingestione di cc. 315 di vino a 13°	0.02	
10.45			
10.50		0.06	5'
11.00		0.37	15'
11.10		0.52	25'
11.20		0.55	35'
11.35		0.58	50'
12.05		0.37	80'
12.35		0.18	110'

III.

E. B., a. 21, Kg. 55, 27 aprile 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall' ingestione dell'alcool
10.30	ingestione di cc. 30 di alcool a 95° in soluzione al 20 ‰	0.02	
10.36			
10.46		0.20	10'
10.56		0.35	20'
11.08		0.53	32'
11.25		0.46	49'
11.46		0.47	70'
12.10		0.47	94'

IV.

E. B. (v. esperienza III) 30 aprile 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall' ingestione dell'alcool
9.50	iniezione sottocutanea di 20 U. di insulina (Degewop)		
10.45		0.03	
10.50	ingestione di cc. 30 di alcool a 95° in soluzione al 20 ‰		
10.55		0.09	5'
11.05		0.26	15'
11.15		0.15	25'
11.25		0.18	35'
11.40		0.21	50'
12.00		0.26	70'
12.20		0.23	90'
12.40		0.23	110'

V.

M. P., a. 20, Kg. 60, 7 maggio 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall'ingestione dell'alcool
9.40	ingestione di cc. 30 di alcool a 95° in soluzione al 20 ‰		
9.45		0.18	5'
9.55		0.41	15'
10.10		0.65	30'
10.27		0.62	47'
10.45		0.50	65'
11.00		0.46	80'
11.20		0.47	100'

VI.

M. P., (v. esperienza V) 12 maggio 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall'ingestione dell'alcool
10.20	iniezione di 20 U. di insulina (Devewop)		
11.00			
11.05		0.03	5'
11.15		0.10	15'
11.38		0.35	38'
11.52		0.36	52'
11.55			
12.08	disturbi ipoglicemici ; somministrazione di 500 cc. di latte e di 30 gr. di zucchero	0.27	68'

VII.

A. O., a. 20, Kg. 60, 29 giugno 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall' ingestione dell'alcool
10.05	ingestione di cc. 30 di alcool a 95° di soluzione al 20 ‰	0.03	
10.10			
10.15		0.26	5'
10.25		0.49	15'
10.35		0.68	25'
10.48		0.57	38'
11.10		0.58	60'
11.35		0.35	85'

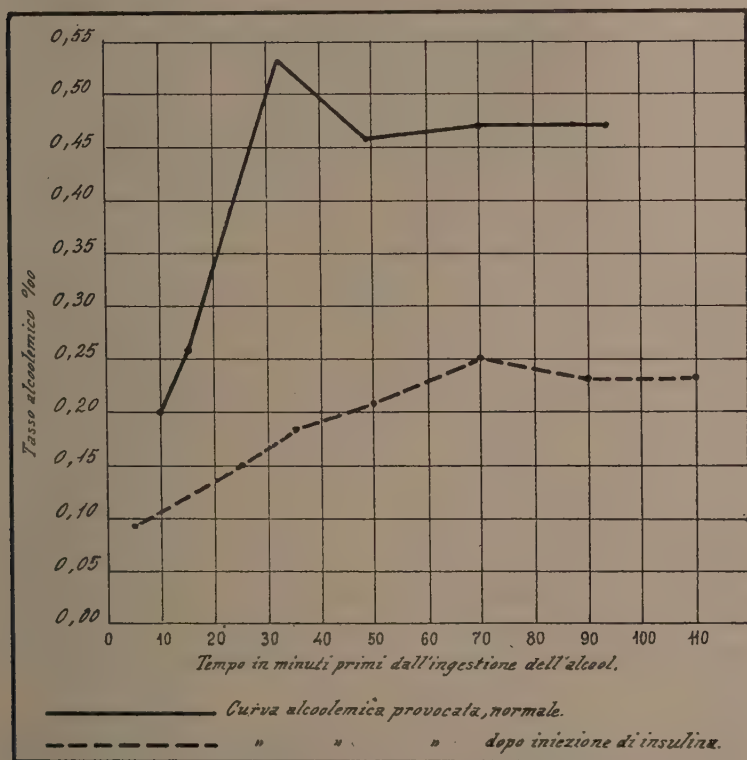
VIII.

A. O. (v. esperienza VII) 4 luglio 1934.

Ore	Condizioni dell'esperienza	Tasso alcoolemico ‰	Tempo dall' ingestione dell'alcool
9.00	iniezione sottocutanea di 20 U. di insulina (Bayer)	0.016	
10.50			
10.53	ingestione di cc. 30 di alcool a 95° di soluzione al 20 ‰		
10.58		0.19	5'
11.08		0.17	15'
11.35		0.40	42'
11.50		0.39	57'

Dalle esperienze I e II, eseguite nel soggetto M. G., risulta che l'iniezione di 10 U. di insulina eseguita un'ora e 50' prima della ingestione della bevanda alcoolica non ha modificato la curva alcoolemica provocata; le lievi variazioni tra le due curve non hanno significato, dato che esse si verificano normalmente anche tra curve ricavate da esperienze eseguite sullo stesso soggetto in identiche condizioni sperimentali.

Dalle esperienze III e IV sul soggetto E. B., risulta invece che l'insulina, iniettata nella dose di 20 U. per via sottocutanea un'ora prima della ingestione dell'alcool, ha determinato un netto abbassamento della curva alcoolemica: la differenza tra i due acmi (0.53‰ e 0.26‰) è stata di circa il 50%.



Nelle esperienze V e VI sul quarto soggetto M. P. la differenza tra le quote massime dell'alcoolemia rispettivamente ottenute (0.65‰ e 0.36‰) è stata del 44%.

Occorre rilevare che verso la fine della esperienza VI si è dovuto ricorrere alla somministrazione di zucchero e latte per combattere i disturbi ipoglicemici sopravvenuti. Il tasso alcoolemico successivamente determinato

è stato di 0.27‰ . Poichè il tasso alcoolemico di 0.36‰ è stato ottenuto dopo 55' dalla ingestione dell'alcool e poichè la quota successiva di 0.27‰ è da presumere che non sia stata influenzata dalla ingestione di cibo quasi immediatamente precedente, possiamo ritenere che in realtà l'acme raggiunto dalla curva sia rappresentato da 0.36‰ .

Anche dalle esperienze VII e VIII sul soggetto O. A. risulta che la iniezione di 20 U. di insulina un'ora e 53' prima della ingestione dell'alcool ha provocato un abbassamento della concentrazione di esso nel sangue: la differenza tra le due massime concentrazioni (0.68‰ e 0.40‰) è stata del 41‰ .

Dai risultati ottenuti si può concludere che l'iniezione di 20 U. di insulina, eseguita tra 40' e un'ora e 53' prima della somministrazione di una bevanda idroalcolica, ha determinato un notevole abbassamento della curva alcoolemica: la percentuale di tale abbassamento, calcolata dalla differenza tra gli acmi delle rispettive curve, ha oscillato tra 41 e 50‰ .

Le presenti ricerche pertanto dimostrerebbero, contrariamente a quanto asseriscono Hirschfelder e Maxwell, che l'insulina possiede una netta azione sul metabolismo dell'alcool introdotto nell'organismo, nel senso che abbassa la concentrazione di esso nel sangue.

Con esse vengono, invece, indirettamente confermate le osservazioni di Galamini sulla attenuazione degli effetti tossici dell'alcool per l'azione dell'insulina.

Non sappiamo se il comportamento osservato nei tre soggetti esaminati sia costante per tutti gli individui sani, o se, invece, sarà passibile di variazioni simili a quelle osservate circa l'azione dell'insulina sul tasso glicemico.

Comunque i dati raccolti ci sembrano sufficienti a fissare il rapporto tra insulina e livello dell'alcoolemia provocata.

Riguardo al meccanismo pel quale si esplica tale azione dell'insulina sull'alcoolemia, mi limiterò a riferire che da prove eseguite su alcuni malati di cirrosi epatica, in stadio avanzato ⁽¹⁾, è risultato che l'insulina non ha provocato in questi malati alcun abbassamento della curva alcoolemica: l'insieme di tali osservazioni indurrebbe ad ammettere che l'ormone trovi nel fegato normale una condizione indispensabile per la sua azione sul tasso alcoolemico.

Ci sembra infine che le presenti ricerche, nelle quali per la prima volta è stata osservata l'influenza di un ormone, quale l'insulina, sull'alcoolemia provocata, inducano ad estendere tale studio non solo agli altri ormoni, ma anche a quelle sostanze farmacodinamiche che agiscono sul sistema neurovegetativo, strettamente connesso con quello endocrino.

Ricerche dirette a tale studio sono in corso e i risultati di esse faranno oggetto di una prossima comunicazione.

(1) E. SERIANNI, *L'azione dell'insulina e dei pasti sull'alcoolemia provocata in malati di cirrosi epatica*. «Boll. R. Acc. Medica di Roma», 1935 (in corso di pubblicazione).

Riassunto. — L'insulina, iniettata nella dose di 20 U. per via sottocutanea fra 40' e un'ora e 53' prima della somministrazione di una bevanda idroalcoolica, ha determinato nell'uomo, in tre soggetti normali, un notevole abbassamento della curva alcoolemica: la differenza tra gli acmi delle curve rispettive con e senza insulina ha oscillato tra il 41 e il 50%.

Commemorazione del Socio Corrispondente Alessandro Martelli

letta dal Corrisp. PAOLO VINASSA DE REGNY nella seduta del 3 marzo 1935.

Nella pienezza della sua attività e nel forte vigore della sua vita ⁽¹⁾ Alessandro Martelli, minato da un terribile male, contro cui la scienza è tuttora impotente, moriva cristianamente pronto e rassegnato in quella sua Firenze, della quale fu amatissimo come figlio.

Non credo che la lunga amicizia che mi legava al collega, al camerata con cui ho diviso, in comunanza di spirito e di ideali, le ore della guerra e della riscossa, mi faccia velo, se asserisco che Alessandro Martelli ha spesa la sua vita operosa per il bene della scienza e della Nazione, e che egli può bene considerarsi un nobile esempio di scienziato e di cittadino. Egli del resto era vissuto in un ambiente che conservava una nobile tradizione di patriottismo. Nella sua bella villa di Vinci visse con suo padre e con suo zio che furono combattenti con Garibaldi; ed in quella casa il grande Nizzardo trovò degna ospitalità.

Le tradizioni politiche influirono sul giovane Alessandro ed ebbero poi degno terreno per svilupparsi, nell'insegnamento di Carlo De Stefani, geniale geologo, magnifico maestro, ardente patriota. In quel tempo, attorno al principio di questo secolo, la scuola geologica di Firenze fu una fucina di geologia, dirò così irredentistica. Erano allora a Firenze Giovanni ed Olinto Marinelli, friulani innamorati della « Piccola patria » non ancor tutta riunita alla « grande »; era Carlo De Stefani che tendeva alle terre adriatiche, e personalmente e coi suoi scolari le studiava per conquistarle almeno scientificamente.

Sotto la guida di siffatto Maestro, appena laureato, il Martelli si presentò al giudizio dei geologi con un complesso di lavori, tutti pubblicati nel 1901, l'anno dopo la sua laurea, i quali subito mostrarono nel giovane studioso non solo il valore geologico, paleontologico e geografico, ma anche la sua versatilità, che fu sempre dote precipua e spiccatissima per tutto il tempo della sua vita. Sono di quel periodo i suoi primi lavori sulla Dal-

(1) Alessandro Martelli, da Vinci, nacque a Caltanissetta il 25 novembre 1876. Laureato il 3 luglio 1906 a Firenze, fu assistente volontario di Geologia; libero docente nel 1904; assistente di Mineralogia nel 1906; aiuto nel 1910; professore straordinario di geologia applicata nel R. Istituto superiore forestale di Firenze nel 1913; ordinario nel 1918. Dal 1928 era professore di Geologia a Roma. Morì a Firenze il 5 ottobre 1934.

mazia e la penisola balcanica più specialmente adriatica. Anche quando passò aiuto di Mineralogia, sotto l'amorosa direzione del nostro collega Sen. Millosevich che gli fu legato di fervida amicizia, non abbandonò il campo dei suoi primi studi, e numerose ed accurate ricerche dedicò all'Albania, alle isole adriatiche orientali, alla penisola balcanica più prossima alle nostre coste, alle isole egee. Il complesso di questi lavori, che chiamerò adriatici, del Martelli è veramente cospicuo e tale da dare fama a qualsiasi serio studioso. Nuove indicazioni, correzioni di errori, correlazioni importanti tanto per la sponda dalmatica e le sue isole, quanto per le isole ioniache di Paxos e Antipaxos si rilevano da quel complesso di lavori geologici, paleontologici e petrografici.

Degna di speciale menzione è l'opera complessiva svolta dal Martelli nel Montenegro, ove riuscì a completare quanto i predecessori avevano visto ed a portare nuove ed interessanti cognizioni sulla regione, che allora era assai mal nota, e la cui esplorazione geologica un po' più estesa era stata appena iniziata l'anno precedente la sua andata laggiù. Nè meno interessanti sono le osservazioni sull'Albania, che il Martelli compì in un suo viaggio del 1909. La nostra Accademia in quel tempo gli fu larga di aiuti, e gli assegnò la metà del Premio reale per la Mineralogia e la Geologia del 1908. Questi studi furono per il Martelli un'ottima base per le sue successive ricerche di Geologia applicata specialmente sui petroli albanesi; ricerche che furono coronate da successo.

Con tanta e così intensa attività geologica non trascurò però mai gli studi paleontologici, non tanto fine a se stessi, quanto destinati in modo speciale a documentare l'età geologica dei terreni studiati. Così furono le ricerche di paleontologia che lo portarono a delimitazioni più esatte di terreni specialmente triassici montenegrini; delimitazioni che mostrarono la grande estensione del Trias e del Giurassico in regioni ritenute cretacee dai geologi, specialmente austriaci, che lo precedettero.

Benchè anche i lavori paleontologici del Martelli siano ben condotti ed abbiano anche oggi pieno valore per la conoscenza delle faune fossili specialmente balcaniche, pure la mentalità sua in essi non si appagava come troppo minuziosi ed analitici. A lui sorrideva la ricerca geologica ampia, la correlazione tra terreni anche lontani e soprattutto l'applicazione pratica della nostra scienza. E quando, per voto unanime della Facoltà, fu chiamato alla cattedra di Geologia di Roma, accettò ben volentieri, perchè sapeva che ad altro valoroso insegnante specialista era affidato l'insegnamento della Paleontologia, rimanendo così a lui soltanto la prediletta parte geologica.

Appunto per questa sua spiccata tendenza agli studi più prettamente geologici il Martelli seguì con entusiasmo la nuova via tracciatagli dal suo nuovo direttore, il collega Sen. Millosevich, quando questi occupò la cattedra di Mineralogia a Firenze. Così il Martelli si diede anche agli studi

di petrografia geologica. Campo vastissimo, allora poco esplorato dai litologi troppo mineralisti e dai geologi troppo paleontologi.

I lavori petrografico-geologici del Martelli sono numerosi e formano essi pure un complesso degno di alta lode. Iniziò la serie di tali lavori con una magistrale descrizione petrografico-geologica dell'isola d'Ustica, che ebbe poi una degna compagna nell'altrettanto pregevole illustrazione dell'isola di Nisiro. Poichè, anche nel campo petrografico, ben presto il Martelli tornò alla sua prediletta regione di studi adriatici ed egei. Ma non mancarono buoni e seri studi su vari argomenti di petrografia specialmente della regione toscana.

Versato, come ho già detto, in molti campi delle cognizioni geologiche, il Martelli pubblicò anche buoni lavori sulla morfologia terrestre in generale e su speciali regioni, come le celebri balze di Volterra.

Vinto il concorso di Geologia nel R. Istituto agrario e forestale di Firenze, coll'usato entusiasmo e la sua solita vivace attività il Martelli si interessò subito delle questioni relative allo studio dei terreni agrari e forestali. Sono fondamentali in questo campo i tre lavori compresi sotto il titolo: « Contributi di Geologia applicata alle sistemazioni idraulico-forestali ». Nel nuovo campo spaziò ampiamente occupandosi delle questioni connesse ai boschi, alle acque ed all'impianto dei laghi artificiali. Argomento questo che portò il Martelli ad interessarsi del grande problema delle nostre forze idrauliche, dimostrando così, alla soda preparazione scientifica, accoppiata una larga veduta della parte economica ed applicativa. Perchè il Martelli nei suoi studi non trascurò mai questo lato delle questioni geologiche. Difatti sino dall'inizio della sua attività scientifica noi troviamo un buon lavoro di idrologia sul bacino della Nievole, a cui se ne aggiunsero poi altri due sempre sui terreni toscani e le loro acque profonde.

Ma in modo speciale eccelle il Martelli nel campo minerario, nel quale diede validi contributi alla conoscenza di importanti giacimenti. Questa sua specializzazione portò a risultati cospicui durante la guerra; poichè ai suoi lavori su Rodi si deve la scoperta della Cromite che venne poi utilizzata nei gravi momenti in cui la nostra industria guerresca chiedeva cromo per gli acciai speciali, necessari a sostituire le bocche da fuoco consunte o perdute, e che da parte degli alleati e dei neutri ci veniva somministrato con avara parsimonia. E a lui pure si devono le ricerche di molibdeno e di tungsteno in Sardegna, e più che altro la utilizzazione dei giacimenti di manganese, esso pure indispensabile alla nostra industria pesante. Importanti lavori poi il Martelli dedicò dopo la pace, alla questione per noi vitale dei fosfati, illustrando quelli di Kosseir e dando interessanti notizie dei pochi nostri giacimenti del Leccese.

Ma il problema che lo interessò, ed anzi lo assillò sino al termine della sua vita fu quella dei combustibili ed in modo speciale del Petrolio, questo dominatore, sino ad ora incontrastato, del campo industriale odierno. E

quando ebbe la direzione dell'Azienda generale italiana del Petrolio si diede con tutta l'anima, con tutto l'entusiasmo, con tutta la sua attività all'enorme compito affidatogli. Viaggi, ricerche, studi, trattative spesso difficili e laboriose si alternavano colla direzione tecnica delle ricerche, che dovevano finalmente mettere in luce questo petrolio se vi era o togliere le troppo rosee illusioni una volta per tutte, mettendo così l'animo in pace e facendo tacere gli assertori di ignorate ricchezze del nostro sottosuolo. Perchè questo e null'altro si propose il Martelli e questo deve essere altamente detto e ripetuto contro i facili critici e contro chi avesse creduto di asserire che l'AGIP e il suo Presidente avevan quasi promesso il liquido prezioso. Lo scopo dunque era uno solo e questo fu chiaramente detto: o trovare il petrolio o dare sicurezza della sua mancanza per rivolgerci ad altri mezzi. E posso esserne testimone, per quel poco che valgo, poichè più di una volta col compianto amico abbiamo dibattuto l'importante questione. Nè posso dimenticare il tono di amarezza col quale si rammaricava delle critiche che gli si rivolgevano.

Egli certo sperava, nell'interesse della Nazione, di trovare questi sperati grandi giacimenti; ma era troppo buon geologo e troppo equilibrato scienziato per fare asserzioni gratuite di tanta portata. Si doveva, secondo lui, procedere a qualche perforazione profonda e poi concludere decisamente per il sì o per il no, mettendo in tal modo la parola fine a tanti sogni di persone certo in buona fede, ma forse non del tutto competenti in materia.

Questa amarezza solo gli amici potevano ogni tanto scorgere sotto l'apparenza gioviale ed energicamente ottimista del Martelli. E chi sa se tale patema d'animo non abbia accelerato, come spesso accade negli ammalati come lui, la sua dolorosa fine. Comunque l'opera del Martelli come presidente dell'AGIP resterà esempio di energia, di disinteresse, di lavoro indefesso, poichè pochi come lui sapevano e potevano pagare di persona non rifuggendo da fatiche, da disagi, da responsabilità. Voglia Iddio che l'opinione di coloro, che basandosi sulla « microgeologia » caratteristica dei terreni italiani temevano dei risultati, sia resa fallace dalle ricerche in corso. Nessuno, credo, ne godrebbe più di quelli che ebbero ed hanno tuttora tale opinione liberamente ed onestamente espressa e che il Martelli apprezzava.

Non ostante tutto questo intenso lavoro il compianto amico trovava tempo per altre mansioni. Fu così a capo della sezione geologica del Consiglio nazionale delle Ricerche e per la sua azione e il suo suggerimento si ebbero iniziative importanti tanto nel campo scientifico quanto in quello pratico. Quando fu presidente della Società geologica italiana organizzò l'escursione dei soci a Rodi, ove egli, ritornando nel suo ben noto campo di studi, fu a tutti guida cara e preziosa.

Se tanto e così valoroso fu il Martelli nel campo scientifico altrettanto fu in quello politico, nazionale. Non sarei fascista nè vecchio commilitone

suo, se non lumeggiassi un poco anche questo lato della sua personalità. Nè d'altra parte credo sia lecito, anche in un'Assemblea scientifica, limitarsi allo scienziato, come se questo fosse avulso dalla sua personalità di uomo.

Alessandro Martelli fu un entusiasta; ebbe questa dote divina senza di cui la vita è un arido proseguirsi di giorni incolori e di scialbe azioni. Fu altresì di un'attività senza pari, sempre pronto a pagare di persona a rendersi conto di tutto, a controllare, incoraggiare, criticare quando occorresse; ebbe la volontà della responsabilità. Studente irredentista a capo delle dimostrazioni, volontario di guerra, combattente valoroso decorato di due promozioni al merito, nei giorni grigi della mutilata vittoria a Firenze capo dei pochi che credevano ancora all'Italia, fascista e squadrista della prima ora si pose alla testa delle colonne nella Marcia su Roma. Dopo il trionfo del Fascismo si diede tutto alla politica, alla quale il suo temperamento lo portava, i suoi studi la sua cultura nei vari campi economici lo avevano preparato. Lasciò traccia di sé e della sua energia volitiva nel Ministero delle Comunicazioni nel quale fu a fianco di quell'altra energia volitiva che è Costanzo Ciano, e nel Ministero della Economia nazionale del quale fu lungamente a capo. Sono di questo periodo e di quello immediatamente successivo, nel quale fu a capo dell'AGIP, molti i discorsi e lavori chiari, persuasivi, documentati su numerose e importanti questioni economiche, agrarie, industriali, e che non hanno avuto termine se non al terminare della sua vita.

Ho già detto di esser sicuro che la mia amicizia per Alessandro Martelli non mi avrebbe fatto velo asserendo il suo valore di uomo e di scienziato. E con questa breve commemorazione, in cui ho cercato di frenare la commozione per mantenermi al più possibile obiettivo, credo di aver saputo dimostrare che Alessandro Martelli fu valoroso scienziato, cittadino esemplare, utile alla Patria. Per lunghi anni ancora a ricordare il suo nome si potrà ripetere nell'anima il bel saluto fascista: PRESENTE!

ELENCO SISTEMATICO

DELLE PUBBLICAZIONI DI ALESSANDRO MARTELLI.

Geologia e Paleontologia:

Escursioni geologiche nelle Eolie. Firenze, 1901.

Fossili del Siluriano inferiore dello Schensi. « Boll. Soc. Geol. Ital. », 1901

Il Devoniano Superiore dello Schensi. « Ibidem », 1902.

Su due Mustelidi e un felide del Pliocene toscano. « Ibid. », 1906.

Sulle misure che potrebbero giovare nelle ricerche sismologiche e allo studio dei bradisismi. « Atti VI Congresso geografico Italiano », 1907.

Note geologiche e paleontologiche sul travertino di Ascoli Piceno. « Riv. Italiana di Paleontologia », 1908.

Studi geologici e misure geodetiche. « Nuova Antologia », 1909.

L'isola di Ustica: Studio geologico-petrografico. «Mem. della R. Accademia delle Scienze, detta dei XL», 1912.

Ammoniti della pietra forte delle Grotte in Val d'Etna. «Boll. Soc. geol. ital.», 1912.

a) *Geologia e paleontologia delle regioni adriatiche e balcaniche:*

L'isola di Lagosta. «Boll. Soc. geograf. ital.», 1902.

I fossili dei terreni eocenici di Spalato in Dalmazia. «Paleontogr. Italica», 1902.

I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia. «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1902.

I terreni eocenici dei dintorni di Metkovich in Dalmazia e in Erzegovina (in collaboraz. col prof. C. De Stefani). «Ibidem», 1902.

Il Muschelkalk di Boljievici nel Montenegro meridionale. «Ibidem», 1903.

Il Flysch del Montenegro sud-orientale. «Ibidem», 1903.

A proposito della geologia dei dintorni di Spalato. «Boll. Soc. geol. ital.», 1904.

Osservazioni geografico-fisico e geologiche sull'isola di Lissa. «Boll. Soc. geografica Italiana», 1904.

Il livello di Wengen nel Montenegro meridionale. «Boll. Soc. geol. ital.», 1904.

I Cefalopodi triassici di Boljievici presso Vir nel Montenegro. «Paleontogr. Italica», 1904.

L'epoca glaciale nella penisola Balcanica secondo gli ultimi studi. «Rivista geografica Italiana», 1905.

Nuovi studi sul Mesozoico montenegrino. «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1906.

Contributo al Muschelkalk superiore del Montenegro. «Paleontogr. Italica», 1906.

Brachiopodi del Dogger montenegrino. «Boll. Soc. geolog.», 1906.

Le formazioni bituminifere di Selenitza in Albania. «Boll. Soc. geograf. ital.», 1906.

Il Miocene lignitifero di Berane nel Sangiaccato di Novibazar. «Boll. Soc. geolog.», 1906.

La serie eocenica di Arbe nel Quarnero (in collaboraz. col prof. De Stefani). «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1907.

Di alcune recenti idee sulla struttura dell'Appennino e di un preteso carreggiamento dalmato-garganico. «Rivista geogr. ital.», 1908.

Studio geologico sul Montenegro sud orientale e litoraneo. «Mem. R. Accad. dei Lincei», 1908.

La serie geologica delle coste dell'Albania meridionale. «Atti Soc. ligustica Scienze Naturali», 1909.

Sur la géotectonique des deux versants de l'Adriatique. «Riv. geograf. ital.», 1909.

Sull'età degli strati a Posidonomya dell'Appennino Toscano e dell'Albania. «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1910.

Il Miocene medio e superiore di Vallona (in collaboraz. col dott. Nelli). «Boll. Soc. geolog.», 1911.

Ricerche geologiche sugli Acrocerauni e i dintorni di Vallona. «Mem. R. Accad. dei Lincei», 1912.

L'Albania Italiana. Note geologiche e forestali. «L'Alpe», 1915.

Lo scoglio di Saseno. «Atti Congr. geogr. it. II». Firenze, 1923.

Geologia e paleontologia delle isole Egee:

Paxos e Antipaxos nel Mare Jonio. «Boll. Soc. geograf. ital.», 1901.

Note geologiche sull'isola di Paxos. «Rend. R. Accad. Lincei», 1901.

Formazioni geologiche e fossili di Paxos e Antipaxos nel Mar Jonio. «Boll. Soc. geolog.», 1901.

Relazione sommaria sulle ricerche geografico-fisiche e geologiche nelle Sporadi meridionali. «Boll. Soc. geograf.», 1912.

L'isola di Stampalia. «Memoria geografico-fisica e geologica. «Ibid.», 1913.

- Appunti geologici sull'isola di Scarpanto. « Boll. Soc. geologica », 1916.
Il gruppo eruttivo di Nisiro nel Mare Egeo. « Mem. R. Accad. delle Scienze detta dei XL », 1917.
L'Egeo e Rodi nella Geologia. « Boll. Soc. geolog. Roma », 1933.

Petrografia:

- Notizie petrografiche sullo scoglio di Melisello. « Boll. Soc. geologica », 1908.
Il Porfido quarzifero del conglomerato di Fano. « Ibidem », 1909.
Ciottoli di rocce cristalline nell'Eocene di Mosciano presso Firenze. « Mem. R. Istituto Superiore, Firenze », 1909.
Le rocce trachitiche di Orciatico in Provincia di Pisa. « Boll. Soc. geolog. », 1910.
Ricerche petrografiche e chimiche sulle formazioni granitiche di Gavorrano. « Rend. R. Accad. dei Lincei », 1910.
Metamorfismo sul contatto fra serpentine e scisti a Campo Ligure. « Boll. Soc. geolog. », 1912.
Un particolare petrografico delle argille dei terreni franosi. « L'Alpe », 1921.
Sul porfido quarzifero della Val d'Egna. « Periodico di Mineralogia, Roma », 1930.

Geografia fisica e morfologia:

- Un nuovo ordinamento sistematico delle forme superficiali terrestri. « Rivista geograf. ital. », 1906.
Le balze di Volterra. « Ibidem », 1908.
Per la forma della Terra. « Nuova Antologia », 1909.
Forze naturali e fattori umani delle trasformazioni della montagna. « Ann. Ist. Forestale », 1920.

Idrologia:

- Ricerche idrogeologiche nel bacino inferiore della Nievole. « Pescia », 1901.
Il regime sotterraneo delle acque nella Versilia Pietrasantina. « Giornale Geologia pratica », 1906.
Relazione idro-geologica sull'acquedotto delle Lame. Firenze, 1907.

Geologia pratica:

- Gli studi geologici nell'economia della nazione. « Miniera ital. ». Roma, 1929.
Le scienze geologiche nell'economia della nazione. « Boll. Soc. geolog. ital. », 1929.

a) Cave e miniere:

- Ricerche chimiche e geologiche su taluni calcari da cemento della Toscana e limitrofa Romagna. Firenze, 1910.
Sull'opportunità di ricerche minerarie nei dintorni di Orciatico. « Rass. Miner. Metall. e Chimica », 1910.
Notizie illustrative sull'alabastrite del Senese. Firenze, 1911.
Sulla natura delle masse pirosseniche in relazione con i giacimenti ferriferi di Rio e Capo Calamita. « Rend. R. Accad. dei Lincei », 1912.
Note geologiche minerarie sulle formazioni marmifere del Monte Corchia. « Rass. Minerar., Metall. e Chimica », 1912.
I giacimenti di ferro cromato nelle serpentine dell'isola di Rodi. « Boll. Soc. geogr. », 1913.
Ricerche di minerali di molibdeno e tungsteno in Sardegna. « Rass. Miner. Metall. e Chimica », 1921.
Sul giacimento di minerale di manganese di Monte Zenone. « Ibid. », 1921.
Il fabbisogno di manganese e le risorse italiane. Roma, 1922.

Sui giacimenti di manganese della Sardegna. Roma, 1922.

Sui fosfati di Kosseir. «Nuovi Annali Agricol.». Roma, 1926.

I fosfati dell'Alto Egitto. «Riv. Realtà». Milano, 1930.

Sui fosfati del Leccese. «Boll. Soc. geol. ital.», 1931.

b) Geologia agraria e forestale.

I terreni pliocenici della Toscana sotto l'aspetto agrario. «Giornale Agricoltura della Toscana», 1909.

Sull'importanza agraria del sottosuolo. Firenze, 1909.

Il compito delle scienze geologiche negli studi forestali. Firenze, 1914.

I laghi artificiali e il bosco. «L'Alpe», 1916.

Contributi di Geologia applicata alle sistemazioni idraulico-forestali: I. La frana di Corniglio. «Ann. R. Istituto Forestale». Firenze, 1916. Contributi ecc.: II. La frana di Tracosta. «Ibid.», 1917.

Il problema nazionale delle forze idrauliche e i serbatoi montani. «Mem. R. Accad. Georgofili», 1919.

Influenze dei boschi sul regime delle acque in Italia. «L'Alpe», 1919.

Su di un nuovo metodo per la determinazione della potassa (in collaborazione col dott. Edlmann). «Ann. R. Istit. Forestale», 1919.

Contributi di geologia applicata alle sistemazioni idraulico-forestali: III. Sulla viabilità dei terreni franosi dell'Appennino. «Ibid.», 1921.

Il terreno forestale di Monte Senario. «Ibid.», 1922.

Ricerche sui terreni forestali della Valle di Fiemme. «Ibid.», 1922.

I terreni dei monti e dei colli Toscani. «L'Italia agricola». Piacenza, 1925.

Sul terreno e l'incremento dell'Abetina di Vallombrosa. «Ann. R. Istit. Super. Agr. e Forestale», 1925.

Sull'uso diretto delle leuciti e fosforiti macinate. «Ibid.», 1926.

Studi geologico-forestali sulla Montagna Iripina. «Ann. Istit. Sup. agr. e forestale», 1927.

Note geologico-forestali sul territorio di San Marcello Pistoiese. «Ibid.», 1931.

Economia politica:

La pesca e l'industria delle spugne nelle Sporadi Meridionali. «Boll. Soc. geogr.», 1913.

L'elettrosiderurgia e il carbone di legna. «L'Alpe», 1918.

La questione del bracciantato in Toscana. «Congr. agrario Naz.», 1921.

Sul disegno di legge per il latifondo e colonizzazione interna. Firenze, 1922.

La politica delle acque. Roma, 1924.

I combustibili nazionali e la loro legislazione. Roma, 1925.

Il problema nazionale del petrolio. Roma, 1925.

Sul trattato di commercio tra l'Italia e l'Albania. Roma, 1925.

La questione del grano in Italia. «Atti R. Accad. Georgofili», 1925.

I progressi della elettrificazione ferroviaria. «Gerarchia», 1927.

Il problema della elettrificazione delle ferrovie in Italia. «Atti Soc. Ital. Progresso Scienze», 1927.

Sul bilancio delle ferrovie. Roma, 1927.

Politica Economica del Governo Fascista. Roma, 1929.

L'opera del Governo nel campo economico. Roma, 1929.

La questione enologica. «Atti R. Accad. dei Georgofili». Firenze, 1930.

Le fonti dell'energia meccanica in Italia. «Atti Congresso delle Scienze». Milano, 1931.

Le développement économique de l'Italie. «Centre International d'Études sur le Fascisme». Lausanne, 1931.

- La politica del petrolio. «Giornale d'Italia», 1931.
Le ricerche petrolifere in Italia. «Ibid.», 1931.
La crisi economica mondiale. «Barometro economico». Roma, 1931.
Il problema italiano del petrolio. «Atti Soc. Progresso delle Scienze», 1932.
Le energie per l'industria italiana. «Nuova Antologia», 1932.
La politica petrolifera del Governo Fascista. «Gerarchia», 1933.
Il petrolio, la crisi e le conferenze. «Riv. italiana del Petrolio», 1933.

Varia:

- Leonardo da Vinci. Empoli, 1901.
I progressi delle scienze nel secolo XIX. Firenze, 1901.
I manoscritti Leonardiani e il Codice Leicester. Firenze, 1913.
Dante Pantanelli. «Boll. Soc. geogr. ital.», 1914.
Albania Adriatica. In 'Pagine della guerra'. «R. Soc. geografica», 1917.
Vinci e la tradizione leonardiana. «Marzocco». Firenze, 1919.
Rinnovamento italico. Empoli, 1924.
Il contributo italiano nelle conquiste della fisica. «Atti Congr. Internaz. dei Fisici
Como, 1927.
La Toscana nel progresso nazionale. «Atti I Congr. Attività Toscana». Pisa, 1927.
Commemorazione di Antonio Stoppani. «Miniera ital.», 1927.
Commemorazione di Mario Cermenati. «Boll. Soc. geol.», 1927.
Il contributo della Toscana al primato italiano. «Atti Convegno Ente Attività To-
scane». Siena, 1928.
L'action de l'Institut international d'Agriculture. «Atti Congr. Internaz. Agricolt.». Roma, 1928.
L'Italia nella Storia delle Scienze. Firenze, 1929.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrisp. VINASSA DE REGNY legge una elevata commemorazione del Socio A. MARTELLI.

Il PRESIDENTE ringrazia il collega VINASSA per la bella e commossa commemorazione pronunciata.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. VINASSA DE REGNY presenta in omaggio il lavoro del suo scolaro A. Boni: « Studi statistici sulle popolazioni fossili » e ne espone il contenuto.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando « Metodi matematici » del Socio E. LORIA; il primo fascicolo della rivista « Acta medica italica »; il « Compendio di Entomologia applicata » del Socio F. SILVESTRI; due pubblicazioni fatte a cura della Società Montecatini per illustrare i nuovi impianti per i coloranti sintetici, e la produzione dell'azoto.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci CASTELNUOVO, GIORGI, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICH, PETRI.

Sulla Nota presentata dal Corrisp. PETRI, prende la parola il Socio PARRAVANO esprimendo il suo animo grato al Collega che contribuirà con il suo studio a dissipare le preoccupazioni che in Sicilia avevano diffuso in mezzo ai produttori agrumari le conclusioni del prof. Atanasof.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 marzo 1935

- Acta Medica Italica. — Raccolta di monografie storiche e di attualità riguardanti la medicina italiana in generale e le singole discipline speciali. Anno I, fasc. 1. Università italiana. Milano, 1935. 8°, pp. 1-168.
- BLANC A. C. — Studio cristallografico della cicloesanossima e del 2-6-dibenzal-cicloesan-1-one. (Estr. dai « Processi verbali della Società Toscana di Scienze naturali ». Vol. XLIII). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-5.
- BONATTI STEFANO. — Metodo grafico per il tracciamento degli assi dei cristalli geminati nel disegno ortografico. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze naturali ». Memorie, vol. XLIV). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-18.
- BONATTI STEFANO. — Metodo per la determinazione dei plagioclasti alla piastra forma di Fedorof. (Estr. dai « Processi verbali della Società Toscana di Scienze naturali ». Vol. XLIII). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-9.
- BONI A. — Studi statistici sulle popolazioni fossili *Chlamys scabrella* Lam. msp. e *Terebratulina sinuosa* Brocchi msp. (Estr. dalla « Rivista Italiana di Paleontologia ». Fasc. I, 1935). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-275, tavv. I-XIV.
- BOTTO COSTANTINO. — Una gloria scientifica d'Italia: il Matematico Giuseppe Peano, Cuneo 1858-Torino 1932. (Estr. dall'« Annuario del R. Istituto Tecnico di Cuneo », 1933-34). Cuneo, 1934. 8°, pp. 1-24.
- BUA GAETANO. — Seconda serie di esperimenti con sostanze attrattive per la mosca delle frutta « *Ceratitis capitata* » Wied. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVIII, pp. 295-308). Spoleto, 1935. 8°.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — Ginorite, nuovo borato di calcio di Sasso Pisano. (Estr. dal « Periodico di Mineralogia ». Anno V). Roma, 1934. 8°, pp. 1-11.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — Ammonioborite di W. T. Schaller. (Estr. dai « Processi verbali della Società Toscana di Scienze naturali ». Vol. XLIII). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-9.
- DE TONI NANDO. — L'idraulica in Leonardo da Vinci. Selezione dei passi di idraulica contenuti nei manoscritti B, C, D, E dell'Istituto di Francia (Frammenti Vinciani IV, V, VI). Brescia, 1935. 8°, pp. 1-14, 1-16, 1-17.
- GARCIA DAVID. — Introdució a la logística amb aplicacions a la filosofia i a les matemàtiques. Vol. I. Barcellona, 1934. 8°, pp. 1-XII, 1-233.
- KOCH C. — Risultati scientifici delle cacce entomologiche di S. A. S. il Principe Alessandro della Torre e Tasso nelle isole dell'Egeo. III. Anthicidae. V. Tenebrionidae. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVIII, pp. 257-281, 310-320). Spoleto, 1935. 8°.
- LORIA GINO. — Metodi matematici; essenza, tecnica, applicazioni. Milano, Editore Ulrico Hoepli, 1935. 12°, pp. 1-XV, 1-276.
- PATRICOLO MAJO G. — Notiziario aeronautico. Parte I. Le cronache; II. Rassegna della stampa; III. Bibliografia. Roma, 1935. 4°, pp. 1-16.
- POLLACCI GINO. — Luigi Robecchi Bricchetti. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia ». Vol. V). Pavia, 1934. 8°, pp. I-IX.
- ROSSONI P. — Contributo alla litologia del-

- l'isola del Giglio. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze naturali». Memorie, vol. XLIV). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-12.
- ROSSONI P. — Studio cristallografico-ottico di nuovi sali doppi di cianuro di mercurio con azotidrati alcalini ed alcalino-terrosi. (Estr. dai «Processi verbali della Società Toscana di Scienze naturali». Vol. XLIII). Pisa, 1934. 8°, pp. 1-12.
- SALFI M. — Su alcune specie del genere *Podisma* Latr. (Orth. acrididae). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Volume XXVIII, pp. 210-230). Spoleto, 1935. 8°.
- SCHATZMAYR A. — Risultati scientifici delle cacce entomologiche di S. A. S. il Principe Alessandro della Torre e Tasso nelle isole dell'Egeo. I Caraboidea (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Volume XXVIII, pp. 231-246). Spoleto, 1935. 8°.
- SCONZO ANTONINO. — Principi teorici e consigli pratici d'analisi chimica qualitativa inorganica. Sulmona, 1935. 8°, pp. I-XIII, 1-276.
- SILVESTRI F. — Compendio di entomologia applicata. (Agraria - forestale - medica - veterinaria). Vol. I. Parte speciale. Portici, 1934. 8°, pp. 1-448.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo genere di Afidi callipterini vivente in Italia sull'*Alnus cordata* Desf. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Volume XXVIII, pp. 290-294). Spoleto, 1935. 8°.
- Società Montecatini. — L'azoto e le iniziative della Montecatini in Italia e all'estero. Milano, 1934. 4°, pp. 1-81.
- Società Montecatini. — Una nuova grande industria italiana: i coloranti sintetici ed i loro prodotti intermedi. Milano, 1934. 4°, pp. 1-117.
- WITTMER (von) W. — Risultati scientifici delle cacce entomologiche di S. A. S. il Principe Alessandro della Torre e Tasso nelle isole dell'Egeo. II Malaco-dermata. IV Chrysomelidae et cerambycidae. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVIII, pp. 247-256, 182-289). Spoleto, 1935. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 marzo 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz.* Nota di T. BOGGIO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Come è notissimo, si devono ad Helmholtz delle equazioni differenziali assai notevoli, alle quali soddisfa il vettore *vortice* delle particelle di una massa fluida in movimento.

Tali equazioni sono di 1° ordine, ed omogenee se le forze di massa sono conservative.

Non mi consta che tali equazioni siano state integrate direttamente; negli ordinari trattati sull'idrodinamica (Appell, Lamb, Villat ecc.) ci si limita a stabilire le equazioni differenziali di Helmholtz (le quali si deducono dalle equazioni idrodinamiche sotto la forma di Eulero), poi si passa a stabilire i noti integrali di Cauchy (deducendoli dalle equazioni idrodinamiche sotto la forma di Lagrange), e poi si dice che tali integrali danno appunto gli integrali delle equazioni di Helmholtz.

Mi è sembrato perciò cosa non priva di interesse il cercare di integrare direttamente le equazioni differenziali di Helmholtz, per arrivare così agli integrali di Cauchy, rimanendo nell'ambito delle equazioni di Eulero.

A ciò si perviene abbastanza facilmente, come è mostrato nel n. 3 di questa Nota.

Anzi, contrariamente a quanto si fa comunemente, considero addirittura il caso generale in cui le forze applicate al fluido non sono conservative,

(1) Nella seduta del 17 marzo 1935.

e trovo (n. 2) come va completata l'equazione differenziale di Helmholtz relativa ai vortici; integro poi questa equazione più generale, ottenendo pertanto degli integrali che, nel caso di forze conservative, si riducono a quelli di Cauchy.

Mi valgo dei metodi e notazioni vettoriali che ho già adoperato nel 1910⁽¹⁾ per stabilire, senza ricorrere a coordinate di sorta, le equazioni idrodinamiche di Eulero, Lagrange, Helmholtz, Cauchy ecc.

1. Si consideri un fluido non viscoso, di cui indicheremo con ρ la densità nel punto generico P ; supponiamo il fluido soggetto all'azione di date forze di massa, e indichiamo con $\mathbf{F}$ il vettore di tale forza agente nel punto P , e riferita all'unità di massa.

L'equazione indefinita del movimento della massa considerata è notoriamente:

$$(1) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}_P p,$$

ove p è l'intensità della pressione agente nel punto P .

Trasformando quest'equazione secondo il punto di vista di Eulero, dovremo determinare il campo delle velocità $\mathbf{v}$ in ogni punto P e in ogni istante t , e allora osservando che

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v},$$

ove $\partial \mathbf{v} / \partial t$ è la derivata parziale di $\mathbf{v}(P, t)$ rispetto a t , e $d\mathbf{v} / dP$ è omografia vettoriale, la (1) si trasforma in:

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}_P p^{(2)},$$

che è l'equazione idrodinamica sotto la forma di Eulero; essa lega le funzioni incognite $\mathbf{v}, p, \rho$ delle variabili P, t .

Una volta ottenuta la velocità $\mathbf{v}$, i filetti fluidi risultano determinati integrando l'equazione:

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{v}(P, t).$$

Supponendo che la densità ρ sia funzione solo della pressione p (il che avviene certo se la temperatura è costante) la (2) diventa:

$$(2') \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \text{grad}_P \int \frac{dp}{\rho}.$$

(1) BOGGIO, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica*. («Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XLV, a. 1910).

(2) Cfr. BOGGIO, Nota citata.

2. Introducendo il vortice $\text{rot}_P \mathbf{v}$, o semplicemente $\text{rot } \mathbf{v}$, e tenendo conto di note formule ⁽¹⁾, si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v},$$

onde la (2') può scriversi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{F} - \text{grad}_P \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right);$$

conviene eliminare il grad, e per questo basta applicare ai due membri l'operatore rot, e si ha:

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot} [(\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}] = \text{rot } \mathbf{F},$$

od anche, ricordando una nota formula ⁽²⁾:

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\text{div } \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \text{rot } \mathbf{v} + \frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{F},$$

cioè:

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{F},$$

ossia:

$$\frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dt} + \text{div } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{F}$$

ora, dall'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

si può ricavare $\text{div } \mathbf{v}$ e sostituendo risulta:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} + \frac{\text{rot } \mathbf{F}}{\rho}.$$

Questa è la generalizzazione delle equazioni di Helmholtz; se la forza $\mathbf{F}$ è conservativa si ha $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ e allora l'equazione precedente, trasformata in coordinate cartesiane, coincide colle equazioni date da Helmholtz.

3. L'equazione precedente può venire facilmente integrata colle seguenti considerazioni.

(1) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*. Vol. I: *Trasformazioni lineari*, p. 181 e 188 (Zanichelli, Bologna, a. 1929).

(2) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., p. 188.

Riguardando, alla maniera di Lagrange, il punto P all'istante t come funzione della sua posizione P_0 al tempo t_0 (iniziale), si può considerare l'omografia vettoriale:

$$(4) \quad \alpha = dP/dP_0,$$

e l'equazione di continuità assume allora la forma⁽¹⁾:

$$(5) \quad \rho I_3 \alpha = \rho_0,$$

essendo ρ_0 la densità in P_0 , ed $I_3 \alpha$ l'invariante terzo (o determinante) dell'omografia α .

Ne segue $I_3 \alpha \neq 0$, perciò l'omografia α è invertibile e risulta:

$$\alpha^{-1} = dP_0/dP.$$

Ciò posto, si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dP} = \frac{d\mathbf{v}}{dP_0} \frac{dP_0}{dP} = \left(\frac{d}{dP_0} \frac{dP}{dt} \right) \alpha^{-1} = \left(\frac{d}{dt} \frac{dP}{dP_0} \right) \alpha^{-1} = \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1},$$

perciò la (3) diventa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} + \frac{\text{rot } \mathbf{F}}{\rho},$$

che può scriversi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d}{dt} \left(\alpha \cdot \alpha^{-1} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) - \alpha \frac{d}{dt} \left(\alpha^{-1} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) + \frac{\text{rot } \mathbf{F}}{\rho},$$

dalla quale, riducendo, si trae:

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^{-1} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) = \alpha^{-1} \frac{\text{rot } \mathbf{F}}{\rho},$$

perciò:

$$\alpha^{-1} \frac{\text{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \mathbf{a} + \int_{t_0}^t \alpha^{-1} \frac{\text{rot}_P \mathbf{F}}{\rho} dt,$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante da determinare; ora, ponendo $t = t_0$ e osservando che l'omografia α^{-1} si riduce allora all'identità, ne segue:

$$\frac{\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} = \mathbf{a},$$

e sostituendo risulta:

$$(6) \quad \frac{\text{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0} \left(\frac{\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} + \int_{t_0}^t \frac{\alpha^{-1} \text{rot}_P \mathbf{F}}{\rho} dt \right).$$

(1) BOGGIO, Not a citata.

Questa formula costituisce l'*integrale generale* della (3); nel secondo membro figura la ρ , che può essere eliminata mediante la (5) e si ha così:

$$(6') \quad \frac{\text{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0} \left[\frac{\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t I_3 \alpha (\alpha^{-1} \text{rot}_P \mathbf{F}) dt \right].$$

Se la forza $\mathbf{F}$ è conservativa, l'ultimo termine entro parentesi sparisce, e la formula risultante, trasformata in coordinate cartesiane, coincide coi noti integrali di Cauchy.

4. Si può trasformare facilmente il vettore $\text{rot}_P \mathbf{F}$ in modo da farvi figurare l'operatore rot_{P_0} ; basta applicare una formula generale, che ho dato già nel 1910⁽¹⁾ e della quale, per comodità del lettore, riprodurrò la breve dimostrazione.

Essendo dP è δP due spostamenti qualunque di P si ha, ricordando la (4):

$$\begin{aligned} \text{rot}_P \mathbf{F} \times dP \wedge \delta P &= \text{rot}_P \mathbf{F} \times \alpha dP_0 \wedge \alpha \delta P_0 = \\ &= \alpha (\alpha^{-1} \text{rot}_P \mathbf{F}) \times \alpha dP_0 \wedge \alpha \delta P_0, \end{aligned}$$

od anche, ricordando la definizione di invariante terzo di un'omografia:

$$(7) \quad \text{rot}_P \mathbf{F} \times dP \wedge \delta P = I_3 \alpha (\alpha^{-1} \text{rot}_P \mathbf{F}) \times dP_0 \wedge \delta P_0;$$

d'altra parte, dalla definizione elementare di $\text{rot}_P \mathbf{F}$, e dal teorema di commutazione⁽²⁾, si ha:

$$\begin{aligned} \text{rot}_P \mathbf{F} \times dP \wedge \delta P &= d\mathbf{F} \times \delta P - \delta \mathbf{F} \times dP = d(\mathbf{F} \times \delta P) - \delta(\mathbf{F} \times dP) = \\ &= d(\mathbf{F} \times \alpha \delta P_0) - \delta(\mathbf{F} \times \alpha dP_0) = d(K \alpha \mathbf{F} \times \delta P_0) - \delta(K \alpha \mathbf{F} \times dP_0) = \\ &= \text{rot}_{P_0} (K \alpha \mathbf{F}) \times dP_0 \wedge \delta P_0; \end{aligned}$$

dal confronto di questa relazione colla (7) si deduce:

$$I_3 \alpha (\alpha^{-1} \text{rot}_P \mathbf{F}) = \text{rot}_{P_0} (K \alpha \mathbf{F}),$$

e sostituendo nella (6') si ha infine:

$$(6'') \quad \frac{\text{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0} \left[\frac{\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t \text{rot}_{P_0} \left(K \frac{dP}{dP_0} \mathbf{F} \right) dt \right].$$

Pertanto, quando le forze non sono conservative, gli integrali classici di Cauchy devono essere sostituiti coll'integrale (6), o cogli equivalenti (6') o (6'').

(1) Essa, con altre analoghe, è riportata a p. 220 dell'opera citata di BURALI-FORTI e MARCOLONGO.

(2) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., pp. 65 e 175.

Matematica. — *Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace*⁽¹⁾. Nota di F. TRICOMI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

I. L'osservazione che, nel caso di una funzione $f(s)$ olomorfa e nulla all'infinito, l'inversione della trasformazione di Laplace:

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

può compiersi in modo molto più semplice che non col metodo generale da me precedentemente indicato⁽³⁾, è certo assai interessante ma i due sviluppi « coniugati » che tu mi segnali:

$$(2) \quad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{s^{k+1}}, \quad F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} t^k,$$

sono stati già da tempo sistematicamente utilizzati da Borel e dalla sua scuola⁽⁴⁾ per lo studio delle serie divergenti. In particolare le serie (2) si trovano, nella stessa forma in cui tu le scrivi, in un bel lavoro del 1928 di G. Pólya⁽⁵⁾, e così pure l'altra tua osservazione che, nelle condizioni suaccennate, la funzione $F(t)$ può venir calcolata per mezzo della formula

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(s) e^{st} ds,$$

dove C è una qualsiasi curva chiusa del piano s (p. es. un cerchio), comprendente nel suo interno tutti i punti singolari di $f(s)$.

Se invece la funzione $f(s)$ non è olomorfa (e nulla) all'infinito, gli sviluppi (2) cadono, naturalmente, in difetto. Resta però sempre il fatto notevole che essi, anzi le due serie più generali:

(1) Estratto da una lettera al prof. M. PICONE, a Roma.

(2) Nella seduta del 17 marzo 1935.

(3) Nella Nota: *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, I. Questi « Rendiconti », ser. 6^a, fasc. IV, p. 232.

(4) Cfr. E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*. (Paris, Gauthier-Villars, 1928); specialmente i cap. III e IV.

(5) *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*. « Math. Zeitschr. », 29 (1928-29), 549-640; v. specialmente pp. 578-80.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{s^{\lambda_k+1}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\Gamma(\lambda_k+1)} t^{\lambda_k},$$

dove $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ sono numeri reali qualsiasi, perchè tali da aversi

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

conservano il carattere di *sviluppi asintotici* di f ed F , nel senso che, sotto condizioni assai poco restrittive, si dimostra ⁽¹⁾ che se è:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{\Gamma(\lambda_k+1)} t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_m}), \quad (t \rightarrow 0),$$

allora è pure:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{s^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{s^{\lambda_m+1}}\right), \quad (s \rightarrow \infty).$$

2. Quanto al mio metodo per l'inversione della trasformazione di Laplace che (prescindendo, per semplicità, dall'estensione mediante i polinomi di Laguerre *generalizzati*) è fondato, come ricorderai, sull'impiego dei due sviluppi coniugati:

$$(3) \quad f(s) = \frac{1}{s+h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n, \quad \left(\sigma = 1 - \frac{1}{s+h}\right),$$

$$(3') \quad F(t) = e^{-ht} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t);$$

esso ha evidentemente un campo di validità ben più vasto di quello costituito dalle funzioni $f(s)$ olomorfe e nulle all'infinito, caso su cui, se particolarmente mi soffermai nella mia Nota del 17 febbraio, fu perchè allora è senz'altro assicurata la convergenza (assoluta ed uniforme) della serie (3').

Per persuadersi di ciò basta del resto riferirsi al Teorema I della tua Nota seguita alla mia ⁽²⁾, il quale, in sostanza, assicura l'applicabilità del metodo, sotto la condizione che i coefficienti a_n siano tali che la serie $\sum a_n^2$ risulti convergente.

Daltronde si può facilmente dimostrare che:

(1) Cfr. V. BERNSTEIN, *Séries de Dirichlet*. (Paris, Gauthier-Villars, 1933), p. 294; oppure G. DOERSCH, *Ein allgemeines Prinzip...* « Journ. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle) », 167 (1931), 274-293; v. specialmente p. 285.

(2) M. PICONE, *Sulle trasformate di Laplace*. Questi « Rendiconti », ser. 6^a, fasc. V, p. 306.

Se la funzione $f(s)$, olomorfa o non olomorfa all'infinito, è tale che la funzione $sf(s)$ risulti olomorfa e LIMITATA in un semipiano $\Re(s) \geq b$; allora, supposto $b \geq 1/2 - b$, la serie

$$(4) \quad F(t, \alpha) = e^{-bt} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n L_n(t), \quad (0 < \alpha < 1),$$

converge assolutamente ed uniformemente in ogni intervallo finito del semiasse reale $t \geq 0$, e definisce ivi una funzione $F(t, \alpha)$ godente della proprietà espressa dalla formula:

$$(5) \quad \left| f(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t, \alpha) dt \right|.$$

In altre parole: pur non potendosi in generale asserire che, nelle condizioni del teorema, la funzione $f(s)$ sia una trasformata di Laplace⁽¹⁾, è però certo che essa è un *limite di trasformate siffatte*, e precisamente il limite per $\alpha \rightarrow 1$ della trasformata della funzione $F(t, \alpha)$ data dalla (4).

Per pervenire a questo teorema non vi è che da ripetere, passo per passo, la dimostrazione del Teorema I della mia Nota del 17 febbraio, dopo aver osservato che, detto A l'estremo superiore del modulo della funzione $f_1 = (s + b)f(s)$ nel semipiano $\Re(s) \geq b$, i coefficienti a_n dello sviluppo di f_1 in serie (con raggio di convergenza non inferiore ad 1) di potenze di σ , soddisfano certo alla limitazione

$$|a_n| \leq A,$$

donde segue che il termine generale della serie (4) è certo non superiore, in valore assoluto, ad

$$A \alpha^n |L_n(t)|.$$

La sola differenza rispetto all'analogia formula della mia precedente Nota è dunque che la quantità $1/\rho$ ($\rho > 1$) di allora, viene ora sostituita da α ($\alpha < 1$). Se ne conclude, tal quale come nella Nota I, che la serie (4) converge assolutamente ed uniformemente in ogni intervallo finito del semiasse $t \geq 0$, e che vale la formula:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t, \alpha) dt = \frac{1}{s + b} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha \sigma)^n,$$

(1) Lo si potrebbe invece asserire se fosse: $sf(s) = c + \mu(s)/s$, con $\mu(s)$ funzione limitata nel semipiano $\Re(s) \geq b$. (Teor. di NÖRLUND, v. BOREL, op. cit., p. 237).

donde, con facile calcolo, si trae che:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t, \alpha) dt = \frac{f\left[\frac{s-b(s+b-1)(1-\alpha)}{1+(s+b-1)(1-\alpha)}\right]}{1+(s+b-1)(1-\alpha)}.$$

Passando al limite per $\alpha \rightarrow 1$ viene senz'altro la (5).

Dal teorema ora dimostrato si deduce un interessante corollario relativo al caso in cui i coefficienti a_n siano tali che la serie (3') riesca *assolutamente* convergente qualunque sia $t > 0$, e che la funzione

$$\Phi(t) = e^{-ht} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n L_n(t)|,$$

moltiplicata per $e^{-st} dt$ risulti, almeno per s reale e sufficientemente grande, integrabile fra 0 ed ∞ . Propriamente dico che, sotto le predette condizioni addizionali, nella (5) si può passare al limite sotto integrale, ottenendo così senz'altro, tenuto conto del teorema di Abel, che:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t, 1) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Infatti, detti t_1 e t_2 due qualsiasi valori (positivi) di t , nelle condizioni di cui sopra si ha

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} F(t, \alpha) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} e^{-(h+s)t} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n |a_n L_n(t)| \cdot dt < \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} \Phi(t) dt,$$

il che basta per concludere che l'integrale che figura nella (5) è *uniformemente convergente* rispetto ad α .

3. Un semplice esempio di funzione $f(s)$ non olomorfa all'infinito, ma a cui ciononostante è applicabile il mio metodo d'inversione della Laplace, è offerto dalla funzione

$$f_0(s) = \frac{1}{s} e^{-as}, \quad (a > 0)$$

che, come subito si verifica, è la trasformata di Laplace della funzione discontinua $T_a(t)$ definita dalle formule:

$$T_a(t) = 0 \quad , \quad (0 \leq t < a) \quad ; \quad T_a(t) = 1 \quad , \quad (a < t).$$

Merita soffermarsi un momento su questo esempio che, come vedremo, dà luogo ad alcune notevoli formule suscettibili di varie applicazioni.

All'uopo cominciamo con l'osservare che la funzione $T_a(t)$, essendo integrabile, a variazione limitata e finita per $t \rightarrow \infty$, è certo sviluppabile in serie di polinomi di Laguerre⁽¹⁾; propriamente, essendo i polinomi L_n che noi consideriamo già *normalizzati*, si avrà⁽²⁾ che:

$$T_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t),$$

avendo posto

$$c_n = \int_0^{\infty} T_a(t) e^{-t} L_n(t) dt = \int_a^{\infty} e^{-t} L_n(t) dt.$$

Ma, com'è facile vedere tenendo conto della nota formula

$$L'_n(t) - L'_{n-1}(t) + L_{n-1}(t) = 0,$$

si ha

$$\int_a^{\infty} e^{-t} L_n(t) dt = e^{-a} [L_n(a) - L_{n-1}(a)];$$

dunque viene in definitiva:

$$(6) \quad T_a(t) = e^{-a} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)] L_n(t) \right\}.$$

Ciò premesso, vediamo cosa si ottiene applicando alla funzione $f_0(s)$ il nostro metodo d'inversione con $h = 0$:

Essendo in questo caso:

$$sf_0(s) = e^{-as} = e^{-\frac{a}{1-\sigma}} = (1-\sigma) e^{-a} \frac{e^{-\frac{a\sigma}{1-\sigma}}}{1-\sigma},$$

poichè l'ultima frazione non è altro se non la funzione generatrice dei polinomi di Laguerre, avremo senz'altro che:

(1) Ved. p. es. G. SZEGÖ, *Beiträge zur Theorie des Laguerreschen Polynome*. «Math. Zeitschr.», 25 (1926), 87-115; p. 110. Colgo l'occasione per aggiungere ai lavori sugli sviluppi di funzioni in serie di polinomi di Laguerre, Hermite ecc., citati nella mia precedente Nota, quello di M. PICONE, *Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati*. «Giorn. Ist. Ital. Attuari», 5 (1934), 155-195.

(2) Con la solita avvertenza che, nei punti di discontinuità della funzione (qui il punto $t = a$), la serie fornisce la media aritmetica dei due limiti: sinistro e destro.

$$sf_0(s) = (1 - \sigma) e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(a) \sigma^n$$

cioè

$$sf_0(s) = e^{-a} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)] \sigma^n \right\}.$$

Se ne conclude che, nel caso in esame, è

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_n = L_n(a) - L_{n-1}(a) \quad , \quad (n \geq 1),$$

ossia che il metodo d'inversione conduce alla stessa serie (6) dianzi ottenuta, come doveva essere.

Dalla (6) moltiplicando per $e^{-t} dt$ ed integrando fra b e ∞ termine a termine (il che è lecito) si trae la seguente semplice e curiosa formula, che credo nuova:

$$(7) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)] [L_n(b) - L_{n-1}(b)] = e^{m(a,b)},$$

dove $m(a, b)$ denota il più piccolo dei due numeri positivi a e b . In particolare per $a = b = x$, si ha la formula:

$$(8) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)]^2 = e^x,$$

che probabilmente non è stata neanche essa mai osservata, per quanto non sia altro se non l'equazione di Parseval per la funzione $T_x(t) e^{-\frac{t}{2}}$ nel sistema ortogonale $\{L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}\}$.

Noto finalmente che la circostanza che la funzione $T_a(t)$ ha come trasformata di Laplace la funzione $f_0(s)$, implica che, più in generale, una qualsiasi *funzione a scala* $F(t)$, definita da una serie del tipo

$$(9) \quad F(t) = a_0 T_{\lambda_0}(t) + a_1 T_{\lambda_1}(t) + a_2 T_{\lambda_2}(t) + \dots$$

$$(0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots),$$

dove $a_0, a_1, a_2, \dots$ denotano costanti qualsivogliono; avrà (a prescindere da questioni di convergenza) come trasformata di Laplace la funzione:

$$(9') \quad f(s) = \frac{1}{s} (a_0 e^{-\lambda_0 s} + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots),$$

e cioè, a meno del fattore $1/s$, una generica *serie di Dirichlet*; e viceversa.

Il fattore in più $1/s$ potrà, volendo, evitarsi considerando, invece del solito integrale di Laplace, l'integrale di Laplace-Stieltjes:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dF(t).$$

Le ultime formule pongono in chiara luce gli intimi rapporti esistenti fra la teoria della trasformazione di Laplace e quella delle serie di Dirichlet; rapporti che, probabilmente, non sono stati finora sfruttati quanto potevano esserlo.

Matematica. — *Sopra alcuni problemi condizionati del calcolo delle variazioni* ⁽¹⁾. Nota di B. MANIÀ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

I. — E. J. McShane recensendo una mia Memoria sui problemi di Lagrange e di Mayer pubblicata nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » ⁽³⁾ mi fa la seguente osservazione: *But it is not correct that conditions of the form $g_k[x(0), \dots, u_m(0); x(L), \dots, u_m(L)] = 0$ can be imposed, for the values $u_i(L)$ are merely lower semi-continuous functions of the curve* ⁽⁴⁾.

Questa osservazione del McShane non si riferisce ai teoremi da me dimostrati nella Memoria citata, ma alla possibilità di estendere in vari sensi tali teoremi, possibilità a cui ho accennato ivi brevemente ⁽⁵⁾, senza entrare in dettagli che mi avrebbero condotto in lungo e che non avrebbero presentato nulla di concettualmente nuovo rispetto ai teoremi dimostrati precedentemente nella stessa Memoria.

Qui dimostrerò dapprima con un esempio che, *contrariamente all'affermazione del McShane*, il metodo da me seguito si estende anche a casi in cui nei problemi considerati compaiano delle condizioni della forma $g_k[x(0), \dots, u_m(0); x(L), \dots, u_m(L)] = 0$. Poi, sempre in contrasto con l'affermazione del McShane, darò un teorema generale relativo al problema di Mayer e indicherò anche delle estensioni relative al problema di Lagrange.

Però, prima di esporre l'esempio ed il teorema a cui ho accennato, voglio rilevare che l'affermazione del McShane è già smentita da un teorema

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 17 marzo 1935.

(3) « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. 58, 1934, pp. 285-310.

(4) « Zentralblatt für Mathematik », 10. Band, Heft 3, gennaio 1935, p. 119.

(5) Loc. cit., pp. 301-302.

del Tonelli di oltre vent'anni fa⁽¹⁾, di cui riporto qui il seguente caso particolare.

« Sia $I_C = \int_C G(x, y, x', y') ds$ un integrale quasi regolare definito positivo, e $I_C = \int_C \{M(x, y) x' + N(x, y) y'\} ds$; sia $\varphi(u, v)$ una funzione finita e continua per tutti i valori di u e di v .

Allora, fra tutte le curve C che giacciono in un dato rettangolo R e che soddisfano l'uguaglianza

$$\varphi(I_C, J_C) = 0,$$

ve n'è almeno una che rende minimo I_C ».

Se poniamo in questa proposizione $M \equiv N \equiv 1$, e interpretiamo il problema di minimo in essa considerato come un problema di Mayer relativo alla equazione differenziale

$$u' = G(x, y, x', y')$$

con la condizione

$$\varphi[u(L), x(L) - x(0) + y(L) - y(0)] = 0$$

resta provata la nostra affermazione.

2. — Passiamo ora all'esempio a cui abbiamo accennato sopra.

Sia K la classe delle curve continue e rettificabili

$$C: x = x(s), y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

del semipiano $y \geq 0$, per le quali è

$$x(0) = 0, \quad x(L) = \bar{x},$$

con $\bar{x}$ costante diversa da zero, e per le quali inoltre l'equazione differenziale

$$(1) \quad u' = (1 + x^2 + y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2} (1 + u^2)$$

ammette almeno una soluzione $u(s)$, assolutamente continua nell'intervallo $(0, L)$, con $u(s)$ sempre ≤ 0 , e tale che

$$(2) \quad [1 - u(0)][1 + y(0)] + \frac{1}{1 + u^2(L)} = c,$$

con c costante.

(1) L. TONELLI, *Sul problema degli isoperimetri*. Nota II, «Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei», 1914, 2° sem. pp. 572-577.

Almeno per certi valori di $\bar{x}$ e di ε la classe K non è vuota.

Il funzionale $u(s)$ definito dalla (1) è semicontinuo inferiormente sopra ogni curva C_0 per la quale esiste, nel senso che se $u_0(s)$ è una soluzione della (1) corrispondente a C_0 , e se ε è un numero positivo assegnato, è sempre possibile determinare un numero $\rho > 0$ tale che, se C è una curva continua e rettificabile appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) di C_0 , per la quale l'equazione (1) ammetta una soluzione $u(s)$ assolutamente continua nell'intervallo $(0, L)$ con $u(s) \leq 0$ e

$$|u(0) - u_0(0)| < \rho,$$

per ogni corrispondenza Ω fra i punti di C e di C_0 tale che due punti corrispondenti distino sempre non più di ρ , si abbia

$$u(P) > u_0(P_0) - \varepsilon,$$

essendo P e P_0 due punti corrispondenti qualunque di C e di C_0 .

Ciò si vede ripetendo con qualche lieve modificazione i ragionamenti del n. 1 della mia Nota *Sul problema di Mayer* ⁽¹⁾ pubblicata in questi « Rendiconti ».

Dopo ciò osserviamo che a causa della (2) i valori iniziali $u(0)$ sopra le curve della classe K sono limitati. Dalla (1) e dalla $u(s) \leq 0$ segue che anche i valori $u(L)$ sopra le nostre curve sono limitati e quindi ammettono un estremo inferiore i finito.

Sia

$$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$$

una successione minimizzante per $u(L)$ ⁽²⁾, e sia U_n l'insieme dei valori iniziali delle soluzioni della (1) corrispondenti alle curve di W_n . La successione

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

ha almeno un punto limite: sia $\bar{u}$; e sia

$$(3) \quad W'_1, \dots, W'_n, \dots$$

una successione di insiemi di curve, con W'_n tratto da un W_m , con $m \geq n$, tale che la successione corrispondente

$$U'_1, \dots, U'_n, \dots$$

converga uniformemente a $\bar{u}$.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XVIII, ser. 6^a, 1933, pp. 358-365.

(2) Si noti bene che ad ogni curva di un qualunque W_n è associata una soluzione dell'equazione (1) corrispondente a quella curva.

Possiamo di più supporre, per noti ragionamenti⁽¹⁾, che la successione (3) sia stata scelta in modo da essere uniformemente convergente a una curva continua e rettificabile C_0 , di equazioni $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, ($0 \leq s \leq L_0$).

Dalla dimostrazione del n. 2 della mia Nota citata, segue che per C_0 l'equazione (1) ammette in tutto l'intervallo $(0, L_0)$ una soluzione assolutamente continua $u_0(s)$ con $u_0(0) = \bar{u}$, e dalla semicontinuità inferiore già stabilita segue che

$$u_0(L_0) \leq i.$$

Se è $u_0(L_0) = i$, la curva C_0 con la funzione $u_0(s)$ soddisfa alla (2) e perciò C_0 appartiene alla classe K e dà il minimo di $u(L)$ in questa classe.

Supponiamo dunque che possa aver luogo la disuguaglianza

$$(4) \quad u_0(L_0) < i.$$

In questo caso è

$$[1 - u(0)][1 + y(0)] + \frac{1}{1 + u_0^2(L_0)} < c.$$

Sia $\tilde{u}(y)$ la soluzione dell'equazione

$$\frac{d\tilde{u}}{dy} = -(1 + y^2)(1 + u^2)$$

definita a destra di $y_0(0)$ e tale che $\tilde{u}[y_0(0)] = \bar{u}$. Vi è certamente un $\bar{y} > y_0(0)$ per il quale

$$(5) \quad [1 - \tilde{u}(\bar{y})](1 + \bar{y}) + \frac{1}{1 + u_0^2(L_0)} = c.$$

Se aggiungiamo alla curva C_0 il segmento dell'asse delle y che va dal punto di ordinata $\bar{y}$ al punto di ordinata $y_0(0)$, otteniamo una curva C^* per la quale la (1) ammette una soluzione $u^*(s)$ soddisfacente a tutte le condizioni indicate sopra, con $u^*(0) = \tilde{u}(\bar{y})$ e $u^*(L^*) = u_0(L_0) < i$.

Ma dalla (5) segue che C^* appartiene alla classe K e quindi non può essere

$$u^*(L^*) < i.$$

Dunque la (4) è assurda e si ha proprio

$$u_0(L_0) = i,$$

e la C_0 è una curva minimante per $u(L)$ nella classe K.

(1) Si tenga presente che, essendo $u(0)$ e $u(L)$ limitati, dalla (1) segue che risultano limitate anche le lunghezze L , e che le curve degli insiemi W_n restano in un campo limitato.

3. — Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA. — Sia A un campo limitato e chiuso di uno spazio euclideo a r dimensioni;

sia $\varphi(x_1, \dots, x_r; x'_1, \dots, x'_r; u) = \varphi(x, x', u)$ una funzione finita e continua per $(x_1, \dots, x_r) = (x)$ appartenente al campo A , $x'_1, \dots, x'_r$ numeri qualunque non tutti nulli e $u \leq \alpha$, con α numero fissato, e inoltre tale funzione sia sempre positiva e non crescente in u ;

per ogni $u \leq \alpha$ fissato l'integrale

$$\int_C \varphi(x, x', u) ds$$

sia semicontinuo inferiormente.

Allora nella classe K delle curve continue e rettificabili del campo A

$$C: \quad x = x(s) \quad , \quad (0 \leq s \leq L),$$

per le quali l'equazione differenziale

$$(6) \quad u' = \varphi(x, x', u)$$

ammette una soluzione $u(s)$ assolutamente continua in tutto $(0, L)$, con $u(0)$ appartenente a un insieme limitato chiuso I fissato della semiretta $u \leq \alpha$ e $u(s) \leq \alpha$, e per le quali inoltre sono soddisfatte certe condizioni della forma

$$g_k[x(0), u(0); x(L), u(L)] = 0,$$

dove le g_k sono funzioni continue per tutti i valori reali dei loro argomenti, esiste il minimo di $u(L)$ (supposto che la classe K non sia vuota).

Il funzionale $u(s)$ è semicontinuo inferiormente sopra le curve continue e rettificabili C del campo A per le quali esiste, nel senso precisato al n. 2, e $u(L)$ è limitato nella classe K . Indichiamo con i il limite inferiore di $u(L)$ in K e sia W_n l'insieme delle curve di K per le quali

$$u(L) \leq i + \frac{1}{n} \quad (1).$$

Le curve della classe K hanno tutte lunghezza inferiore a un numero fisso, e quindi dalla successione dei W_n , si può trarre una successione $W'_1, \dots, W'_n, \dots$ con W'_n contenuto in un W_m di indice $m \geq n$, in modo che la successione dei W'_n converga uniformemente a una curva continua e rettificabile C_0 , e in modo che, indicando con U'_n l'insieme dei valori delle soluzioni della (6) associate alle curve di W'_n , la successione $U'_1, \dots, U'_n, \dots$ converga a un valore u_0 .

(1) Si ricordi che, come abbiamo già notato, ad ogni curva di un W_n è associata una soluzione della (6).

Allora sopra la C_0 esiste una soluzione $u_0(0)$ della (6) con $u_0(0) = u_0$ soddisfacente a tutte le condizioni indicate nell'enunciato ⁽¹⁾, e si ha

$$u_0(L_0) \leq i.$$

Poichè evidentemente è

$$g_k[x_0(0), u_0(0); x_0(L_0), i] = 0,$$

se $u_0(L_0) = i$, la curva C_0 appartiene alla classe K e dà il minimo cercato. Se è invece $u_0(L_0) < i$, possiamo aggiungere alla curva C_0 , a partire dall'ultimo punto, un arco da percorrere prima in un senso e poi nel senso opposto fino a tornare al punto di partenza, in modo da ottenere una curva C^* appartenente al campo A , con gli stessi estremi di C_0 , e per la quale la (6) abbia una soluzione $u^*(s)$ con $u^*(0) = u_0(0)$ e $u^*(L^*) = i$.

La C^* fornisce il minimo cercato.

4. Finora abbiamo considerato soltanto problemi di Mayer relativi a un'unica equazione differenziale, ma risultati analoghi si potrebbero ottenere, con opportune osservazioni, anche per problemi di Mayer relativi a dei sistemi differenziali del tipo da me studiato nella Memoria citata dei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ». Però non mi soffermo su questo punto e passo a dare alcuni esempi relativi al problema di Lagrange.

5. In uno spazio euclideo ad r dimensioni sia da studiare il problema di Lagrange relativo al minimo di un integrale della forma

$$I_C = \int_C \{ M_1(x) x'_1 + \dots + M_r(x) x'_r \} ds,$$

con le $M_1(x), \dots, M_r(x)$, continue nel campo del teorema del n. 3, intendendo che la curva C possa variare nella classe K definita nell'enunciato di quel teorema.

L'integrale I_C è una funzione continua sopra ogni curva continua e rettificabile del campo A , e, invertendo il senso sopra la curva sulla quale è calcolato, il valore dell'integrale I_C si trasforma nel valore opposto. Da questi due fatti e dal ragionamento del n. 3 segue che nella classe K esiste il minimo di I_C .

6. Un altro esempio relativo al problema di Lagrange è il seguente; e per non dilungarci a enunciare delle condizioni, del resto facili a precisare, consideriamo un caso particolare.

(1) Vedi la mia Nota lineea citata, pp. 363-364.

La classe K sia quella dell'esempio considerato al n. 2, e sia

$$I_C = \int_C h(x, y, u) (\sqrt{x'^2 + y'^2} - y') ds,$$

con $h(x, y, u)$ finita e continua, positiva e non decrescente in u , per (x, y) qualunque e $u \leq 0$.

Se $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ è una successione minimizzante per I_C nella classe K , possiamo supporre che tale successione converga uniformemente a una curva continua e rettificabile C_0 , e che i valori iniziali e finali delle soluzioni della (1) associate alle curve dei W_n convergano rispettivamente a due valori u_0 e u_1 . Allora sopra la curva C_0 esiste una soluzione $u_0(s)$ della (1) con $u_0(0) = u_0$ e $u(s) \leq 0$ in tutto $(0, L_0)$, e si ha

$$u_0(L_0) \leq u_1,$$

$$[1 - u_0(0)][1 + y_0(0)] + \frac{1}{1 + u_1^2} = c.$$

Se è $u_0(L_0) = u_1$ la curva C_0 appartiene alla classe K , se è $u_0(L_0) < u_1$, si può aggiungere a C_0 a partire dal suo secondo estremo un segmento diretto nel senso positivo dell'asse delle y in modo da ottenere una curva C^* appartenente alla classe K .

Ora è

$$I_{C_0} = I_{C^*},$$

e poichè I_{C_0} è minore o uguale del minimo limite dei valori di I_C sopra le curve degli insiemi $W_n^{(1)}$, si vede che I_{C^*} fornisce il minimo cercato.

7. È chiaro ormai che si potrebbero costruire numerosi altri esempi. Qui mi limito a osservare che quanto finora abbiamo detto sui problemi di Mayer e di Lagrange, permette di costruire degli esempi analoghi a quelli indicati anche per il problema di Bolza. Così risultano completamente giustificate le affermazioni da me fatte nella mia Memoria citata.

(1) Ciò si dimostra facilmente coi ragionamenti del Teorema I, della mia Memoria citata.

Meccanica. — *Sur la déduction des formules de Lorentz.*
Nota di L. R. GOMES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si nous parcourons les nombreuses déductions des formules de Lorentz qui relient entre elles les coordonnées d'espace-temps x, y, z, t et x', y', z', t' d'un même événement rapporté à deux systèmes S et S' (systèmes physiques composés d'un trièdre et d'un cronomètre) animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme avec une certaine vitesse v , nous découvrons toujours à côté des hypothèses relativistes — *invariance de la vitesse c de la lumière et équivalence physique des deux systèmes S et S' pour la description des phénomènes* — une hypothèse supplémentaire qui nous semble indispensable pour assurer la linéarité des formules en question.

Quelquesfois on va même jusqu'au point de poser tout simplement: x', y', z', t' — combinaisons linéaires de x, y, z, t et le problème se réduit à la détermination des coefficients de manière que les deux hypothèses relativistes se trouvent vérifiées.

Ce que je viens de dire sur l'introduction d'une hypothèse supplémentaire en vue de la linéarité des formules de transformation qui relient les x, y, z, t aux x', y', z', t' , se trouve déjà en toute clarté dans une Note de M^{lle} Munari publiée aux « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » nella seduta del 17 maggio 1914 sous le titre *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività* (vol. XXIII, ser. 5^a, 1^o sem., fasc. 10).

Pourtant, l'auteur, en formulant le problème de la déduction des formules de Lorentz, s'exprime ainsi: *determinare l'espressione più generale di una trasformazione puntuale fra due quaterne (x, y, z, t) , (x', y', z', t') per effetto della quale si conservano i movimenti uniformi dotati di una assegnata velocità c ; ed in tutto il campo reale, a valori finiti di x, y, z, t corrispondano valori finiti di x', y', z', t' . Il a recours donc à l'hypothèse qualitative — a valori finiti di x, y, z, t corrispondano valori finiti di x', y', z', t' — qui seule lui permet d'exclure de son raisonnement final — la inversione per raggi vettori reciproci — c'est-à-dire, une transformation non linéaire.*

Or, il me semble possible d'éviter toutes ces hypothèses supplémentaires sous la seule condition de bien traduire le fait que S (ou S') est animé d'un mouvement uniforme par rapport à S' (ou à S).

C'est que, à notre avis, le comportement cinématique de S' par rapport à S doit avoir la traduction suivante: *si un axe o' x' (système S') se déplace*

(1) Nella seduta del 17 marzo 1935.

d'un mouvement uniforme de vitesse v le long d'un autre axe ox (système S), l'invariabilité de $x - vt$ entraîne nécessairement l'invariabilité de x' .

Où ce qui revient au même: les valeurs de la fonction $x' = f(x, t)$ qui nous donne la coordonnée x' (en $o'x'$) d'un événement auquel correspondent les coordonnées x, t en ox , se propagent le long de ox avec la vitesse v .

Or, le fait de cette propagation ensemble avec les deux hypothèses relativistes nous donne finalement les formules de Lorentz.

C'est ce petit détail, peut être original, que je vais présenter dans le déduction qui s'ensuit.

2. Nous nous plaçons dans le cas le plus simple — une seule dimension spatiale — et nos seules hypothèses ce sont:

a) L'axe $o'x'$ est animé d'un mouvement uniforme relativement à ox (hypothèse relative à la manière dont se comporte cinématiquement S' en relation à S).

b) La lumière a la même vitesse (en valeur absolue) dans les deux systèmes ox et $o'x'$ (hypothèse de l'invariabilité de la vitesse de la lumière).

c) les lois des phénomènes physiques ont des traductions analytiques formellement identiques, dans les deux systèmes (hypothèse de l'équivalence des deux systèmes ou principe de la relativité).

L'hypothèse a) signifie que si l'on pose

$$x = vt + \text{const.}$$

en représentant par v la vitesse de $o'x'$ par rapport à ox , on aura

$$x' = \text{const.}$$

En d'autres termes, si nous remplaçons x par une nouvelle variable u reliée à la première au moyen de l'équation

$$u = x - vt$$

de sorte que

$$\begin{aligned} x' &= f(x, t) = f[u + vt, t] \\ &= \theta(u, t), \end{aligned}$$

la nouvelle fonction θ ne dépend pas de t , mais très simplement de u .

La fonction primitive $f(x, t)$ dépend de x et t exclusivement par l'intermédiaire de l'argument

$$u = x - vt$$

Donc

$$\begin{cases} x' = \varphi(x - vt) \\ t' = \psi(x, t). \end{cases}$$

Mais, d'après la seconde hypothèse, les equations

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0 \quad , \quad dx'^2 - c^2 dt'^2 = 0 ,$$

la vitesse de la lumière étant c , doivent être équivalentes.

Or,

$$dx' = \varphi' dx - v \varphi' dt$$

$$dt' = \psi_x dx + \psi_t dt ,$$

φ' étant la dérivée de φ par rapport à $u = x - vt$.

Donc

$$dx'^2 - c^2 dt'^2 = (\varphi'^2 - c^2 \psi_x^2) dx^2 - 2(\varphi'^2 v + c^2 \psi_x \psi_t) dx dt + (v^2 \varphi'^2 - c^2 \psi_t^2) dt^2 .$$

L'equation

$$(\varphi'^2 - c^2 \psi_x^2) dx^2 - (\varphi'^2 v + c^2 \psi_x \psi_t) dx dt + (v^2 \varphi'^2 - c^2 \psi_t^2) dt^2$$

a donc les deux racines

$$dx = c dt \quad : \quad dx = -c dt$$

et par conséquent,

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi'^2 v + c^2 \psi_x \psi_t = 0 \\ (\varphi'^2 - c^2 \psi_x^2) c^2 + v^2 \varphi'^2 - c^2 \psi_t^2 = 0 . \end{cases}$$

En éliminant ψ_x , on voit que ψ_t et, par suite, ψ_x sont fonctions de x, t par l'intermédiaire du seul argument

$$u = x - vt .$$

C'est-à-dire que

$$\psi_x = \omega(x - vt)$$

$$\psi_t = \omega_1(x - vt) .$$

Mais si l'on pose

$$\Psi(u, t) = \psi(u + vt, t)$$

on voit que

$$\Psi_u = \psi_x = \omega(u)$$

d'où

$$\psi = \Psi = \Pi(u) + f(t) .$$

Et comme ψ_t ne dépend pas de t , isolément, on doit poser

$$f(t) = at + b .$$

C'est-à-dire

$$x' = \varphi(x - vt)$$

$$t' = \psi(x, t) = \Pi(x - vt) + at + b$$

Mais

$$\psi_x = \Pi' \quad ; \quad \psi_t = -v\Pi' + a$$

sont reliées par les deux équations (1).

Donc Φ' et Π' sont des constantes et on peut remplacer les deux équations (1) par le système

$$\begin{cases} \Phi'^2 v + c^2 \psi_x \psi_t = 0 \\ \Phi'^2 - c^2 \psi_x^2 = \lambda = \text{const.} \\ v^2 \Phi'^2 - c^2 \psi_t^2 = -c^2 \lambda. \end{cases}$$

Il vient aussi

$$dx'^2 - c^2 dt'^2 = \lambda (dx^2 - c^2 dt^2).$$

Dans le passage de $o'x'$ à ox nous écrivons

$$dx^2 - c^2 dt^2 = \lambda' (dx'^2 - c^2 dt'^2).$$

Mais d'après l'hypothèse c) il faut $\lambda = \text{constante}$ $\lambda = \text{constante } \lambda'$.
Donc

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \lambda^2 = 1.$$

En négligeant la valeur $\lambda = -1$, puisque pour $v = 0$ nous devons avoir $dx'^2 = dx^2$, nous parvenons finalement au système

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi'^2 v + c^2 \psi_x \psi_t = 0 \\ \Phi'^2 - c^2 \psi_x^2 = 1 \\ v^2 \Phi'^2 - c^2 \psi_t^2 = -c^2, \end{cases}$$

qui nous permet de déterminer les trois constantes Φ' , ψ_x , ψ_t et, par suite, les deux fonctions $\Phi(x - vt)$ et $\psi(x, t)$, à moins, bien entendu, que nous ayons des constantes additives.

Or, la première nous donne

$$\psi_x = -\frac{\Phi'^2 v}{c^2 \psi_t}$$

et la seconde

$$\psi_x^2 = \frac{\Phi'^2 - 1}{c^2}.$$

Donc

$$\psi_t^2 = \frac{\Phi'^4 v^2}{c^2 (\Phi'^2 - 1)}.$$

En éliminant maintenant ψ_t^2 , entre cette équation et la troisième (du système (2)), on obtient

$$\varphi' = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

d'où

$$x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} + k.$$

En adoptant le signe + pour les mêmes raisons qui nous ont fait prendre $\lambda = 1$, nous avons

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} + k.$$

Voyons maintenant la fonction ψ .

Comme nous avons à présent

$$\psi_x^2 = \frac{\varphi'^2 - 1}{c^2} = \frac{\frac{v^2}{c^4}}{1 - \beta^2}$$

$$\psi_x = \pm \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\psi_t = \mp \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\psi = \mp \left(\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} x \right) + k_1.$$

La raison déjà indiquée plus haut nous porte à prendre le signe +.

Le système définitif est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} + k \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1-\beta^2}} + k_1. \end{array} \right.$$

c. q. f. d.

Meccanica. — *Sopra l'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria.* Nota di D. GRAFFI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

In una delle sue interessanti ricerche sul problema dei due corpi di massa variabile l'Armellini ⁽²⁾ pervenne ad una formula che esprime le eventuali variazioni dell'eccentricità ϵ , supposta minore di uno dell'orbita osculatrice ⁽³⁾. La formula in discorso è la seguente:

$$(1) \quad \frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{dB}{B} (1 - \epsilon^2) \frac{\cos u}{1 - \epsilon \cos u}$$

in cui u è l'anomalia eccentrica e B il prodotto della costante di gravitazione K per la somma delle masse dei due corpi ⁽⁴⁾.

In base alla (1) l'Armellini studiò le variazioni di ϵ al crescere della massa dei due corpi ossia al crescere di B . Egli dimostrò come un aumento di massa quando $\cos u$ è positivo dia luogo ad una diminuzione di ϵ ; e come un aumento di massa quando $\cos u$ è negativo provochi al contrario un aumento della ϵ stessa.

Di questo risultato si può fare subito qualche applicazione al nostro sistema planetario. Si consideri infatti un pianeta (od una cometa periodica) che intorno al suo perielio penetri in una zona in cui possa incontrare molti corpuscoli che ne aumentino la massa ⁽⁵⁾. Allora per quanto precede l'eccentricità dell'orbita del pianeta tenderà a diminuire mentre il contrario succederà se detta zona verrà incontrata dal pianeta al suo afelio. Anzi su questo ultimo risultato l'Armellini nella sua Nota citata fonda una possibile spiegazione della notevole eccentricità di Marte.

(1) Nella seduta del 17 marzo 1935.

(2) «Rendiconti Accademia dei Lincei», 2° sem., 1915, p. 300.

(3) S'intende orbita osculatrice dell'orbita descritta da uno dei due corpi rispetto all'altro.

(4) Adoperiamo i simboli delle nostre Note: *Limitazione dei valori degli invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili.* «Rendiconti Accademia di Torino», 1933 e *Sull'eccentricità dell'orbita nel problema dei due corpi di massa variabile.* Nota I e II. «Rendiconti Accademia dei Lincei», 1934. In dette Note abbiamo stabilito un metodo per verificare se le variazioni di ϵ restano trascurabili in un certo intervallo di tempo.

(5) Si noti che qui supponiamo che l'unica variazione di massa del pianeta sia dovuta a caduta di corpuscoli e che la massa del sole resti invariabile. Quest'ultima ipotesi verrà tolta in Note successive.

Ma, come ha mostrato pochi anni fa il Levi Civita⁽¹⁾, se la massa di un pianeta varia per caduta di corpuscoli su di esso, la legge fondamentale della dinamica, ossia la legge espressa dall'uguaglianza della forza al prodotto della massa per l'accelerazione, legge di cui è conseguenza la (1), non è più valida e va opportunamente modificata.

Ora noi ci proponiamo in questa Nota di riprendere lo studio dell'Armellini, ora citato, in base però alle considerazioni del Levi-Civita. Con questa nuova impostazione troveremo anzitutto che i risultati dell'Armellini restano ancora validi. Di più mostreremo (e la cosa ci sembra di qualche interesse) che nel nostro caso si possono avere sensibili variazioni di eccentricità per moderate variazioni di massa del pianeta al contrario di quanto si trova partendo dalle leggi della dinamica espresse nella forma sopra enunciata legge che come si disse conduce alla (1).

Prima di entrare in argomento crediamo opportuno osservare che noi ammetteremo nulla la somma delle quantità di moto riferite al sole dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul pianeta o sul sole⁽²⁾. Con questa ipotesi sostituiremo l'altra del Levi-Civita che ammette nulla la somma delle stesse quantità di moto riferite però al sistema assoluto della meccanica classica. Ci sembra la nostra ipotesi lecita in quanto ammetteremo che i corpuscoli appartengano al sistema solare. Essa poi offre il vantaggio di non far intervenire nelle equazioni del moto la velocità assoluta del sole, grandezza questa incognita e che complica anche dal lato matematico il nostro problema. Di più non è forse inutile trattare il problema dei due corpi in base alla suddetta ipotesi.

2. Siano dunque P e S rispettivamente i baricentri del pianeta e del sole. L'equazione del moto del pianeta sarà in base ai risultati del Levi-Civita⁽³⁾:

$$(2) \quad m \frac{dv_i}{dt} + \frac{dm}{dt} v_i - \frac{\sum \mu w}{dt} = - \frac{KMm(P-S)}{r^3}$$

dove m è la massa del pianeta v_i la sua velocità assoluta M la massa del sole, r la distanza sole-pianeta, $\sum \mu w$ la somma delle quantità di moto (riferite al sistema assoluto) dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul pianeta. L'equazione analoga per il sole⁽⁴⁾ sarà:

(1) «Rendiconti Accademia dei Lincei», 2° sem., 1928, p. 329; 1° sem., 1930, p. 626.

(2) S'intende la quantità di moto dei corpuscoli immediatamente prima della loro caduta sul pianeta.

(3) Vedi formula (2) della seconda Nota citata, dove in luogo di F si è messo la forza attrattiva del sole sul pianeta.

(4) Si noti che per maggior generalità abbiamo supposto che dei corpuscoli cadono anche sul sole. In seguito però ammetteremo come si disse M invariabile.

$$(3) \quad M \frac{dv_2}{dt} + \frac{dM}{dt} v_2 - \frac{\Sigma \mu' w'}{dt} = \frac{KMm}{r^3} (P - S)$$

dove $\Sigma \mu' w'$ è la somma delle quantità di moto dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul sole. Ora poichè supponiamo l'aumento di massa avvenga soltanto per caduta dei corpuscoli, avremo:

$$(4) \quad \Sigma \mu = dm \quad \Sigma \mu' = dM$$

essendo ovviamente $\Sigma \mu$ e $\Sigma \mu'$ la somma delle masse dei corpuscoli che nel tempo dt cadono rispettivamente sul pianeta e sul sole. Di più poichè supponiamo nulla la somma delle quantità di moto riferite al sole dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul nostro pianeta e sul sole, avremo:

$$(5) \quad \Sigma \mu w = \Sigma \mu v_2 \quad \Sigma \mu' w' = \Sigma \mu' v_2.$$

Con la seconda delle (4) e delle (5) si vede subito che i due ultimi termini a primo membro di (3) si elidono. Dividendo ora (2) per m (3) per M e sottraendo membro a membro, abbiamo, ricordando la (5):

$$(6) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\frac{dm}{dt}}{m} v_1 - \frac{\Sigma \mu v_2}{mdt} = - \frac{K(M+m)(P-S)}{r^3}$$

dove v vale $v_1 - v_2$.

Ricordando poi la prima della (4) con facili passaggi troviamo

$$(7) \quad \frac{d(mv)}{dt} = - \frac{K(M+m)m}{r^3} (P-S).$$

La v sarà la velocità del pianeta rispetto al sole, velocità che vale $\frac{d(P-S)}{dt}$.

Facendo allora nella (7) la sostituzione indicata dal Manarini⁽¹⁾

$$(8) \quad \tau = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

si trova:

$$(9) \quad \frac{d^2(P-S)}{d\tau^2} = - \frac{K(M+m)m^2}{r^3} (P-S)$$

equazione formalmente identica a quella del problema dei due corpi di massa variabile qualora si parta dalla legge solita della dinamica tranne che in luogo del tempo t si è posta la variabile τ e in luogo della somma delle

(1) «Rendiconti Accademia dei Lincei», 1^o sem., 1929.

masse dei due corpi vi è tale somma moltiplicata per m^2 . Allora per l'eccentricità dell'orbita varrà ancora la (1) purchè in luogo di t si ponga τ e in luogo di B si ponga Bm^2 . Si ha così l'equazione:

$$(10) \quad \frac{d\varepsilon}{d\tau} = - \frac{\frac{dm^2 B}{d\tau}}{m^2 B} (1 - \varepsilon^2) \frac{\cos u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

Ora prendendo per variabile indipendente la t è facile vedere che la (10) resta valida ponendo anche t in luogo di τ . Perciò quando ci riferiremo alla (10) supporremo sempre t in luogo di τ .

3. Dalla (10) si vede subito che se m (e quindi Bm^2) è crescente, risulta, se

$$\cos u > 0 \quad \frac{d\varepsilon}{dt} < 0 \quad \text{se} \quad \cos u < 0 \quad \frac{d\varepsilon}{dt} > 0.$$

Da ciò si traggono subito i risultati dell'Armellini già enunciati.

Vediamo ora con un esempio come dalla (10) sia possibile mostrare quanto si è enunciato, e cioè che moderate variazioni di massa del pianeta possono dar luogo a sensibili variazioni di ε . L'esempio è scelto in condizioni molto favorevoli ma ovviamente esso è sufficiente per il nostro asserto.

Supponiamo dunque che si abbia variazione di massa solo quando il nostro pianeta è molto prossimo al perielio⁽¹⁾. Allora la (10) sarà valida con buona approssimazione ponendo in luogo di $\cos u$ l'unità, perchè soltanto in questo intorno $\frac{dm^2 B}{dt}$ è diverso da zero. Avremo allora:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{\frac{d(m^2 B)}{dt}}{m^2 B} (1 + \varepsilon).$$

Separando le variabili ed integrando da t_0 a t_1 avremo, essendo ε_0 e ε_1 , m_0 , m_1 , B_0 , B_1 rispettivamente i valori di ε , m , B in t_0 , t_1

$$\log \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_0} = \log \frac{m_0^2 B_0}{m_1^2 B_1}.$$

Da cui ricordando che $B_0 = K(M + m_0)$, $B_1 = K(M + m_1)$ abbiamo:

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{m_0^2 B_0}{m_1^2 B_1} \right) \cong 1 - \frac{m_0^2 (M + m_0)}{m_1^2 (M + m_1)}.$$

(1) Ciò può accadere se in una regione molto vicina al sole e traversata dal pianeta solo al suo perielio, si trovano corpuscoli che cadono sul pianeta. La condizione del resto può presentarsi più facilmente per le comete che hanno notevole eccentricità.

Ora poichè nei pianeti e nelle comete m è piccolo rispetto a M se la massa del pianeta non subisce enormi variazioni sarà tale anche m_1 quindi il rapporto $\frac{M + m_0}{M + m_1}$ sarà sensibilmente uguale all'unità. Ne risulta così $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ ossia la variazione di ε è maggiore dell'incremento del quadrato della massa del pianeta diviso per il quadrato della sua massa finale. Perciò, come si disse, una moderata variazione di m può dar luogo a un sensibile cambiamento di ε . Così se per esempio la massa m è aumentata di $1/100$ del suo valore finale, la ε varierà al minimo di $2/100$ quantità facilmente apprezzabile.

Passiamo ora al caso in cui sia valida la (1) e cerchiamo un limite superiore per le variazioni ε in un intervallo $t_0 t_1$ in cui la nostra ε resti compresa fra 0 e 1⁽¹⁾. Dalla (10) si ha ricordando che $\frac{dB}{dt} \cong 0$

$$(12) \quad \left| \frac{d\varepsilon}{dt} \right| \leq \frac{dB}{B} (1 + \varepsilon).$$

Separando le variabili e integrando si ha, supponendo per fissare le idee $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ (allo stesso risultato finale si arriva anche per $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$)

$$(13) \quad \log \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_0} \leq \log \frac{B_1}{B_0}.$$

Da cui con facili passaggi:

$$(14) \quad |\varepsilon_1 - \varepsilon_0| \leq (1 + \varepsilon_0) \left(\frac{B_1}{B_0} - 1 \right) \leq 2 \frac{(m_1 - m_0)}{M + m_0}.$$

Ora si vede subito da questa formula che se $|\varepsilon_1 - \varepsilon_0|$ deve avere un valore sensibile è necessario che m_1 sia dell'ordine di M . Ora i pianeti e le comete hanno massa molto piccola rispetto a quella del sole quindi sarebbe necessario un enorme incremento della massa del pianeta. Un esempio

(1) Poichè ammettiamo $0 < \varepsilon_0 < 1$ è facile trovare un metodo per verificare se l'eccentricità rimane tale per tutta $t_0 t_1$. Basta perciò che il secondo membro di (14) resti inferiore al più piccolo fra i numeri $1 - \varepsilon_0, \varepsilon_0$. Per dimostrare questo asserto si osservi che se nell'intervallo $t_0 t_1$ la ε diventasse maggiore di 1 esisterebbe un valore t' per cui essa diventa uguale a 1. Allora come è ovvio varrebbe ancora la (14) dove al posto di ε si deve mettere 1 e al posto di B la $B(t')$ corrispondente a t' . Si avrebbe allora ricordando che B è crescente

$$(1 + \varepsilon_0) \left(\frac{B_1}{B_0} - 1 \right) > \left(\frac{B(t')}{B_0} - 1 \right) (1 + \varepsilon_0) > 1 - \varepsilon_0$$

contrariamente alla nostra ipotesi. In modo analogo si proverebbe che se il secondo membro di (14) è minore di ε_0 la ε non può diventare negativa in $(t_0 t_1)$. Noi supporremo sempre soddisfatte le condizioni sopra accennate per il secondo membro di (14).

numerico chiarirà meglio la cosa. Sia m_0 la massa attuale della terra che vale circa $\frac{1}{300.000}$ della massa del sole.

Si vede subito dalla (14) che per aversi $|\varepsilon_t - \varepsilon_0| = \frac{2}{1.000}$ è necessario che m_t sia maggiore di $300 m_0$ cioè per aversi una variazione di $\frac{2}{1.000}$ nell'eccentricità dell'orbita della terra occorrerebbe almeno che la sua massa diventasse trecento volte maggiore.

Resta così provato che solo con l'impostazione del Levi-Civita si può pensare a variazioni dell'eccentricità di un'orbita planetaria per probabili aumenti di massa del pianeta.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la "Nouvelle Conception de la Lumière" du prof. Louis de Broglie.* Nota II di R. L. GOMES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

3. Quelques intégrales de

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \Phi = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur B soit une intégrale de (8) est qu'il vérifie l'équation

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (HB - BH) = 0.$$

ou simplement.

$$(17) \quad HB - BH = 0,$$

dans le cas particulier où B ne contient pas le temps.

Les opérateurs

$$H, H_1, H_2$$

sont donc trois intégrales de (8).

Les opérateurs

$$p_x, p_y, p_z$$

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1935.

ce sont aussi, vu que H ne contient pas les variables x, y, z mais on ne peut pas dire le même des opérateurs-moments

$$M_x = (y p_z - z p_y) = \frac{h}{2\pi i} \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(1)}$$

$$M_y = (z p_x - x p_z) = \frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$M_z = (x p_y - y p_x) = \frac{h}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En effet, nous avons, par exemple,

$$\begin{aligned} H M_z - M_z H &= \frac{c h^2}{4 \pi^2} \left[\left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{c h^2}{4 \pi^2} \left(A_2 \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Il suffit, pourtant, d'ajouter à M_z une matrice convenablement déterminée S_z pour que

$$M_z + S_z$$

déjà commutable avec H .

La matrice S_z doit être déterminée de manière que

$$H S_z - S_z H = - \frac{c h^2}{4 \pi^2} \left(A_2 \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Pour y aboutir on doit lui imposer les quatre conditions:

1) coefficient de $\frac{\partial}{\partial x}$ en $H S_z - S_z H$ égale à $-\frac{c h^2}{4 \pi^2} A_2$, c'est à dire:

$$- \frac{c h}{2 \pi i} (A_1 S_z - S_z A_1) = - \frac{c h^2}{4 \pi^2} A_2;$$

2) coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ en $H S_z - S_z H$ égale à $\frac{c h^2}{4 \pi^2} A_1$, c'est à dire

$$- \frac{c h}{2 \pi i} (A_2 S_z - S_z A_2) = \frac{c h^2}{4 \pi^2} A_1;$$

(1) Voir, par ex., M. LOUIS DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, p. 203.

3) et 4) le coefficient de $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ et le terme indépendant en $HS_3 - S_3H$ ensembles égaux à zéro, c'est à dire

$$A_3 S_3 - S_3 A_3 = 0$$

$$A_4 S_3 - S_3 A_4 = 0.$$

En résumé, il faut que

$$A_1 S_3 - S_3 A_1 = -\frac{h}{2\pi i} A_2$$

$$A_2 S_3 - S_3 A_2 = \frac{h}{2\pi i} A_1$$

et les deux relations de commutation avec A_3 et A_4 .

Or,

$$(\alpha_1 \times I + I \times \alpha_1)(I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I) = \alpha_1 \times \alpha_1 \alpha_2 + I \times \alpha_2 \\ - \alpha_2 \times I + \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_1$$

$$(I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I)(\alpha_1 \times I + I \times \alpha_1) = \alpha_1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \times I \\ - I \times \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_1$$

d'où

$$(\alpha_1 \times I + I \times \alpha_1)(I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I) \\ - (I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I)(\alpha_1 \times I + I \times \alpha_1) = 2(I \times \alpha_2 - \alpha_2 \times I).$$

Mais

$$\alpha_1 \times I + I \times \alpha_1 = 2 A_1$$

$$I \times \alpha_2 - \alpha_2 \times I = -2 A$$

donc

$$A_1 \frac{I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I}{2} - \frac{I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I}{2} A_1 \\ = -A_2.$$

En posant

$$S_3 = h \frac{I \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times I}{4\pi i}$$

il vient

$$A_1 S_3 - S_3 A_1 = -\frac{h}{2\pi i} A_2.$$

Vérifions maintenant les autres conditions 2), 3), 4):

$$\begin{aligned} A_2 S_3 - S_3 A_2 &= \frac{h}{8\pi i} [(\alpha_2 \times 1 - 1 \times \alpha_2)(1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times 1) - \\ &\quad - (1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times 1)(\alpha_2 \times 1 - 1 \times \alpha_2)] \\ &= \frac{h}{8\pi i} [\alpha_2 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \times 1 + 1 \times \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_2 \\ &\quad - \alpha_2 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \times 1 + 1 \times \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_2] \\ &= \frac{h}{4\pi i} (\alpha_1 \times 1 + 1 \times \alpha_1) \\ &= \frac{h}{2\pi i} A_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 S_3 - S_3 A_3 &= \frac{h}{8\pi i} [(\alpha_3 \times 1 + 1 \times \alpha_3)(1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times 1) - \\ &\quad - (1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times 1)(\alpha_3 \times 1 + 1 \times \alpha_3)] \\ &= \frac{h}{8\pi i} [\alpha_3 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \times 1 + 1 \times \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_3 \\ &\quad - \alpha_3 \times \alpha_1 \alpha_2 - 1 \times \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3 \times 1 - \alpha_2 \alpha_1 \times \alpha_3] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et de même

$$A_4 S_3 - S_3 A_4 = 0.$$

L'opérateur

$$\begin{aligned} N_{\bar{z}} &= M_{\bar{z}} + S_3 = x p_y - y p_x \\ &\quad + \frac{h}{4\pi i} (1 \times \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \times 1) \end{aligned}$$

commute donc avec H

$$H N_{\bar{z}} - N_{\bar{z}} H = 0.$$

Et il en est de même avec les opérateurs

$$\begin{aligned} N_y &= M_y + S_2 = (z p_x - x p_z) \\ &\quad + \frac{h}{4\pi i} (1 \times \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3 \times 1) \\ N_x &= M_x + S_1 = (y p_z - z p_y) \\ &\quad + \frac{h}{4\pi i} (1 \times \alpha_3 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 \times 1). \end{aligned}$$

Ils sont tous les trois des intégrales ⁽¹⁾ de (8).

Voyont maintenant pour terminer leurs valeurs fondamentales.

Si nous les élevons deux fois au carré il vient

$$S_3^2 = \frac{h^2}{8\pi^2} (1 + \alpha_1 \alpha_2 \times \alpha_1 \alpha_2)$$

$$S_3^4 = \frac{4^4}{32\pi^4} (1 + \alpha_1 \alpha_2 \times \alpha_1 \alpha_2)$$

et de même avec S_1 et S_2 .

Nous avons donc

$$S_i^4 = \frac{h^2}{4\pi^2} S_i^2.$$

Les valeurs propres de S_i^2 vérifient donc l'équation

$$d^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} d$$

d'où

$$d \left(d - \frac{h^2}{4\pi^2} \right) = 0$$

$$d = 0 \quad \text{ou} \quad d = \frac{h^2}{4\pi^2}.$$

Les valeurs propres de S_i ce sont donc :

$$0, \quad + \frac{h}{2\pi}, \quad - \frac{h}{2\pi}.$$

Mais

$$\text{trace de } S_i = 0$$

$$\text{trace de } S_i^2 = \frac{h^2}{8\pi^2} \text{ trace de } 1 = 2h^2,$$

par conséquent :

$$S_i^2 \text{ a } 8 \text{ constantes égales à } \frac{h^2}{4\pi^2}$$

$$S_i \text{ a } 4 \text{ constantes nulles, } 4 \text{ égales à } + \frac{h}{2\pi} \text{ et } 4 \text{ égales à } - \frac{h}{2\pi}.$$

(1) Par communication de M. le prof. L. DE BROGLIE j'ai pris connaissance d'une Note qu'il a présentée à l'Académie des Sciences de Paris en collaboration avec M. J. WINTER - séance du lundi 29 octobre 1934: *Sur le spin du photon* - où ces intégrales sont déjà étudiées, mais moyennent une analyse différente.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella Fisica-Matematica.* Nota di L. SOBRERO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

§ I. — DELLA DEFINIZIONE DI « FUNZIONI POTENZIALI ». — Un Fisico debba determinare il campo elettrico prodotto, nello spazio ambiente, da un sistema di cariche elettriche in equilibrio sopra assegnati corpi conduttori. Supposto, per semplicità, che si tratti di un problema piano il nostro Fisico può tradurre in termini analitici il suo problema riferendo il piano-ambiente ad una coppia di assi cartesiani, e introducendo come funzioni incognite le componenti $u(x, y)$ e $v(x, y)$ del campo elettrico nel generico punto di coordinate x ed y . Siffatte componenti soddisfano, com'è ben noto, al sistema di equazioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Ognuno sa che la prima delle equazioni (1), ossia la

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

autorizza a riguardare u e v come derivate parziali di una terza funzione $\varphi(x, y)$ alla quale si dà classicamente il nome di « funzione potenziale »; in simboli:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Sostituendo queste espressioni di u e v nella seconda delle equazioni (1) si constata che la $\varphi(x, y)$ deve soddisfare all'equazione:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

L'equazione (4) e le posizioni (3) complessivamente equivalgono al sistema di equazioni (1). *Equivalgono* dal punto di vista analitico; chè, dal

(1) Nella seduta del 17 marzo 1935.

§ 2. — ESISTENZA DELLA FUNZIONE POTENZIALE IN UN PROBLEMA CON 2 VARIABILI INDIPENDENTI E 2 FUNZIONI INCOGNITE. — x ed y siano le variabili indipendenti; u e v le funzioni incognite. A tradurre il problema fisico avremo due equazioni differenziali che supponiamo lineari, a coefficienti costanti e prive di termini noti. Separando, in ciascuna delle due equazioni i termini contenenti u da quelli contenenti v (termini contenenti ambedue le incognite non possono esistere per l'ammessa linearità delle equazioni) potremo ridurre il sistema delle due equazioni differenziali alla forma seguente

$$(1') \quad \begin{cases} Au + Bv = 0 \\ A'u + B'v = 0, \end{cases}$$

dove A, B, A' e B' sono operatori (a coefficienti costanti) del tipo già indicato

$$A = \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial y^s}, \dots$$

Operiamo sulle equazioni (1') come abbiamo operato in precedenza sulle equazioni (1) dell'elettrostatica. Scritta la prima delle (1') nella forma

$$(2') \quad Au = (-B)v$$

(analoga alla (2)) osserviamo che le funzioni u e v ottenute da una terza arbitraria funzione $\varphi(x, y)$ mediante le posizioni

$$(3') \quad \begin{cases} u = (-B)\varphi \\ v = A\varphi \end{cases}$$

(analoghe alle (3)) soddisfano sempre (e cioè qualunque sia φ) alla prima delle equazioni del sistema (1'). Sostituendo le espressioni di u e v fornite dalle (3') nella seconda equazione del sistema (1') si ottiene per φ l'equazione differenziale

$$(4') \quad (AB' - A'B)\varphi = 0$$

dove, si noti, l'operatore che funge da coefficiente di φ , è il determinante formato con gli operatori coefficienti del sistema (1').

Siamo così pervenuti a stabilire che le due funzioni u e v ottenute con le posizioni (3') da una funzione φ soddisfacente alla (4') verificano il sistema (1') proposto. Ma, ci si potrà domandare, è possibile ottenere con questo procedimento *tutte* le soluzioni del sistema (1')? O, in altri termini, assegnate due funzioni u e v soddisfacenti alla condizione (2') è sempre possibile determinare una funzione $\varphi(x, y)$ che verifichi le due equazioni

simultanee (3')? Risponde a questa domanda un teorema da noi stabilito in una Nota precedente⁽¹⁾: assegnate due equazioni differenziali simultanee del tipo (3'), in cui gli operatori A e B sian primi fra loro (e cioè non possano ciascuno scomporsi nel prodotto di due fattori, uno dei quali comune), per la compatibilità di tali equazioni (e cioè perchè sia possibile determinare almeno una funzione φ che le soddisfi ambedue) è necessario e sufficiente che sia nullo il determinante formato cogli operatori coefficienti e coi termini noti del sistema. Nel caso in esame siffatto determinante vale $Au + Bv$, ed è nullo per la prima delle (1'). Concludiamo pertanto: *nell'ipotesi che gli operatori A e B sian primi fra loro ogni coppia di funzioni u e v soddisfacenti al sistema (1') si può ottenere, con le posizioni (3'), da una conveniente funzione φ soddisfacente all'equazione differenziale (4').* A tale funzione φ spetterà legittimamente l'attributo di « potenziale » (nel senso da noi accettato per tale locuzione).

Il poco spazio a nostra disposizione non ci consente di entrare in altri dettagli, nè di accennare all'estensione della precedente teoria a sistemi di equazioni con più di due variabili indipendenti e più di due funzioni incognite. Ci limiteremo pertanto a indicare due esempi (sotto alcuni riguardi notevoli) di funzioni potenziali.

§ 3. — LA « FUNZIONE DI MARGUERRE » COME « FUNZIONE POTENZIALE ».
— Il primo di questi esempi ci è fornito dalle equazioni dell'elastostatica piana. Indicati con λ e μ le solite costanti elastiche del materiale di cui è formato il sistema piano⁽²⁾, e supposte assenti forze (superficiali) di massa, queste equazioni hanno, com'è ben noto⁽³⁾, l'aspetto sottoindicato:

$$(1'') \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) v = 0 \\ \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = 0. \end{cases}$$

Il sistema (1'') coincide col sistema (1') pur di porre, in quest'ultimo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & B &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ A' &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & B' &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Poichè gli operatori A e B risultano palesemente primi fra loro, le considerazioni del precedente paragrafo ci autorizzano a concludere: Il pro-

(1) L. SOBRERO, *Un teorema relativo ai sistemi differenziali*. Questi « Rendiconti », fascicolo precedente.

(2) Cfr. LOVE-TIMPE, « *Lehrbuch der Elastizität* », 1907, p. 121.

(3) Cfr. LOVE-TIMPE, vol. cit., p. 157.

blema in esame ammette una funzione potenziale φ , dalla quale le funzioni incognite primitive u e v si deducono con le posizioni

$$\begin{cases} u = \left(-\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \varphi \\ v = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi. \end{cases}$$

L'equazione (4') cui soddisfa la φ diventa, nel caso attuale,

$$(4'') \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0.$$

La funzione φ ora definita dovrebbe rendere buoni servigi in quei problemi di elastostatica dove intervengano, come dati al contorno, le componenti degli spostamenti ⁽¹⁾. Essa è stata introdotta, assai di recente, per opera del sig. K. Marguerre di Karlsruhe; la esistenza della funzione è stata, anche più di recente, discussa e confermata dal sig. C. B. Biezeno di Delft ⁽²⁾.

§ 4. — LA « FUNZIONE POTENZIALE » ELASTODINAMICA. — Un secondo esempio notevole di funzioni potenziali ci vien fornito dalle equazioni dell'elastodinamica piana. Indicata con t la variabile tempo, e con ρ la massa (del sistema piano) per unità di superficie, è ben noto che tali equazioni hanno l'aspetto seguente:

$$(I''') \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) v = 0, \\ \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = 0. \end{cases}$$

(1) È ben noto che per siffatti problemi non si presenta conveniente l'introduzione della funzione di Airy, dalla quale gli spostamenti si deducono con formule abbastanza complicate e contenenti segni di quadratura. Per la risoluzione della (4'') ci permettiamo di ricordare i nostri lavori sulle funzioni ipercomplesse.

(2) La Memoria del MARGUERRE è pubblicata sulla Rivista « Ingenieur-Archiv » (Berlin-Springer), IV Band, viertes Heft, agosto 1933 ed ha il titolo *Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestützten Platte*. La Nota del BIEZENO è pubblicata sulla medesima Rivista, V. Band, zweites Heft, aprile 1934 ed ha il titolo *Ueber die Marguerresche Spannungsfunktion*. Relativamente alla funzione di Marguerre vogliamo osservare che essa non ha, purtroppo, in comune colla funzione di Airy la proprietà di invarianza rispetto a trasformazioni ortogonali di assi coordinati. Questa proprietà di invarianza della funzione di Airy discende dal significato fisico di tale funzione (cfr. in proposito: L. SOBRERO, *Del significato meccanico della funzione di Airy*. Questi « Rendiconti », fasc. 4, « Ricerche di Ingegneria », 1935), nè ci consta che una interpretazione analoga sia stata data per la funzione di Marguerre.

Queste equazioni coincidono con quelle del sistema (1') purchè si ponga in quest'ultimo

$$A = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad B = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$A' = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad B' = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Osserviamo che gli operatori A e B son primi fra loro. Se, pertanto, estendiamo ai problemi in tre variabili le considerazioni svolte al § 2, possiamo concludere: anche nel problema elastodinamico esiste una funzione potenziale φ , da cui le componenti u e v dello spostamento son deducibili mediante le posizioni

$$(3''') \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \left(-\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \varphi \\ v = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi. \end{array} \right.$$

Si vede facilmente che, nel caso in esame, l'equazione (4') cui soddisfa la funzione potenziale, diventa (a meno di un inessenziale fattore numerico)

$$(4''') \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0.$$

Questa equazione ci fornisce, quasi senza calcoli, un risultato notevole: Si sa da un teorema del Boggio⁽¹⁾ che una funzione φ soddisfacente a un'equazione come la (4''') può sempre considerarsi come somma di due altre funzioni $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ rispettivamente soddisfacenti alle equazioni

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_1 = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_2 = 0.$$

(1) T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali*. « Annali di Matematica », ser. III, to. VIII, Milano 1903, pp. 181-232. Il teorema dice: Se un'equazione alle derivate parziali, lineare, a coefficienti costanti, priva di termine noto, è del tipo $AB\varphi = 0$ (e cioè il suo primo membro si spezza nel prodotto di due operatori) ed è A primo con B, ogni integrale φ è somma di un integrale α dell'equazione $A\alpha = 0$ e di un integrale β dell'equazione $B\beta = 0$. Il teorema, veramente, è dimostrato nell'ipotesi che le variabili indipendenti siano due, ma certamente sussiste anche se queste sono in numero maggiore. In quest'ultimo caso le funzioni α e β (nella somma delle quali si scompone una data funzione φ) sono anzi assai più largamente indeterminate che nel caso di due variabili.

Segue dalle (3''') che lo spostamento elastico (u, v) può (in ogni istante di tempo e in ogni punto del piano) considerarsi come somma di due spostamenti parziali (u_1, v_1) e (u_2, v_2) , l'uno proveniente dalla funzione φ_1 , l'altro dalla funzione φ_2 . Si può senza difficoltà constatare che il primo spostamento parziale definisce, sul piano elastico, un'onda di dilatazione pura, l'altro un'onda di pura distorsione. Rimane così stabilito che ogni onda sismica (piana) può sempre ritenersi composta di due onde: l'una di dilatazione, l'altra di distorsione pura. È questo un punto controverso che ha richiamato più volte (e anche di recente⁽¹⁾) l'attenzione dei Fisico-Matematici.

I due esempi di funzioni potenziali che abbiamo indicati, dimostrano, crediamo, l'efficacia del metodo. Per i dettagli del quale rimandiamo il lettore ad una nostra Memoria di prossima pubblicazione presso la Reale Accademia d'Italia.

Chimica. — *Azione dell'acido arsenico e arseniati sull'acqua ossigenata*⁽²⁾. Nota di G. R. LEVI e D. GHIRON, presentata⁽³⁾ dal Socio G. BRUNI.

La letteratura sull'acido perarsenico ed i suoi sali si riduce a pochissimi lavori e ad alcuni brevetti. E. P. Alvarez⁽⁴⁾ avrebbe preparato un perarseniato di sodio, trattando l'arseniato bisodico in soluzione idroalcolica con Na_2O_2 e precipitando con alcool in eccesso.

Secondo due brevetti di S. Aschkenasi⁽⁵⁾ si preparerebbero perarseniati alcalini ed alcalino terrosi, trattando l'acido con perossido di bario in modo da avere il sale monometallico ed evaporando la soluzione, oppure precipitando il bario con solfato alcalino o idrato alcalino ed evaporando il filtrato. Il solo recente lavoro è quello di R. R. Coons⁽⁶⁾; copia di esso ci è stata gentilmente trasmessa dall'« Iowa State College ». Questo autore ha tentato la preparazione di perarseniati coi seguenti metodi:

1° Facendo agire acqua ossigenata al 5 % e al 30 % sull'arseniato bisodico alla temperatura ambiente e a 0°. Con H_2O_2 al 5 % non si ha

(1) Cfr. R. EINAUDI, *Sulle vibrazioni longitudinali di una piastra piana*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 69, to. I, disp. III, 1934. Mi consta che anche V. VOLTERRA ha trattato di questo argomento in una conferenza tenuta a Parigi nell'anno 1934.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(3) Nella seduta del 17 marzo 1935.

(4) « Chem. Zentralblatt », 1907, I, 86.

(5) D. R. P. 296796-299300, « Chem. Zentralblatt », 1917, I, 610; II, 438.

(6) « Iowa State College Journ. Science », 6, 419 (1932); « Chem. Zentr. », 1932, II, 3538.

formazione di persale, mentre con quella al 30 % l'autore ha potuto isolare un composto contenente 8.45 % di ossigeno attivo, al quale ha attribuito la formula; $25 \text{Na}_2\text{HAsO}_4 \cdot 32 \text{H}_2\text{O}_2 \cdot 16 \text{H}_2\text{O}$. Egli stesso considera questo composto come una miscela.

2° Facendo agire il perossido di bario sull'arseniato bisodico e sull'acido arsenico non ebbe formazione di persali.

3° Elettrolizzando l'arseniato bisodico in assenza e in presenza di fluoruri non ebbe formazione di persali.

4° Il perossido di sodio precipitò da una soluzione alcoolica di Na_2HAsO_4 il composto: $2 \text{Na}_3\text{AsO}_4 \cdot 7 \text{Na}_2\text{O}_2 \cdot 2 \text{NaOH} \cdot 75 \text{H}_2\text{O}$ che è indubbiamente una miscela perchè differenti preparazioni diedero analisi diverse.

5° Facendo passare fluoro in una soluzione di Na_3AsO_4 ebbe tracce di perarseniati (una soluzione contenente gr. 0.0142 di ossigeno attivo per 100 cc. in assenza di ozono e perossido).

Evidentemente in nessuna delle preparazioni sopra descritte si è avuta effettiva formazione di persali.

Noi abbiamo tentato la preparazione di acido perarsenico nel modo seguito da J. Schmidlin e P. Massini ⁽¹⁾ per la preparazione degli acidi monoperfosforico e perfosforico; abbiamo osservato che, unendo a piccole porzioni As_2O_5 e H_2O_2 conc. (circa 50 %), raffreddando esternamente con ghiaccio e mantenendo poi la massa a 0°, dopo alcune ore non solo l' H_2O_2 non si era fissata con formazione di peracido, ma era quasi totalmente scomparsa.

Abbiamo pensato quindi ad un'azione decompositrice dell'acido arsenico su H_2O_2 e, non risultandoci che quest'azione sia mai stata rilevata, abbiamo fatto una serie di misure per l'acido libero e per i sali mono e bisodici, confrontandoli con l'azione dell'acido fosforico e dei suoi sali, già nota per le ricerche di molti autori ⁽²⁾ e con la decomposizione spontanea dell'acqua ossigenata pura.

Le misure furono fatte con H_2O_2 non stabilizzata (gentilmente fornitaci dalla S. A. Acqua ossigenata e derivati di Milano) diluita alla concentrazione voluta e filtrata, come pure tutte le soluzioni, attraverso filtri industriali. I recipienti furono, prima dell'uso, lavati a lungo con miscela cromica calda e poi abbondantemente con acqua distillata, e, durante le misure, furono tenuti al riparo della luce ed in termostato.

Tutte le prove riassunte in una stessa tabella furono fatte insieme nelle stesse condizioni: di tempo in tempo si prelevarono uguali quantità di soluzione, che vennero diluite ad egual volume, e una porzione di questo titolata con soluzione decinormale di permanganato.

(1) « Ber. », 43, 1162 (1910).

(2) V. per. es.: R. SCHENK, F. VORLÄNDER e W. DUX. « Zeit. f. angew. Chem. » (1914), 291.

Nelle tabelle sono riportati nella prima colonna i tempi in ore e nelle successive i cc. di $\text{KMnO}_4\text{N}/10$ impiegati.

1° *Acido arsenico:*

TABELLA I.

H_2O_2 1.5 % H_3AsO_4 e H_3PO_4 M/10			
Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{AsO}_4$	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{PO}_4$
0	46.40	46.25	46.40
0 34'	46.40	46.20	46.40
5 15'	46 10	46.20	46.40
29 40'	44	46.05	46.35
48 30'	42.70	46	46.35

TABELLA II.

H_2O_2 15 % H_3AsO_4 e H_3PO_4 M/2							
Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{AsO}_4$	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{PO}_4$	Temp. 60°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{AsO}_4$	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{PO}_4$
0	12.90	12.7	12.8	0	11.90	11.8	12.7
4 20'	12.8	12.6	12.75	6 45'	10.3	11	12.6
24 20'	12.5	12.3	12.7	23	7.2	9.1	12.4
28 50'	12.5	12.3	12.7				

TABELLA III.

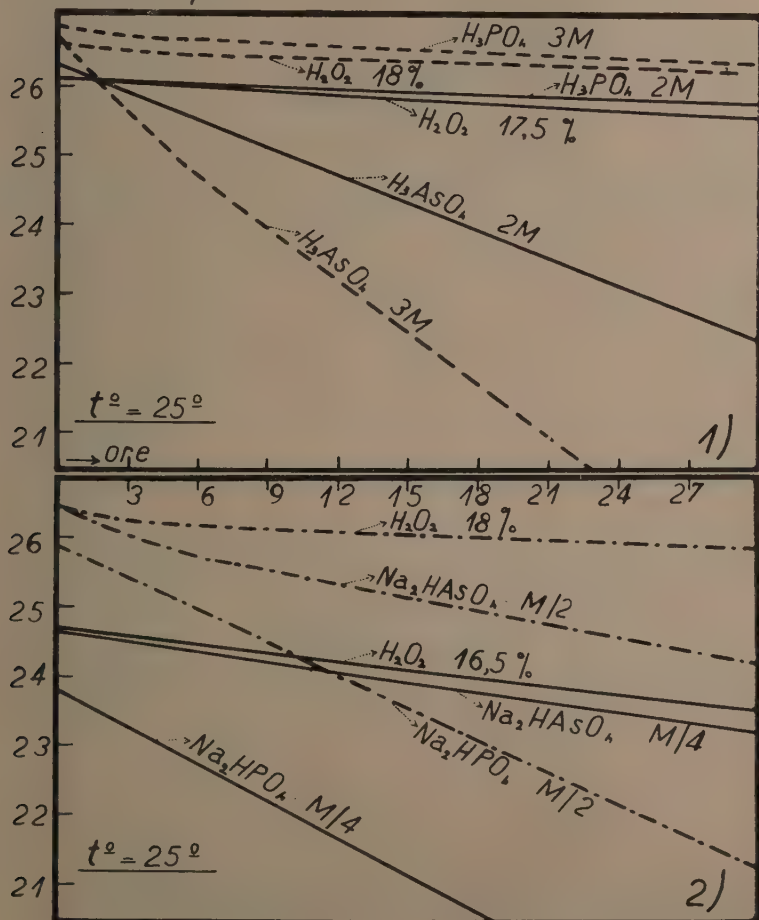
H_2O_2 17.5 % H_3AsO_4 e H_3PO_4 2M							
Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{AsO}_4$	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{PO}_4$	Temp. 60°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{AsO}_4$	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_3\text{PO}_4$
0	26.1	26.3	26.1	0	25.15	23.5	25.5
4	26.0	25.7	26	2 45'	24.3	19.2	25.2
23 45'	25.7	23.15	25.8	6 15'	22.8	14.8	24.6
27 45'	25.55	22.65	25.8	23	16.3	5.5	22.4

TABELLA IV.

H_2O_2 18 % H_3AsO_4 e H_3PO_4 3M

Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ H_3AsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ H_3PO_4	Temp. 60°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ H_3AsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ H_3PO_4
0	26.6	26.7	26.8	0	26.2	24.6	26.2
3 40'	26.5	25.55	26.7	3 35'	24.8	11.7	25.2
6 20'	26.45	24.6	26.65	6 10'	23.3	7.8	24.6
22 25'	26.3	20.65	26.35				
28 25'	26.2	19.25	26.35				

cc. KMnO_4 N/10



Dalle tabelle precedenti e dal grafico n. 1 che riassume i valori a 25° delle tabelle n. 3 e 4, si vede come in soluzione *molto* diluita (M/10) l'acido arsenico abbia un'azione stabilizzante, comparabile a quella dell'acido fosforico della stessa concentrazione. Passando a soluzioni più concentrate (M/2) non si nota a freddo nessuna azione stabilizzante rispetto ad H₂O₂ pura, mentre a caldo esso stabilizza ancora, per quanto assai meno dell'acido fosforico. Con soluzione 2 M e 3 M si ha una netta azione di decomposizione che, sia a freddo, che a caldo raggiunge per l'acido 3 M un valore circa doppio di quella dell'acido 2 M.

Risulta quindi una specifica azione decomponente del ione AsO₄⁻⁻⁻ e delle molecole H₃AsO₄ su H₂O₂, che si rende particolarmente evidente quando la concentrazione relativa degli ioni H⁺ scende a bassi valori.

2° *Arseniato monosodico*:

TABELLA V.

H₂O₂ 18% NaH₂AsO₄ e NaH₂PO₄ 2M

Temp. 25°	H ₂ O ₂ pura	H ₂ O ₂ + NaH ₂ AsO ₄	H ₂ O ₂ + NaH ₂ PO ₄	Temp. 60°	H ₂ O ₂ pura	H ₂ O ₂ + NaH ₂ AsO ₄	H ₂ O ₂ + NaH ₂ PO ₄
0	25	25	25.7	0	24.6	23.9	25.7
3 40'	24.9	24.2	25.7	3 35'	23.3	14.6	25.6
6 20'	24.85	23.7	25.7	6 10'	21.8	10.1	25.5
22 25'	24.7	20.9	25.7				
28 25'	24.6	19.9	25.7				

Sono riportati nella tabella V i valori di due sole serie di esperienze sufficienti a spiegare il comportamento del sale monosodico che è in tutto parallelo a quello dell'acido, però con una maggiore azione decomponente per la diminuita acidità. Appare invece evidente l'azione stabilizzante, già conosciuta, del fosfato monosodico che si può dire altrettanto forte che quella dell'acido libero. Abbiamo anche qui eseguito molte altre esperienze a diverse concentrazioni che non riportiamo per brevità e che non spostano le nostre conclusioni.

3° *Arseniato bisodico*:

TABELLA VI.

H_2O_2 3.5 % Na_2HAsO_4 e Na_2HPO_4 M/20

Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HAsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HPO_4	Temp. 60°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HAsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HPO_4
0	11	10.85	10.95	0	11	9.85	9.75
3 35'	10.9	10.5	10.4	0 40'	10.6	8.5	7.9
6 15'	10.9	10.3	10	3 40'	9.5	5.1	2.35
23 20'	10.75	9.75	8.1				
28 20'	10.7	9.5	7.6				
47	10.35	9	5.75				

TABELLA VII.

H_2O_2 16.5 % Na_2HAsO_4 e Na_2HPO_4 M/4

Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HAsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HPO_4	Temp. 60°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HAsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HPO_4
0	24.65	24.60	23.85	0	24.4	24.4	21.95
3 45'	24.55	24.50	23.3	3 42'	21.6	19.45	13.9
6 45'	24.50	24.50	22.6	6 40'	17.6	15	8.3
47 5'	22.95	22.55	15.1				

TABELLA VIII.

H_2O_2 18 % Na_2HAsO_4 e Na_2HPO_4 M/2

Temp. 25°	H_2O_2 pura	$\text{H}_2\text{O}_2 +$ Na_2HAsO_4	$\text{H}_2\text{O}_2 + \text{Na}_2\text{HPO}_4$
0	26.5	26.5	25.9
3 35'	26.3	26.0	25.5
6 5'	26.2	25.7	25.0
22 45'	26.0	24.7	22.35
28 30'	25.9	24.3	21.5

La stessa reazione a 60° procede molto velocemente e non è stata seguita.

Per i sali bisodici la situazione si inverte, tabelle VI a VIII (grafico n. 2), ma ciò è dovuto semplicemente alla maggior alcalinità del fosfato rispetto all'arseniato. Facciamo anche osservare che l'azione di decomposizione del ione AsO_4^{--} si deve ritenere non molto forte, ed è probabile che la principale azione di decomposizione sia dovuta a H_3AsO_4 , al ione H_2AsO_4^- e, in grado molto minore, al ione HAsO_4^- . È certo però che il fenomeno dell'alcalinità per idrolisi in questo gruppo di misure è di gran lunga prevalente, ed in accordo con ciò sta l'aumento della decomposizione osservato per le soluzioni più diluite di fosfato bisodico.

Abbiamo cercato di mettere in relazione queste ricerche colla eventuale esistenza di piroarseniato in soluzione. È noto che il pirofosfato sodico in soluzione ha, a differenza del fosfato bisodico, una grande azione stabilizzante su H_2O_2 . I risultati ottenuti sono però assai variabili e apparentemente contraddittori, e abbiamo concluso che, se il piroarseniato esiste in soluzione, le influenze di idrolisi prevalgono certamente su una eventuale azione stabilizzante del sale, e perciò non crediamo di poter trarre conclusioni da queste misure sulla sua esistenza.

Dal complesso di ricerche sopra riportate, concludiamo che i pretesi metodi di preparazione di perarseniati, fin qui descritti, devono considerarsi errati e che l'esistenza di composti di questo tipo appare poco probabile.

RIASSUMENDO.

Vienè studiata l'azione dell'acido arsenico e dei suoi sali mono e bisodici su H_2O_2 .

Si dimostra che l'acido libero e il sale monosodico hanno un'azione decompositrice che cresce con la concentrazione di questi, maggiore per il secondo venendo a mancare l'azione stabilizzante degli ioni H^+ , mentre i corrispondenti composti di fosforo hanno una forte azione stabilizzante già conosciuta.

Pel sale bisodico si trova pure un'azione di decomposizione, maggiore che pel monosodico, ma inferiore a quella del fosfato, cioè qui la situazione si inverte semplicemente a causa della maggiore alcalinità di questo.

Si conclude dimostrando che l'acido arsenico ed i suoi sali esercitano una specifica azione di decomposizione su H_2O_2 .

Chimica. — *Ricerche sull'acido xanturenico.*⁽¹⁾ Nota II di L. MU-
SAJO, presentata⁽²⁾ dal Corresp. G. BARGELLINI.

Precisata la natura dell'acido xanturenico la questione può essere messa in relazione con altri fatti già noti. Si sa infatti che Liebig⁽³⁾ nel 1853 dalle urine dei cani, che per lungo tempo avevano ricevuto una alimentazione ricca in carne, isolò un acido che chiamò chinurenico. Tale sostanza fu successivamente studiata dal punto di vista chimico da vari ricercatori come Schneider⁽⁴⁾, Schmiedeberg e Schultzen⁽⁵⁾, Kretschy⁽⁶⁾ ed altri; e, poichè distillata con polvere di zinco dà origine a chinolina⁽⁷⁾, e per perdita di anidride carbonica fornisce una ossichinolina riconosciuta come 4-ossi-chinolina o chinurina⁽⁸⁾, fu considerata come un acido 4-ossi-chinolincarbonico. Numerose sono anche le prime ricerche sulla formazione nell'organismo dell'acido chinurenico in seguito alla somministrazione di varie sostanze e proteine, e sul suo isolamento e determinazione nelle urine⁽⁹⁾. La sua costituzione sembrò chiarita con un lavoro di Camps del 1901⁽¹⁰⁾ che lo ritenne a causa del suo punto di fusione identico all'acido 4-ossichinolin-3-carbonico da lui preparato per sintesi partendo dall'etere etilico dell'acido o-amino-fenilpropilico. Alcuni anni dopo A. Ellinger⁽¹¹⁾ fece rilevare come somministrando triptofano ai cani ed ai conigli questo si trasforma in acido chinurenico, e cercò successivamente⁽¹²⁾ di dare una interpretazione di tale fatto tenendo presente i ben noti passaggi del nucleo del pirrolo in piridina e del nucleo dell'indolo in chinolina studiati da Ciamician ed allievi⁽¹³⁾. Nel 1914 però Annie Homer⁽¹⁴⁾ metteva in evidenza come all'acido chinu-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università « Benito Mussolini », Bari.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(3) « Ann. d. Chem. u. Pharm. », 86, 125 (1853); 108, 354 (1858).

(4) « Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wissenschaft », 59, 24.

(5) « Ann. d. Chem. u. Pharm. », 164, 155 (1872).

(6) « Monat. f. Chem. », 2, 57 (1881); 4, 156 (1883); 5, 16 (1884).

(7) « Ber. », 12, 1673 (1879).

(8) WENZEL, « Monat. f. Chem. », 15, 462 (1894).

(9) Per questa parte della estesa letteratura vedi: JOSEPHSON, *Beiträge zur Kenntnis der Kynurensäureausscheidung beim Hunde*. Inaug.-Dissertation, Königsberg, 1898.

(10) « Ber. », 34, 2703 (1901); « Zeit. f. physiol. Chem. », 33, 390 (1901).

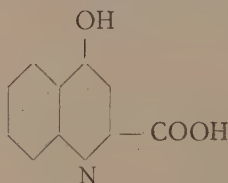
(11) « Ber. », 37, 1801 (1904).

(12) « Ber. », 39, 2517 (1906).

(13) Per la letteratura vedi CIAMICIAN, discorso. « Ber. », 37, 423: (1904).

(14) « Journ. of Biol. Chem. », 17, 509 (1914).

renico ripetutamente purificato corrisponda un punto di fusione più alto (289°) di quello precedentemente trovato (264°-266°). Tale punto di fusione più alto è lo stesso di quello dell'acido 4-ossichinolin-2-carbonico pure preparato per sintesi da Camps, ed in base a ciò la Homer attribui quest'ultima costituzione all'acido chinurenico. Le opinioni dei successivi ricercatori, peraltro non furono concordi in merito. Si deve la definitiva risoluzione del quesito ad Ernst Späth⁽¹⁾ il quale rilevando che il punto di fusione di acidi che fondono con svolgimento di anidride carbonica non può essere preso come criterio sicuro per la identificazione poichè viene influenzato dalla velocità di riscaldamento (da 255° a 289° per lo stesso prodotto, Späth, l. c.) e da quantità molto piccole di impurezze⁽²⁾, preparò dall'acido chinurenico naturale l'acido 4-cloro-chinolinicarbonico, e da questo con idrogeno in presenza di palladio un acido chinolinicarbonico, che attraverso l'etere metilico e l'amide venne sicuramente riconosciuto come acido chinolin-2-carbonico. A maggiore conferma Späth confrontò anche alcuni derivati dell'acido 4-ossichinolin-2-carbonico preparato per sintesi già da Camps (fra i quali l'etere metilico ed il derivato benzoilico dell'etere metilico) trovandoli perfettamente identici con quelli dell'acido chinurenico naturale, al quale deve dunque definitivamente attribuirsi la costituzione di acido 4-ossichinolin-2-carbonico:



Alcune proprietà dell'acido xanturenico e dell'acido chinurenico vengono riportate nella tabella che segue. È stato utilizzato acido chinurenico naturale estratto dalle urine di coniglio, come più avanti sarà detto, e sintetico della Ditta Hoffmann-La Roche.

*
* *

Le ricerche successive sull'acido chinurenico condotte specialmente dal punto di vista fisiologico sono molto numerose. Già Ellinger e Matsuoka⁽³⁾ somministrando ai conigli acido indol-piruvico ammisero che questo e l'acido o-amino-benzoilpiruvico fossero termini intermedi nella formazione dell'acido chinurenico dal triptofano. Matsuoka e Yoshimatsu⁽⁴⁾ in seguito

(1) « Monat. f. Chem. », 42, 93 (1921).

(2) « Zeit. f. physik. Chem. », 73, 54 (1910).

(3) « Zeit. f. physiol. Chem. », 109, 259 (1920).

(4) « Zeit. f. physiol. Chem. », 143, 206 (1925).

Acido chinurenico

1) Sostanza bianca, che cristallizza immediatamente dall'acido acetico al 40% in aggetti bianchi, sottili, setacei, splendenti.

2) Per perdita di anidride carbonica dà chinurina o 4-ossichinolina, p. f. 201°, che con cloruro ferrico dà colorazione rosso sangue.

3) Etere metilico, bianco cristallino, p. f. 224° (SPÄTH, l. c.).

4) Derivato benzoilico dell'etere metilico, p. f. 143° (SPÄTH, loc. cit.).

5) Per aggiunta di qualche goccia di bicarbonato sodico saturo, soluzione incolore, nella quale il solfato ferroso non produce nessuna colorazione. Con cloruro ferrico nessuna colorazione.

6) Con acido diazobenzolsolfonico alcalino nessuna colorazione; con il reattivo di Millon colorazione rosso arancio a caldo.

7) Con clorato potassico e acido cloridrico concentrato, evaporando cautamente ed umettando successivamente con ammoniaca colorazione verde. (Reazione di Jaffe).

8) Con anidride acetica dopo ebollizione per qualche minuto con refrigerante a ricadere si ottiene colorazione bleu-rossa; versando la soluzione ottenuta in benzolo si ottiene colorazione rosso viola con fluorescenza rossa (1).

Acido xanturenico

1) Sostanza giallo-zolfo, microcristallina, al microscopio appare costituita da tavolette rombiche ben formate, dall'acido acetico al 40% non cristallizza che in piccola quantità e dopo molto tempo.

2) Per perdita di anidride carbonica dà una diossichinolina, p. f. > 300°, che con cloruro ferrico dà colorazione verde azzurra che diventa viola con una goccia di bicarbonato sodico od ammoniaca.

3) Etere metilico, cristallini gialli splendenti, p. f. 262° (MUSAJO, Nota I)

4) Derivato benzoilico dell'etere metilico, p. f. 171° (MUSAJO, Nota I).

5) Per aggiunta di qualche goccia di bicarbonato sodico saturo, soluzione intensamente gialla, nella quale il solfato ferroso produce colorazione verde intensissima. Con cloruro ferrico (piccole quantità) colorazione verde.

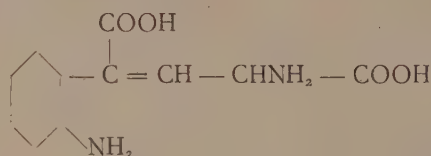
6) Con acido diazobenzolsolfonico alcalino colorazione rossa intensa, con il reattivo di Millon, colorazione rosea già a freddo che a caldo diviene rosso intensa.

7) Con clorato potassico e acido cloridrico nelle stesse condizioni ed umettando con ammoniaca, colorazione bruna, ma non si riesce a scorgere alcuna colorazione verde.

8) Con anidride acetica nelle stesse condizioni colorazione rosso viola, diluendo con benzolo si ha colorazione viola con fluorescenza rossa. Questa reazione avviene però più rapidamente ed intensamente con l'acido chinurenico.

(1) E. BESTHORN ritiene generale questa reazione per gli acidi chinolin- α -carbonici e la cita a conferma della presenza del carbossile in posizione 2 nell'acido chinurenico, «Ber.», 54, 1330 (1921).

a somministrazione di forti quantità di triptofano isolarono nelle urine dei conigli una nuova sostanza alla quale attribuirono la formula $C_{13}H_{14}O_5N_2$ sostanza che in seguito è stata molto studiata da Kotake e collaboratori. Kotake e Iwao⁽¹⁾ stabilirono che se il triptofano viene somministrato a conigli alimentati normalmente esso si trasforma completamente in acido chinurenico, ma se il coniglio viene nutrito per lungo tempo con riso brillato (forse per il fatto che i processi generali di ossidazione dell'organismo vengono affievoliti, Kotake e Iwao, l. c.) la somministrazione successiva di quantità notevoli di triptofano (3-4 gr.) produce la eliminazione della sostanza isolata da Matsuoka e Yoshimatsu, alla quale Kotake e Iwao (l. c.), con studio più approfondito attribuirono la formula $C_{11}H_{12}O_4N_2$, la costituzione:



ed il nome di chinurenina.

La chinurenina si presenta in fogliette bianche cristalline fondenti a 190° con scomposizione, è levogira, dà un solfato cristallizzato, ed una reazione cromatica: riscaldata per alcuni minuti all'ebollizione con un po' di soluzione di bicarbonato sodico e con piccola quantità di cloridrato di fenilidrazina, raffreddando e aggiungendo acido solforico concentrato si ottiene colorazione bleu⁽²⁾. La chinurenina trattata all'ebollizione con acqua di barite si scompone e dà ammoniaca, anidride carbonica, o-aminoacetofenone ed acido chinurenico⁽³⁾; bollita con soluzione di bicarbonato sodico al 2 % per 1-2 ore dà ammoniaca, o-aminoacetofenone, ed una sostanza giallo-arancio solubile in etere, probabilmente l'acido o-aminobenzoilpiruvico, la cui soluzione eterea per riposo lascia separare acido chinurenico⁽⁴⁾. La eliminazione della chinurenina con l'urina è sempre legata ad una diminuzione dell'acido chinurenico; la chinurenina può essere inoltre biologicamente trasformata in acido chinurenico per mezzo di microrganismi (*Oidium lactis*, *Willia anomala*)⁽⁵⁾. Kotake e Ōtani⁽⁶⁾ tenendo presente come Sasaki⁽⁷⁾ per azione del *B. subtilis* sul triptofano aveva ottenuto acido antranilico, studiarono nuovamente l'azione del *B. subtilis* sul triptofano e sulla chinurenina mettendo anche

(1) «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 139 (1931).

(2) Reazione di KOTAKE e SHICHIRI, «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 158 (1931).

(3) KOTAKE e KIYOKAWA, «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 147 (1931).

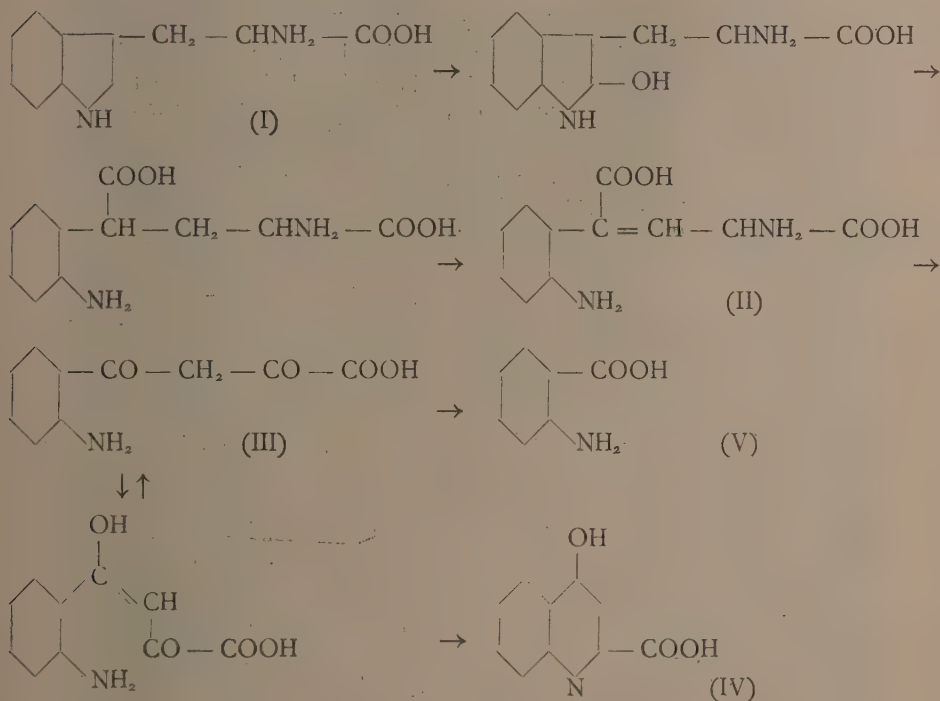
(4) KOTAKE e SHICHIRI, «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 152 (1931).

(5) SHICHIRI e KIYOKAWA, «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 166 (1931).

(6) «Zeit. f. physiol. Chem.», 214, 1 (1933).

(7) «Journ. of Biochem.», 2, 251 (1923).

in evidenza che dal triptofano si forma acido antranilico, acido chinurenico e piccole quantità di chinurenina e dalla chinurenina acido antranilico (V) ed acido chinurenico. Tutti questi fatti hanno portato Kotake ad interpretare il meccanismo della formazione nell'organismo dell'acido chinurenico (IV) dal triptofano (I) attraverso la chinurenina (II) e l'acido o-amino-benzoilpiruvico (III) secondo il seguente schema:



La formazione dell'acido chinurenico dal triptofano attraverso l'acido indolpiruvico dovrebbe essere considerata, secondo Kotake, come secondaria, perchè questo non è ancora stato isolato come prodotto del ricambio e perchè somministrato forma acido chinurenico in misura molto minore che non la chinurenina ⁽¹⁾. La chinurenina non è in grado di sostituire il triptofano nell'alimentazione nè agisce nell'anemia sperimentale ⁽²⁾; ad essa sarebbe, pure secondo Kotake ⁽³⁾, dovuta la formazione del β -acido ⁽⁴⁾.

(1) KOTAKE, «Zeit. f. physiol. Chem.», 195, 165 (1931).

(2) IWAKURA, OTANI e TANIGUCHI, «Zeit. f. physiol. Chem.», 214, 22 (1933).

(3) IDEM, 214, 6 (1933).

(4) L'acido 2-6 diossichinolin-4-carbonico, vedi Nota I.

*
* *

Nello scorso anno io ho reso noto che sperimentando nei conigli tenuti ad alimentazione di fibrina ho potuto constatare che dopo pochi giorni (4-5) da tale alimentazione le urine presentano positiva la mia reazione con il solfato ferroso⁽¹⁾. In base a ciò ed in base al fatto che il coniglio, come più sopra è stato citato, elimina spesso acido chinurenico e chinurenina, sono stato spinto ad istituire ricerche su vari animali allo scopo di chiarire se in seguito alla somministrazione di fibrina si ha eliminazione contemporanea di acido xanturenico, chinurenico e chinurenina o di quali di questi. Il risultato di queste ricerche mi ha portato a stabilire che nel ratto albino si ha eliminazione di acido xanturenico, di chinurenina e di poco acido chinurenico; nel coniglio di acido xanturenico, acido chinurenico e chinurenina; nel cane acido chinurenico e chinurenina, non si forma acido xanturenico.

A) *Esperienza nei conigli.* — Le urine ottenute alimentando i conigli con fibrina e raccolte dal momento in cui presentano positiva la reazione con solfato ferroso sono state lavorate nello stesso modo di quelle dei ratti (vedi Nota I).

Nel prodotto ottenuto, che dà positiva la reazione con il solfato ferroso per l'acido xanturenico, è stata tentata la separazione dei due acidi ossichinolinicarbonici che ha dato esito positivo.

Il prodotto greggio (gr. 2, 3) viene trattato con acido acetico al 40% (250 cc.) all'ebollizione; la parte indisciolta viene ancora trattata con lo stesso solvente (250 cc.); dalla prima soluzione cristallizza per raffreddamento un prodotto A, dalla seconda previa concentrazione si separa un prodotto B. I prodotti A e B vengono filtrati ottenendosi due filtrati F_1 e F_2 .

Acido chinurenico. — I due prodotti A e B vengono riuniti e portati all'ebollizione con 50 cc. di acido acetico al 40%. Si filtra, il filtrato si trascura, ed il residuo viene ripetutamente cristallizzato (6 volte) dall'acido acetico al 40%. Si ottiene così un prodotto bianco cristallino setaceo, che fonde a 279° che dà la reazione di Laffé, ma non dà nessuna colorazione con il solfato ferroso. Si tratta di acido chinurenico, trov. C 62,8-63,2; H 4,3-4,1; N 7,0; per $C_{10}H_7O_3N$; calc. C 63,5; H 3,7; N 7,4.

Acido xanturenico. — La presenza dell'acido xanturenico già messo in evidenza dalla reazione con solfato ferroso nel prodotto greggio, è stata confermata estraendolo dai filtrati F_1 e F_2 di cui sopra, che sono stati riuniti e concentrati a 100 cc., il prodotto che si separa per raffreddamento viene trascurato ed il filtrato nuovamente concentrato ad $\frac{1}{5}$ si ottiene così, dopo riposo, una piccola quantità di sostanza (gr. 0,2) che viene sciolta a caldo in 40 cc. di acido acetico al 40%. Si filtra e si lascia a sé per 12 ore; il prodotto giallo ottenuto viene sciolto in idrato sodico diluito e precipitato con acido cloridrico diluito. Tale operazione si ripete per tre volte consecutive ottenendosi così piccola quantità di sostanza che viene filtrata e lavata ripetutamente con acqua, poi con alcool e poi con etere. È gialla, microcristallina, fonde a 284° con scomposizione, si scioglie in bicarbonato sodico con colorazione gialla; aggiungendo solfato ferroso si ottiene colorazione verde intensissima. È acido xanturenico:

Trov. C 57,9, H 3,7 N 6,9; per $C_{10}H_7O_4N$; calc. C 58,5, H 3,4 N 6,8.

(1) MUSAJO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », IX, 8, 740 (1934).

Chinurenina. — Nei lavori di Kotake e collaboratori non è descritto un metodo dettagliato per il suo isolamento, è però indicato che essa precipita con solfato mercurico in ambiente acido per acido solforico e che può essere ottenuta scomponendo il precipitato così formatosi. Per isolarla dalle urine dei conigli alimentati con fibrina ho proceduto così: l'urina viene acidificata con acido solforico al 50% e lasciata a sè per due giorni, quindi filtrata e precipitata con soluzione di solfato mercurico; si ottiene un abbondante precipitato che dopo 48 ore si filtra. Il precipitato viene sospeso in acido solforico diluito $\frac{N}{1}$ e scomposto con idrogeno solforato. Si filtra, l'idrogeno solforato si elimina nel vuoto e la soluzione si precipita nuovamente con solfato mercurico. Dopo 48 ore si filtra e si scompone nuovamente con idrogeno solforato in presenza di acido solforico diluito; nel filtrato l'idrogeno solforato viene allontanato nel vuoto e l'eccesso di acido solforico con carbonato di bario. Il liquido filtrato viene concentrato nel vuoto a piccolo volume con il che si separa la maggior parte di sali minerali presenti che vengono allontanati; il filtrato viene quindi ripreso con un eccesso di acetone e lasciato a sè per una notte; si ottiene un precipitato che contiene la chinurenina sotto forma di solfato; tale precipitato viene disciolto in acqua e addizionato di barite satura fino a precipitazione completa. L'eccesso di barite viene eliminato con anidride carbonica e con qualche goccia di acido solforico diluito ed il liquido limpido filtrato viene concentrato nel vuoto in corrente di anidride carbonica fino a piccolissimo volume. Si separa così la chinurenina che viene purificata dall'alcool di 60°, ottenendosi così fogliette bianche splendenti che fondono a 191° (Kotake 190°) che danno nettamente la reazione cromatica di Kotake e Shichiri.

La chinurenina è stata anche dosata in queste urine con il metodo di Kotake e Kawase (1): la chinurenina viene precipitata nelle urine acide per acido solforico con solfato mercurico ed il precipitato viene fatto bollire con barite determinando l'ammoniaca che si svolge. Da ogni molecola di chinurenina si ottiene una molecola di ammoniaca. Nelle urine dei conigli alimentati con fibrina le determinazioni fatte hanno dato come valore medio del contenuto in chinurenina l'1.590‰.

B) *Esperienze nei ratti.* — La quantità di acido chinurenico contenuta nelle urine dei ratti albini alimentati con fibrina è piccola in confronto di quella dell'acido xanturenico. L'acido chinurenico è stato isolato lavorando quantità notevoli di acido xanturenico greggio (gr. 18) il quale, a scopo di purificazione, è stato trasformato nell'etere metilico. Sul filtrato (alcool metilico) dopo la separazione del prodotto che si forma per saturazione con acido cloridrico gassoso, si separa, dopo riposo di vari giorni, un po' di sostanza che viene disciolta in soda. La soluzione ottenuta viene diluita e quindi precipitata con acido cloridrico diluito. Si filtra e il filtrato si concentra, si separa così un prodotto che viene cristallizzato dall'alcool metilico e quindi fatto bollire con idrato potassico al 10%. La sostanza ottenuta precipitando con acido cloridrico diluito viene quindi ripetutamente cristallizzata dall'acido acetico al 40%. Così purificata si presenta in aghetti bianchi che fondono a 275°, non danno colorazione con solfato ferroso, danno la reazione di Jaffe. È acido chinurenico, trov. C 63,0, H 4,0; per $C_{10}H_7O_3N$; calc. C 63,5, H 3,7. La chinurenina è stata determinata con il metodo citato più sopra; media di varie determinazioni: 0,739‰.

Esperienze nel cane. — Il cane tenuto ad alimentazione di fibrina per circa tre mesi non ha mai presentata positiva nelle urine la reazione con il solfato ferroso per l'acido xanturenico. In queste urine sono contenuti invece acido chinurenico 0,892‰ (2) e chinurenina 1,093‰ (valori medi).

(1) «Zeit. f. physiol. Chem.», 214, 6 (1933).

(2) L'acido chinurenico è stato determinato con il metodo di CAPALDI, «Zeit. f. physiol. Chem.», 23, 92. — Nelle urine dei ratti e dei conigli non è stato possibile applicare questo metodo perchè il precipitato che si pesa è un miscuglio di acido chinurenico e acido xanturenico.

Chimica. — *Ricerche sull'acido xanturenico. Genesi dell'acido xanturenico* ⁽¹⁾. Nota III di L. MUSAJO e F. M. CHIANCONE, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Le evidenti relazioni chimiche esistenti fra acido chinurenico e acido xanturenico e la contemporanea presenza dei due acidi ossichinolin-carbonici e della chinurenina nelle urine dei ratti albinì e dei conigli a dieta di fibrina ⁽³⁾ messa in evidenza da uno di noi nella Nota II, ci ha indotti a ricercare se anche l'acido xanturenico ha una analoga origine, se cioè si forma anche esso nell'organismo animale dal triptofano e se questa eventuale formazione abbia come termine intermedio la chinurenina. Le esperienze sono state condotte su tre lotti di ratti albinì, di cui giorno per giorno si raccoglievano le urine e si praticava la reazione con il solfato ferroso (MUSAJO) ⁽⁴⁾. Tutti i ratti avevano quotidianamente un minimo di carboidrati, di grassi, di sali e libera disponibilità di acqua come nelle esperienze con fibrina; a questa dieta che fu comune per tutti gli animali in esperimento si aggiunse per il primo lotto triptofano, per il secondo chinurenina, per il terzo, che fu tenuto come controllo, gelatina (abbiamo scelto la gelatina quale proteina incompleta priva di triptofano). Il primo lotto era costituito da dieci ratti tenuti in precedenza ad alimentazione mista normale nelle cui urine la reazione con il solfato ferroso era stata sempre negativa. Ad ogni animale di questo lotto fu somministrato, insieme alla rimanente dieta, gr. 0,20-0,30 di triptofano *pro die*. La colorazione verde con il solfato ferroso comincia a presentarsi positiva già dal primo-secondo giorno dalla somministrazione del triptofano, dapprincipio non molto intensa, ma dalla terza giornata, fortemente positiva e tale rimane per tutta la durata dell'esperienza.

L'esperienza con chinurenina è stata condotta nello stesso modo che con il triptofano. La reazione con solfato ferroso per l'acido xanturenico dopo 24^h dall'ingestione della sostanza è stata nettamente positiva e tale si è mantenuta durante tutta l'esperienza ⁽⁵⁾. Nel terzo lotto di ratti ai quali

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica e di Fisiologia della R. Università « Benito Mussolini », Bari.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1935.

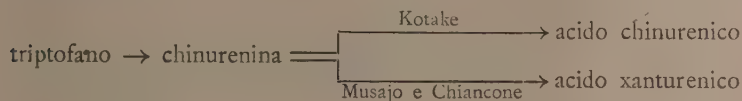
(3) Per il contenuto in triptofano della fibrina vedi HOLM e GREENBANK, « J. Am. Chem. Soc. », 45, 1788 (1923); « Chem. Zentr. », 1924, I, 1422.

(4) Questa reazione non si ha mai tenendo gli animali a digiuno.

(5) Scomponendo la chinurenina (gr. 0,1) con barite all'ebollizione non si forma acido xanturenico. È probabile che ciò avvenga in più opportune condizioni di esperienza.

si somministrava quotidianamente gelatina a volontà non si è mai avuta positiva la reazione con il solfato ferroso. Se si aggiunge invece triptofano alla dieta di gelatina, la reazione col solfato ferroso compare subito fortemente positiva.

Crediamo di aver chiarito che l'acido xanturenico si forma nei ratti dal triptofano e con ogni probabilità attraverso la chinurenina per cui lo schema di KOTAKE (vedi Nota II) sulla formazione dell'acido chinurenico può essere così completato:



La possibilità che l'acido xanturenico sia un acido ossichinurenico⁽¹⁾ e che si formi nell'organismo per introduzione di un idrossile nell'acido chinurenico⁽²⁾ è stata da noi presa in considerazione ed ad un altro lotto di ratti, tenuti nelle condizioni descritte nell'esperienze precedenti, è stato somministrato gr. 0,2-0,3 di acido chinurenico *pro die* per lungo tempo. Non ci è stato mai possibile mettere in evidenza neanche quantità piccolissime di acido xanturenico nelle urine degli animali a cui fu somministrato acido chinurenico, il quale non pare perciò che possa essere considerato come termine intermedio nella formazione dell'acido xanturenico⁽³⁾ *in vivo*.

L'acido chinurenico utilizzato in queste esperienze è stato in parte quello sintetico della Ditta Hoffmann La Roche, in parte naturale, estratto da noi dalle urine del cane ad alimentazione di fibrina (vedi Nota II). La chinurenina è stata estratta in un primo tempo dalle urine dei conigli a fibrina (vedi Nota II), ma poichè la sua estrazione da questo materiale era assai difficoltosa e di poco rendimento data la quantità forte di impurezze che si

(1) I tentativi di ossidazione dell'acido chinurenico con acqua ossigenata, con persolfato potassico, e anche con tirosinasi (la quale trasforma, ad esempio, la tirosina in 3-4 diossifenilalanina, RAPER, « Biochemical Journ. », 20, 735 (1926)) non hanno però dato esito favorevole. La possibilità che in migliorate condizioni di esperienza si possano ottenere risultati positivi, non è esclusa (L. MUSAJO).

(2) Trasformazioni di questo tipo possono biologicamente compiersi e sono ben note. BALDONI ad esempio somministrando salicilato sodico ai cani notò eliminazione di acido gentisinico (2-5 diossibenzoico), « Archiv. Sper. Scien. Aff. », 17, 1914; « Chem. Zentr. », 1914, I, 2066; confermata poi da ANGELICO, « Archiv. Farm. Sper. Scien. Aff. », 31, 8 (1921); « Chem. Zentr. », 1922, III, 526.

(3) Anche l'acido 2-chinolinicarbonico non viene trasformato nei conigli in acido chinurenico, ELLINGER e MATSUOKA. « Zeit. f. physiol. Chem. », 109, 259 (1920). L'acido chinurenico è d'altra parte considerato come molto stabile nell'organismo animale, MATSUOKA, « Journ. Biol. Chem. », 35, 333 (1918), e ritenuto come un prodotto terminale del ricambio di alcuni animali (cani e conigli), KOTAKE e ICHIHARA, « Zeit. f. physiol. Chem. », 195, 179 (1931).

accumulano lavorando quantità grandi di urine, è stata, in un secondo tempo estratta da urine di conigli ai quali furono somministrati 3 o 4 gr. per volta di triptofano. Il triptofano impiegato era purissimo (con analisi), preparato dal dott. LUIGI GORINI, nei Laboratori della Ditta dr. BONISCONTRO e GAZZONE di Torino, che con gentile liberalità ha voluto offrircelo e che qui noi vivamente ringraziamo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 7 aprile 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano prof. G. CASTELNUOVO.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. *Sugli asintoti d'una curva algebrica piana in relazione alla teoria dei diametri.* Nota di MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH, presentata⁽¹⁾ dal Socio A. DI LEGGE.

1. Sia (in coordinate omogenee)

$$(I) \quad a_{n0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + a_{n-2,2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_{0,n} y^n + \\ + t (a_{n-1,0} x^{n-1} + a_{n-2,1} x^{n-2} y + a_{n-3,2} x^{n-3} y^2 + \dots + a_{0,n-1} y^{n-1}) + \\ + t^2 (a_{n-2,0} x^{n-2} + a_{n-3,1} x^{n-3} y + a_{n-4,2} x^{n-4} y^2 + \dots + a_{0,n-2} y^{n-2}) + \dots + \\ + t^{n-1} (a_{10} x + a_{01} y) + a_0 t^n = 0$$

l'equazione d'una curva algebrica irriducibile d'ordine n , od anche (indicando con $U_n(x, y)$, $U_{n-1}(x, y)$, $U_{n-2}(x, y) \dots U_1(x, y)$ rispettivamente i polinomi, omogenei in x, y , formati dall'insieme dei termini di grado $n, n-1, n-2, \dots, 1$ nell'equazione precedente):

$$(I') \quad U_n(x, y) + t U_{n-1}(x, y) + t^2 U_{n-2}(x, y) + \dots + \\ + t^{n-1} U_1(x, y) + t^n a_0 = 0.$$

Se $(1, m_i, 0)$ è un punto all'infinito della curva, l'equazione del diametro autoconiugato⁽²⁾ di rapporto direttivo m_i (asintoto relativo a quel punto all'infinito), si può scrivere

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) Cfr. M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria.* « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », 1935.

$$(2) \quad m_i x U'_n(m_i) - y U'_n(m_i) - t U_{n-1}(m_i) = 0$$

dove $U'_n(m)$ indica la derivata prima di $U_n(m)$ rispetto ad m (supposta variabile), essendo

$$(3) \quad \begin{cases} x^n U_n(m) = U_n(x, y) \\ x^{n-1} U_{n-1}(m) = U_{n-1}(x, y) \\ x^{n-2} U_{n-2}(m) = U_{n-2}(x, y) \\ \dots\dots\dots \\ x U_1(m) = U_1(x, y) \end{cases} \quad \left(\frac{y}{x} = m \right)$$

e dove in $U'_n(m)$ e $U_{n-1}(m)$ si è sostituito ad m il valore dato m_i .

Supposta m_i radice semplice di

$$(4) \quad U_n(m) = 0$$

la retta (2) è propria.

Se invece m_i è radice doppia di (4), e quindi semplice di $U'_n(m)$, (senza che essa annulli $U_{n-1}(m)$), la (2) si ridurrà a

$$t = 0.$$

Ciò concorda col fatto che la tangente (asintoto) nel punto all'infinito $(1, m_i, 0)$ — semplice dalla curva —, nel primo caso è propria, nel secondo caso è la retta all'infinito.

[Risultato analogo si ha, nelle stesse ipotesi se m_i è radice tripla, quadrupla, ecc. della (4)].

2. Ciò posto, nella presente Nota, mostrerò come si possano ottenere gli asintoti corrispondenti a radici multiple della (4), con considerazioni analoghe a quelle esposte nella mia precedente Nota, sopra citata, partendo dai diametri curvilinei della curva (1), di ordini $r = 2, 3, \dots$

3. Nel caso $r = 2$, da cui si deducono senza difficoltà i successivi, è noto⁽¹⁾ che la *conica diametrale coniugata* alla direzione di rapporto direttivo m_i ⁽²⁾, ha per equazione:

(1) V., p. es., G. SALMON, *Géométrie Analytique (Courbes planes)*. Paris, 1903.

(2) Se $A_1 A_2 \dots A_n$ sono i punti in cui una retta (di rapporto direttivo m) sega una curva algebrica F d'ordine n , detto C un punto della retta tale che

$$CA_1 \cdot CA_2 + CA_1 \cdot CA_3 + \dots + CA_1 \cdot CA_n + CA_2 \cdot CA_3 + \dots + CA_{n-1} \cdot CA_n = 0$$

(somma dei prodotti delle distanze degli n punti a due a due, prese in tutti i modi possibili), al variare della retta parallelamente a se stessa, il punto C descrive, come si dimostra, una conica (v. G. SALMON, loc. cit., n. 129) che si dice *conica diametrale, coniugata alla direzione data*.

In modo analogo si possono definire le curve diametrali di ordine $3, 4, \dots$ coniugate alla direzione data, e scriverne le equazioni.

$$(5) \quad x^2 \left[\frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial x^2} \right]_{m_i} + y^2 \left[\frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial y^2} \right]_{m_i} + 2xy \left[\frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{m_i} + \\ + 2xt \left[\frac{\partial U_{n-1}(x, y)}{\partial x} \right]_{m_i} + 2yt \left[\frac{\partial U_{n-1}(x, y)}{\partial y} \right]_{m_i} + 2t^2 [U_{n-2}(x, y)]_{m_i} = 0$$

dove l'indice m_i sta ad indicare che le quantità tra [] sono ottenute con operazioni analoghe a quelle della (3). Anzi con le nuove notazioni, per uniformità, $\left[\frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial y^2} \right]_{m_i}$ sta ad indicare $U''_n(m)$; $\left[\frac{\partial U_{n-1}(x, y)}{\partial y} \right]_{m_i}$ sta ad indicare $U'_{n-1}(m)$; e $[U_{n-2}(x, y)]_{m_i}$ sta ad indicare $U_{n-2}(m)$.

L'equazione della conica diametrale si può anche scrivere, come facilmente si vede, sotto la forma:

$$(5') \quad (y - m_i x)^2 U'_n(m_i) + 2(y - m_i x) [t U'_{n-1}(m_i) + (n-1)x U'_n(m_i)] + \\ + n(n-1)x^2 U_n(m_i) + 2(n-1)xt U_{n-1}(m_i) + 2t^2 U_{n-2}(m_i) = 0$$

Ora io chiamo *autoconjugata* la conica diametrale di equazione (5) o (5'), se essa passa doppiamente per il punto all'infinito a cui è coniugata (conica necessariamente degenera).

Ponendo le condizioni che la conica (5) passi doppiamente per il punto $(1, m, 0)$, l'equazione (5) e le equazioni che si ottengono ponendo uguali a zero le derivate parziali di F rispetto a x, y e t , dovranno cioè essere soddisfatte, ponendovi $x = 1, y = m_i, t = 0$. Si trovano così le 4 equazioni, di cui una conseguenza delle rimanenti (usando sempre le stesse notazioni)

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{m_i} + m_i^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{m_i} + 2m_i \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right]_{m_i} = 0 \\ & \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} \right]_{m_i} + m_i \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial y} \right]_{m_i} = 0 \\ & m_i \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{m_i} - \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial y} \right]_{m_i} = 0 \\ & \left[\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} \right]_{m_i} - m_i \left[\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} \right]_{m_i} = 0 \end{aligned} \right.$$

Ricordando la formula di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$(n-1) \frac{\partial U_n(x, y)}{\partial x} = x \frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 U_n(x, y)}{\partial x \partial y}$$

e analoghe, e facendovi le opportune trasformazioni, si vede subito che le formule precedenti equivalgono alle altre

$$(6') \quad \begin{cases} U_n(m_i) = 0 \\ U'_n(m_i) = 0 \\ U_{n-1}(m_i) = 0. \end{cases}$$

Sicchè m_i è radice doppia di $U_n(m) = 0$, e radice semplice di $U_{n-1}(m) = 0$.

Dunque se la conica diametrale è autoconiugata, (necessariamente degenera), il rapporto direttivo della direzione a cui è coniugata, è radice doppia dell'equazione $U_n(m) = 0$, e radice semplice di $U_{n-1}(m) = 0$.

4. Viceversa ogni (eventuale) radice doppia m_i di $U_n(m) = 0$, e semplice di $U_{n-1}(m) = 0$, corrisponde a una conica diametrale autoconiugata.

Tenendo conto infatti delle condizioni (6') verificate per ipotesi, si vede che l'equazione (5') della conica diametrale, corrispondente alla radice m_i si riduce a:

$$(7) \quad U''_n(m_i)[y - m_i x]^2 + 2 U'_{n-1}(m_i)[y - m_i x] t + 2 t^2 U_{n-2}(m_i) = 0$$

che non è altro che l'equazione complessiva degli asintoti corrispondenti alla radice doppia m_i , come si verifica, applicando noti procedimenti.

[Se l'equazione si abbassa a primo grado, ossia $U''_n(m_i) = 0$, (m_i radice tripla della (4), delle due rette una è la retta all'infinito. Se anche $U'_{n-1}(m_i) = 0$, le due rette coincidono con la retta all'infinito contata due volte, supposto $U_{n-2}(m_i) \neq 0$].

5. In modo analogo a quel che si è fatto per le coniche diametrali, si possono definire per la curva data (1), le successive curve diametrali autoconiugate del 3°, 4°, ... ordine, e dimostrare che esse si spezzano in asintoti della curva (1), di cui sarà quindi facile scrivere le equazioni.

Matematica (Analisi). — *Ancora sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine.* Nota di B. COLOMBO, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

§ 1. Scopo di questa Nota è di generalizzare il risultato di una mia Nota precedente sul *problema di Goursat* ⁽²⁾, posto dal punto di vista *reale* e dei problemi *in grande*, il che implica la risoluzione di una classe più generale di equazioni funzionali.

In tale studio si presentano difficoltà veramente ardue, che ho potuto superare, non senza fatica, in grazia ad un perfezionamento da me apportato al metodo delle successive approssimazioni. Esso consiste nel costruire la soluzione $\varphi(x)$ dell'equazione funzionale proposta mediante una serie di soluzioni di equazioni funzionali *ausiliarie* opportunamente introdotte; tenendo conto che queste ultime si risolvono a loro volta col metodo classico delle successive approssimazioni, in definitiva, dal punto di vista algoritmico, si viene adunque a sviluppare la funzione richiesta $\varphi(x)$ non in una serie semplice, bensì in una serie multipla; nel caso ad esempio della serie doppia, risulta $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{i=\infty} \sum_{i=0}^{i=\infty} \varphi_{ji}(x)$, essendo opportunamente definite la φ_{00} mediante la funzione nota, le $\varphi_{j,i+1}$ mediante le φ_{ji} ed infine le $\varphi_{j+1,0}$ mediante le $\sum_{i=0}^{i=\infty} \varphi_{ji}$.

Mantengo qui le notazioni e le convenzioni della mia Nota precedente, il che mi permetterà di non dilungarmi in richiami.

Considero ancora l'equazione a derivate parziali del quarto ordine di tipo *iperbolico*

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 0$$

nella funzione incognita χ delle due variabili indipendenti x, y , essendo λ un numero reale diverso da 0, 1, ∞ , sicchè le caratteristiche sono le rette di coefficienti angolari 0, 1, ∞ , λ ; senza scapito di generalità, è lecito convenire per il seguito che λ sia senz'altro compreso fra 0 ed 1 (estremi esclusi), perchè, con un opportuno cambiamento delle variabili x, y , nella (1) si può mutare λ in $\frac{1}{\lambda}$ ovvero in $\frac{1}{1-\lambda}$, i quali numeri, rispettivamente per $\lambda > 1$ ovvero per $\lambda < 0$, riescono compresi appunto fra 0 ed 1.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) Cfr. B. COLOMBO, *Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine.* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XVI, ser. 6^a, 2° sem., p. 291.

Ho già dimostrato che per la (1) è risolubile il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, il quale consiste nella ricerca di un suo integrale che assuma valori prefissati su quattro-segmenti di caratteristiche passanti ad esempio per l'origine O, e che il relativo campo di esistenza è quello che ho chiamato un *esagono E di parametro τ* . Ora mi propongo di risolvere sempre il problema di Goursat nel caso più generale in cui i valori dell'integrale si diano su tre segmenti di caratteristiche e su un ulteriore segmento, passanti tutti per O; dimostro che esso continua ad ammettere una ed una sola soluzione, cioè dimostro il relativo *teorema di esistenza e di unicITÀ*, purchè l'ulteriore retta prescelta sia compresa in un angolo, che verrà precisato nel § 3, contenente l'unica caratteristica che non è sostegno di valori iniziali.

Avverto, circa tale restrizione, che si può riconoscere su esempi come il problema di Goursat che consiste appunto nel dare i valori dell'integrale su tre caratteristiche e su una retta passanti per O non sempre sia risolubile, vale a dire come quest'ultima retta non possa effettivamente essere del tutto arbitraria; del resto in vari casi esaminati dal d'Adhémar⁽¹⁾, dal Sjöstrand⁽²⁾ e da me⁽³⁾ per le equazioni del terzo e del quarto ordine di tipo iperbolico, appare già come i risultati possano variare, dipendentemente dalla collocazione delle rette che sostengono i valori iniziali. Faccio notare infine che il problema in esame, il quale è risolubile, ha come caso limite quello relativo alle caratteristiche, il quale è ancora risolubile; invece per un'equazione del terzo ordine si perviene a risultati diversi, come io stesso ho già dimostrato, secondochè i valori iniziali si danno su due caratteristiche ed una retta non caratteristica oppure su tre caratteristiche, passanti sempre per O, pur essendo il secondo problema un caso limite del primo.

§ 2. Suppongo che i valori prefissati per l'integrale $\chi(x, y)$ sui due assi siano nulli, il che può farsi senza scapito di generalità, ed indico con $\Psi(x)$ e $\Phi(x)$ le funzioni alle quali esso deve ridursi rispettivamente per $y = x$ e per $y = \alpha x$, essendo α un numero reale che ritengo senz'altro compreso fra 0 ed 1 (estremi esclusi); le Ψ e Φ devono essere definite nell'intervallo I da $-\tau$ a $+\tau$, se τ è il parametro dell'esagono E che si considera, e, per la compatibilità in O dei dati iniziali, devono verificare le

$$(2) \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi'(0) = 0, \quad \Phi''(0) = \alpha \Psi''(0).$$

(1) Cfr. R. D'ADHÉMAR, *Sur l'application du calcul fonctionnel...* « Journal de Math. », ser. 6^a, to. 5^o, 1909, p. 293.

(2) Cfr. O. SJÖSTRAND, *Sur le problème de M. Goursat...* « Thèse », Gothembourg, 1929, ed anche *Sur un problème aux limites...* « Arkiv för Mat., Astr. och Fys. », 1934.

(3) Cfr. B. COLOMBO, *Studio di problemi ai limiti...* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXXIII, ser. 5^a, 2^o sem., p. 156.

Senza menomare la generalità dell'integrale

$$(3) \quad \tau(x, y) = \varphi(y - \lambda x) + \psi(y - x) + \rho(x) + \sigma(y)$$

della (1), è lecito supporre che i simboli funzionali arbitrari $\varphi, \psi, \rho, \sigma$ dai quali esso dipende verifichino le

$$(4) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \rho(0) = 0.$$

Le condizioni dianzi precisate, che vogliamo imporre all'integrale (3), si traducono nelle relazioni

$$(5) \quad \rho(x) = -\varphi(-\lambda x) - \psi(-x), \quad \sigma(x) = -\varphi(x) - \psi(x),$$

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(-\lambda x) - \varphi[(1-\lambda)x] = -\psi(x) - \psi(-x) - \Psi(x), \\ \psi(x) + \psi(-\alpha x) - \psi[(1-\alpha)x] = -\varphi(\lambda x) - \varphi(-\alpha x) + \\ + \varphi[(\lambda - \alpha)x] - \Phi(-x). \end{cases}$$

Eliminando la ψ dal sistema (6) si ottiene finalmente l'equazione funzionale

$$(7) \quad \varphi(x) + \varphi(\lambda \alpha x) + \varphi[(1-\lambda)(1-\alpha)x] - \varphi(\lambda x) - \varphi(\alpha x) - \\ - \varphi[-\lambda(1-\alpha)x] - \varphi[-(1-\lambda)\alpha x] - \varphi[(1-\lambda)x] - \\ - \varphi[(1-\alpha)x] + \varphi[(\lambda - \alpha)x] + \varphi[(\alpha - \lambda)x] = F(x),$$

nella quale si è posto

$$(8) \quad F(x) = \Phi(x) + \Phi(-x) - \Psi(x) - \Psi(-\alpha x) + \Psi[(1-\alpha)x];$$

la (7) deve essere soddisfatta per x variabile in tutto l'intervallo I ; siccome poi, in grazia alla (8) ed alla (2), si ha $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$, esiste un numero positivo M tale che in I è vera la

$$(9) \quad |F(x)| \leq M |x|^3.$$

§ 3. La questione fondamentale è pertanto costituita dallo studio dell'equazione funzionale (7). Se si facessero le approssimazioni successive al modo classico essa non potrebbe risolversi, perchè non si riuscirebbe a dimostrare la convergenza della serie che dovrebbe fornire la soluzione; invero i moduli dei coefficienti di x che figurano nella (7) sotto il simbolo φ , a prescindere dal coefficiente 1 relativo al primo termine, hanno dei cubi (qui interessa appunto la loro terza potenza) la cui somma non sempre riesce minore di 1, nemmeno ove si conceda di limitare la variabilità di α rispetto alla λ che è stata fissata. Procediamo invece in conformità con quanto si è detto nel § 1.

A tal fine consideriamo l'equazione funzionale *ausiliaria*

$$(10) \quad \varphi(x) + \varphi(\lambda \alpha x) + \varphi[(1-\lambda)(1-\alpha)x] - \varphi(\lambda x) - \varphi(\alpha x) + \\ + \varphi[\lambda(1-\alpha)x] + \varphi[(1-\lambda)\alpha x] - \varphi[(1-\lambda)x] - \varphi[(1-\alpha)x] = F(x),$$

la quale, posto

$$(11) \quad H_\lambda \varphi \equiv \varphi(x) - \varphi(\lambda x) - \varphi[(1-\lambda)x],$$

assume la forma

$$(12) \quad H\varphi \equiv H_\lambda H_\alpha \varphi = F(x) \quad (1).$$

Secondo una proposizione stabilita in una mia Nota ⁽²⁾, l'equazione funzionale

$$(13) \quad H_\lambda \varphi = F(x),$$

essendo sempre $0 < \lambda < 1$ e sussistendo la (9), ammette una soluzione φ definita in I e tale che risulta in esso

$$(14) \quad |\varphi(x)| \leq \frac{M}{3\lambda(1-\lambda)} |x|^3,$$

ed ammette soltanto quella sotto la condizione che, per un numero positivo L , valga appunto la

$$(15) \quad |\varphi(x)| \leq L |x|^3 \quad (3).$$

Siccome la risoluzione della (12) equivale evidentemente alla successiva risoluzione di due equazioni funzionali del tipo (13), prima in $H_\alpha \varphi$ e poi

(1) Per semplicità si è scritto ad esempio $H\varphi$ invece di $H(\varphi)$, dato che, per il significato attribuito ad H , non possono sorgere equivoci.

(2) Cfr. B. COLOMBO, *Su una classe di equazioni...* « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », aprile 1929.

(3) Più generalmente l'equazione funzionale

$$\varphi(x) \pm \varphi(\pm \lambda x) \pm \varphi[\pm(1-\lambda)x] = F(x)$$

(la scelta tra i due segni $+$ e $-$ intendendosi fatta ogni volta ad arbitrio) è risolubile anche quando nella (9) l'esponente 3 venga sostituito coll'esponente 2, e ciò perchè già il numero positivo $\lambda^2 + (1-\lambda)^2$ riesce minore di 1; ed è anzi risolubile qualunque sia λ , purchè finito, non nullo e diverso da 1 (restrizioni queste certamente necessarie), dato che, con un opportuno cambiamento della variabile x , in essa si può mutare λ in $\frac{1}{\lambda}$ ovvero

in $\frac{1}{1-\lambda}$; varia però di conseguenza la (14), nonchè l'intervallo in cui la φ risulta definita; la soluzione è poi sempre unica sotto la condizione (15), anche se in questa si sostituisce l'esponente 3 coll'esponente 2.

in φ , la (12) stessa, ossia l'equazione funzionale ausiliaria (10), ammette una soluzione φ definita in I e tale che risulta in esso

$$(16) \quad |\varphi(x)| \leq \frac{M}{9\lambda(1-\lambda)\alpha(1-\alpha)} |x|^3,$$

ed ammette soltanto quella sotto la condizione (15)⁽¹⁾.

Confrontando ora la (7) colla (10) e ricordando la (12), appare che la (7) stessa può scriversi nella forma

$$(17) \quad H\varphi - K\varphi = F(x),$$

essendosi posto

$$(18) \quad K\varphi = \varphi[\lambda(1-\alpha)x] + \varphi[(1-\lambda)\alpha x] + \varphi[-\lambda(1-\alpha)x] + \\ + \varphi[-(1-\lambda)\alpha x] - \varphi[(\lambda-\alpha)x] - \varphi[(\alpha-\lambda)x].$$

Allo scopo di risolvere la (17) facciamo ora le posizioni alle quali si è condotti, secondo i soliti ragionamenti, quando la si generalizzi nella

$$(19) \quad H\varphi - \mu K\varphi = F(x),$$

essendo μ un parametro indeterminato, e si tenti poi di soddisfare la (19) con una serie di potenze di μ , i coefficienti essendo funzioni di x , ossia

colla $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \mu^i \varphi_i(x)$. Otteniamo così le relazioni

$$(20) \quad H\varphi_0 = F(x) \quad , \quad H\varphi_{i+1} = K\varphi_i \quad (i=0, 1, 2, \dots);$$

queste risultano successivamente delle equazioni funzionali del tipo (12), e perciò, in grazia anche alla (16) ed alla (18), ammettono delle soluzioni φ_i definite in I e tali da verificare quivi le

$$(21) \quad |\varphi_i(x)| \leq \frac{M}{9\lambda(1-\lambda)\alpha(1-\alpha)} N^i |x|^3 \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

nelle quali si è indicata con N l'espressione

$$(22) \quad \frac{2}{9} \frac{\lambda^3(1-\alpha)^3 + (1-\lambda)^3\alpha^3 + \lambda - \alpha^3}{\lambda(1-\lambda)\alpha(1-\alpha)}.$$

La convergenza totale in I della serie $\sum_{i=0}^{i=\infty} \varphi_i(x)$ è adunque manifesta ove riesca minore di 1 il numero positivo N; tale serie, riferendosi al caso

(1) In conformità colla precedente nota a pie' di pagina, la (10) è risolubile, anche sotto ipotesi meno restrittive, qualunque siano λ ed α , purchè finiti, non nulli e diversi da 1.

$\mu = 1$, fornirà allora una soluzione $\varphi(x)$ della (17), ossia dell'equazione funzionale fondamentale (7), e ne sarà anzi l'unica soluzione sotto la condizione (15), effettivamente imposta dalla prima delle (4).

Orbene la (22), fissata la λ , è una funzione continua di α , la quale, per $\alpha = \lambda$, assume il valore $\frac{4}{9} \lambda (1 - \lambda) < \frac{1}{9}$; si mantiene quindi minore di 1 mentre α varia precisamente in un intervallo J (estremi esclusi) funzione di λ e contenente λ all'interno, i cui estremi si riconoscono il primo maggiore di 0 ed il secondo minore di 1, sicchè la condizione che N risulti minore di 1 limita soltanto la variabilità di α rispetto alla λ fissata. Sarebbe anzi facile valutare gli estremi di quell'intervallo J, i quali sono rispettivamente la più grande radice minore di λ e la più piccola radice maggiore di λ delle due equazioni di terzo grado in α che si ottengono eguagliando ad 1 la (22), in corrispondenza ai due casi $\alpha < \lambda$ ed $\alpha > \lambda$, che vanno distinti per la presenza nella (22) del segno di modulo. Mi sembra però che non meriti trascrivere due formule abbastanza complicate e che, per lo scopo di questa Nota, basti aver dimostrata l'esistenza dell'intervallo J ⁽¹⁾.

§ 4. Non continuo qui i ragionamenti ed i calcoli intesi a determinare, dopo la φ , le altre funzioni ψ , ρ , σ in modo che siano vere le (5) e (6), perchè non si presentano più delle difficoltà nuove; si trova che esse esistono, sono uniche sotto le condizioni (4) e risultano definite in I. Esiste allora ed è unico l'integrale z cercato, e riesce definito all'interno di E; possiamo adunque concludere col seguente.

TEOREMA. — *Esiste uno ed un solo integrale della (1) il quale sui tre segmenti di caratteristiche $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ e sul segmento della retta $y = \alpha x$ interni ad un esagono E di parametro τ assume valori comunque prefissati (in modo compatibile in O), supposto che α appartenga all'intervallo J (estremi esclusi), e l'integrale stesso risulta definito proprio in tutto l'interno di E. Vale a dire: È risolubile il problema di Goursat. or ora precisato, posto per la (1) in grande e dal punto di vista reale.*

(1) Ove si ricercasse se tale intervallo non possa essere ulteriormente ampliato, ci si troverebbe di fronte a difficoltà forse insuperabili finchè non si disporrà di metodi radicalmente nuovi; dubbi di tal genere sono frequenti in siffatte questioni.

Matematica. — *Sulla convergenza quasi continua di successioni di funzioni.* Nota di J. REY PASTOR, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Il concetto di *convergenza continua* in un punto introdotto da Hahn nella sua *Teoria delle funzioni di variabile reale* e studiato da Caratheodory in una Memoria già classica ⁽²⁾ dà una condizione sufficiente per la continuità della funzione limite di una successione

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Tale condizione non è però necessaria come si vede nella successione

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \quad \text{per } x > 0 \quad ; \quad f_n(0) = 0$$

nella quale esistono successioni di valori $f_n(x_n)$ tali come $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n$ che non tendono a 0 per $x_n \rightarrow 0$; non ostante la continuità della funzione limite $f(x) = 0$.

È anche facile dimostrare con un esempio che la continuità uniforme della convergenza in un punto x_0 (condizione meno stretta che la convergenza continua) non è sufficiente perchè $f(x)$ sia continua in x_0 :

$$x > 0 \quad f_n(x) \text{ ugualmente continua in } x = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\left(\text{p. es. } f_n(x) = \frac{x}{n} \right)$$

$$x = 0 \quad f_n(0) = 1$$

è anche

$$x > 0 \quad , \quad f(x) = 0 \quad , \quad R_n(x) = f_n(x)$$

$$x = 0 \quad , \quad f(x) = 1 \quad . \quad R_n(0) = 0$$

mentre

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

se $x < \delta_n$ ($n = 1, 2, \dots$) e la convergenza è uniforme nel punto 0.

(1) Nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) « Math. Ann. », vol. 101, 1929, p. 515. Ved. anche COURANT, « Nachr. Ges., Göttingen », 1914.

Per le successioni di funzioni continue il problema della conservazione della continuità al limite fu risolto, come è noto, da Dini e Arzelà, nel caso delle funzioni di una variabile reale, ed esteso posteriormente al caso di un numero arbitrario di variabili ed agli spazi metrici astratti. Il concetto di convergenza quasi continua che ci proponiamo di definire si riferisce ad un punto e non ad un insieme e non suppone l'esistenza della funzione limite se non nel punto $x = 0$.

DEFINIZIONE. — Diremo che la successione di funzioni $f_r(x)$ (r naturale o reale positivo) definite in un insieme C di S_n è quasi continua nel punto x_0 di C , se esiste un numero reale l , tale che ad ogni numero $\varepsilon > 0$ corrisponde un intorno $X(\varepsilon)$ di x_0 che soddisfa la condizione: ad ogni x di X corrispondono infiniti indici $r_i(x) \rightarrow \infty$ tali che

$$(1) \quad |f_{r_i}(x) - l| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

La quasi continuità si dirà *completa* se la (1) è soddisfatta in corrispondenza di tutti gli indici $r \geq \rho(x)$, cioè

$$(1') \quad |f_r(x) - l| < \varepsilon \quad r \geq \rho(x)$$

TEOREMA. I. — Se una successione $f_r(x) \rightarrow f(x)$ convergente in un insieme C è quasi continua in un punto x_0 di C la quasi continuità è completa ed è $l = f(x_0)$.

Sia

$$(2) \quad f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x)$$

in C ed in particolare in x_0 .

Per ipotesi si verifica (1) nel punto x di X e risulta se $i \rightarrow \infty$

$$(3) \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

e da (2)

$$|f_r(x) - f(x)| < \varepsilon \quad r \geq \rho(x)$$

e pertanto sommando si ha per ogni punto x di X

$$|f_r(x) - l| \leq 2\varepsilon \quad r \geq \rho(x)$$

e cioè la quasi continuità è completa.

Inoltre verificandosi (3) in x_0 per ogni $\varepsilon > 0$ deve essere $f(x_0) = l$.

TEOREMA II. — Condizione necessaria e sufficiente per la quasi continuità completa in x_0 della successione $f_r(x)$ definita in un insieme C che contiene x_0 è che ad ogni successione numerabile $x_n \rightarrow x_0$ appartenente a C corrisponda una successione numerabile di indici $\rho_n \rightarrow \infty$ tale che per ogni successione $r_n \geq \rho_n$.

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r_n}(x_n) = l$$

La condizione è necessaria poichè se $\varepsilon > 0$ per ogni $n > m$ tutti i punti x_n appartengono all'intorno $X(\varepsilon)$ come vuole la definizione (1') e, conformemente a questa, a ogni x_n corrisponde un ρ_n tale che

$$|f_r(x_n) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > m, \quad r \geq \rho_n$$

ed è pertanto per ogni successione $r_n \geq \rho_n$

$$|f_{r_n}(x_n) - l| < \varepsilon \quad \text{se } n > m.$$

È cioè verificata la (4); che si dimostra essere sufficiente ammettendo per l'assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che la (1') non sia verificata per punti x_i arbitrariamente prossimi a x_0 , ammettendo cioè esista una successione $x_n \rightarrow x_0$ tale che

$$|f_{r_{nj}}(x_n) - l| \geq \varepsilon \quad \text{se } n \geq k \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

essendo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_{nj} = \infty \quad \text{per ogni } n \geq k.$$

Qualunque sia la successione $\rho_n \rightarrow \infty$ esistono $r_{nj} > \rho_n$ e la (4) non appare soddisfatta, in contraddizione con quanto si era supposto, da qualsiasi successione $r_{1j_1}, r_{2j_2}, r_{3j_3}, \dots$ formata con essi.

TEOREMA III. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione $f_r(x)$ definita in C sia quasi continua nel punto x_0 è che per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ appartenente a C e per ogni successione $\rho_n \rightarrow \infty$ esista una successione numerabile di indici $\tau_n \geq \rho_n$ tale che*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\tau_n}(x_n) = l.$$

La condizione è necessaria poichè dato $\varepsilon > 0$ e per ogni $n > m$ tutti i punti x_n appartengono all'intorno $X(\varepsilon)$ postulato dalla definizione (1) e conformemente a questa, ad ogni x_n corrisponde un $\tau_n > \rho_n$ tale che

$$|f_{\tau_n}(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Si dimostra che la condizione è sufficiente supponendo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che a valori x_i di x arbitrariamente prossimi a x_0 non si abbiano infiniti indici soddisfacenti la (1). Supponiamo cioè che sia

$$|f_r(x_i) - l| \geq \varepsilon \quad \text{se } r \geq \rho_i$$

in una successione di punti $x_i \rightarrow x_0$. Ciò contraddice all'ipotesi (6), secondo la quale esiste una successione $\tau_n > \rho_n$ tale che

$$|f_{\tau_n}(x_n) - l| < \varepsilon \quad n > m.$$

TEOREMA IV. — Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione $f(x)$ limite della successione $f_r(x)$ nell'insieme C sia continua nel punto x_0 di C è che la successione $f_r(x)$ sia quasi continua in x_0 .

Sia

$$(7) \quad f(x_0) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x_0).$$

Per la continuità di $f(x)$ è

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{in un intorno } X(\varepsilon);$$

per la convergenza $f_r(x) \rightarrow f(x)$ in C ad ogni punto x di C corrisponde un numero $\rho(x)$ tale che

$$|f(x) - f_r(x)| < \varepsilon \quad \text{se } r > \rho(x)$$

e per tanto anche

$$|f_r(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon$$

per ogni x di X ed ogni $r > \rho(x)$.

Appare cioè dimostrato non solo la quasi continuità della successione $f(x)$ in x_0 come afferma il teorema, ma eziandio la quasi continuità completa, come vuole il teorema I.

Reciprocamente: supposta la quasi continuità in x_0 della successione, ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un intorno X in ogni punto del quale si verifica (1). In particolare, per $x = x_0$ per il teorema I deve essere $l = f(x_0)$ e si ha pertanto per ogni x di X

$$|f_{r_i}(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (r_i \rightarrow \infty)$$

e in corrispondenza di questo punto x poichè $f_r(x) \rightarrow f(x)$

$$|f(x) - f_r(x)| < \varepsilon \quad \text{se } r \geq \rho$$

e anche pertanto per qualche r_* della successione anteriore r_i .

Si ottiene così dalle due disuguaglianze

$$|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon$$

per ogni x di X e pertanto la continuità di $f(x)$ in x_0 .

Nota. In particolare, se tutte le funzioni della successione coincidono, se cioè $f_r(x) = f(x)$ la quasi continuità della successione equivale alla ordinaria definizione della continuità di $f(x)$ nel punto x_0 .

La generalizzazione dei nostri risultati a gli spazi topologici qualunque è immediata.

Geometria. — *Riflessioni di Geometria proiettiva differenziale.*

Nota di G. MARLETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Sono qui esposte alcune osservazioni che, a me pare, possono, se approfondite, condurre a risultati interessanti, perchè esse conducono ad un procedimento atto ad individuare un qualunque elemento (punto o retta) del piano tangente ad una superficie in un punto generico di questa, e quindi ad individuare un qualunque elemento (piano o retta) della stella avente per centro questo punto.

1. Siano φ una superficie non rigata dello spazio ordinario e P un suo punto generico.

Indicheremo: con u e v le asintotiche, di φ , passanti per P; con u^3 e v^3 rispettivamente le cubiche gobbe a contatto 6-punto, in P, con u e v ; con t e t' la tangente canonica e la sua armonica rispetto alle tangenti principali di φ in P; con π e π_c il piano tangente e il piano canonico relativi a questo punto ⁽²⁾.

2. Di curve c d'ordine m aventi P come $(m-1)$ -plo, e a contatto $(m+1)$ -punto, in P, con ciascuno dei due rami con i quali passa per questo punto la curva $\pi\varphi$, ne esiste (in π) una ed una sola per ogni valore di m . Infatti rispettivamente abbiamo

$$m \frac{(m+3)}{2} - m \frac{(m-1)}{2} - 2m = 0 \quad \text{e} \quad (m-1)^2 + 2m = m^2 + 1 > m^2.$$

3. Consideriamo l'ipotesi (n. 2) $m=3$.

Se M ed M' sono i due punti nei quali la cubica c è ulteriormente incontrata rispettivamente dalle rette t e t' (n. 1), la retta MM' secca ancora c in un punto H; questo punto è distinto da M e anche da M'. Infatti dato un punto A, di c , siano A_1 e A_2 i punti di contatto delle due tangenti a c condotte da A; indicando con A'_1 e A'_2 gli armonici rispettivamente di A_1 e A_2 rispetto ai due punti che costituiscono il nodo P di c , assumiamo A'_1 e A'_2 come omologhi di A. Viceversa dato A'_1 , si costruisca A_1 e poi il tangenziale A di questo. Si ottiene così, tra i punti della curva razionale c , una corrispondenza algebrica (1, 2). Se $A \equiv A'_1$, è armonico

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) Cfr. G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria Proiettiva Differenziale* [N. Zanichelli, Bologna].

il gruppo delle due tangenti di c in P e delle due rette che da questo punto proiettano $A \equiv A'_1$ e A_1 ; quindi nel fascio (P) esistono tre coppie di rette ognuna proiettante un punto di τ e il tangenziale di questo punto ⁽¹⁾, coppie tali che ciascuna di esse separa armonicamente le tangenti di c in P . Ma queste tre coppie sono, come la cubica c , perfettamente determinate dall'intorno di 3° ordine del punto P in φ , onde le rette t e t' (le quali invece sono individuate dall'intorno di 5° ordine di P) non costituiscono, in generale, alcuna di queste tre coppie, e di conseguenza la tangente a c in M non passa per M' , e la tangente in M' non passa per M .

A questa stessa conclusione verremo subito, e con precisione, ragionando nel seguente modo.

Se fosse, p. es., $H \equiv M$, le rette passanti per M' secherebbero ulteriormente c in una g^1_2 della quale $H \equiv M$ sarebbe un punto doppio, l'altro punto doppio coinciderebbe con M' perchè esso, insieme con M , deve dividere armonicamente i due punti del nodo P ⁽²⁾, onde M' sarebbe un flesso della cubica. Ne seguirebbe che la retta t' sarebbe una tangente di Darboux ⁽³⁾, e, quindi, t una tangente di Segre.

Ragionando analogamente per $H \equiv M'$, concludiamo che se, come accade in generale, la tangente canonica non coincide con alcuna tangente di Darboux o di Segre, i punti M, M', H sono tutti distinti tra loro.

4. Scegliendo questi tre punti H, M, M' (in quest'ordine) come fondamentali, i punti della cubica c si possono mettere in corrispondenza birazionale con i valori di un parametro λ , chiamando omologhi un punto E di c e un valore λ_1 di λ ogni qualvolta sia $(HMM'E) = \lambda_1$.

Da questa semplicissima osservazione si deduce qualche conseguenza che stimo non priva d'interesse.

5. Cominciamo ad osservare che le rette reciproche, rispetto ad una qualunque quadrica del fascio di Darboux, delle tangenti della cubica nodale c , sono le generatrici di un cono quartico tricuspidato χ di vertice P , e queste generatrici son tali che ognuna di esse è perfettamente individuata dall'intorno di 5° ordine di P e da un valore del parametro λ (valore che serve a distinguerle tra loro).

Di queste infinite rette soltanto quattro appartengono al piano canonico; sappiamo dunque costruire infinite rette fuori del piano canonico ⁽⁴⁾, ognuna

(1) È evidente che di coppie siffatte non ne esistono infinite, perchè altrimenti se la tangente in A_1 passa per A , anche la tangente in A dovrebbe passare per A_1 , cioè la retta AA_1 sarebbe bitangente, ciò che è assurdo.

(2) Infatti questi due punti costituiscono una coppia della g^1_2 .

(3) Come in B. SEGRE, *La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface* [«Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences», to. 184, 1927].

(4) E fuori del piano tangente.

passante per P e perfettamente individuata dall'intorno di 5° ordine di questo punto.

6. Anche i piani tangenti del cono χ (n. 5) godono della proprietà di essere singolarmente individuati dal sopradetto intorno; p. es. i tre, di questi piani, passanti per lo spigolo di Green e rispettivamente per le tre generatrici cuspidali del cono $\chi^{(1)}$.

7. Altri numerosi e interessanti fatti geometrici si possono dedurre da quanto si disse nel n. 4.

Per es.: fissati due valori del parametro λ , rimane individuata una retta di π e quindi, nella stella (P) , la reciproca (n. 5) di questa.

Ancora: dato un generico punto Q di π , nella retta PQ , del fascio (P, π) , abbiamo già il punto P e i due punti R ed S nei quali rispettivamente essa incontra c e la retta l dei tre flessi di questa cubica; ne segue che mediante l'intorno di 5° ordine di P , rimane individuato qualunque punto Q del piano π appena noti il valore di λ (n. 4) relativo al punto R , e il valore del birapporto $\mu = (PRSQ)$. Ne rimane senz'altro individuato un piano ω nella stella (P) , e precisamente il piano polare di Q rispetto alla quadrica di Lie.

Per es. per $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ si ottiene il piano canonico π_c .

Infine siccome nel fascio (Q, π) abbiamo già le tre rette QH, QM, QM' , ognuna perfettamente individuata, così (ogni retta r di questo fascio, e quindi) ogni retta (n. 5) del fascio (P, ω) è ulteriormente individuata dal birapporto $\nu = [Q(HMM'r)]$.

Per es. per $\lambda = 1, \mu = -1, \nu = -1$ si ottiene una retta passante per P e fuori del piano canonico π_c .

8. Dei tre punti M, M', H (n. 3) consideriamone uno, p. es. M' .

Posto $B_i \equiv M'$ e detto B_{i+1} il tangenziale del punto B_i della cubica c , al variare dell'indice i ($i = 1, 2, 3, \dots$) troviamo infinite tangenti $B_i B_{i+1}$ di questa curva, le cui reciproche (n. 5) sono rette ciascuna individuata dall'intorno di 5° ordine di P (e da un numero intero positivo).

Queste rette, generatrici del cono χ (n. 5), sono tutte fuori del piano canonico (eccettuate 4 al più); in particolare certamente è fuori del piano canonico la retta reciproca della tangente, di c , nel punto M' , perchè se fosse altrimenti questa tangente dovrebbe passare per il centro del 2° fascio canonico, che è un punto di l' (n. 1), e quindi essa coinciderebbe con questa retta l' , ciò che è assurdo.

(1) Lo spigolo di Green è la retta reciproca della retta dei flessi della cubica c ; cfr. V. STRAZZERI, *Una definizione geometrica dello spigolo di Green*. [«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. LIV, 1930].

9. Consideriamo il punto N in cui la tangente canonica t incontra la retta l dei tre flessi di c ; esso non appartiene alla 2^a direttrice d' di Wilczynski, perchè del fascio (P, π) è la retta t' che passa per il punto ld' .

Dei tre piani osculatori della cubica gobba u^3 (n. 1) passanti per N , uno è π ; siano A e B i punti di osculazione dei rimanenti due di questi tre piani; analogamente si trovano altri due punti C e D nella cubica gobba v^3 (n. 1). I piani PAB e PCD , passanti per N , sono tra loro distinti, perchè se coincidessero in un piano σ , le rette del fascio (N, σ) sarebbero rette della congruenza lineare avente per direttrici le direttrici di Wilczynski, mentre abbiamo osservato che il punto N non appartiene ad alcuna di queste. Abbiamo dunque il quadrispigolo $(P) ABCD$; di questo la retta $t \equiv PN$ è uno spigolo diagonale; gli altri due spigoli diagonali stanno in un piano τ individuato dall'intorno di 5^o ordine di P , e distinto dal piano tangente π e dal piano canonico π_c perchè esso non passa per la tangente canonica t . Notevoli, quindi, le rette $\tau\pi_c$ e $\tau\pi$.

10. Su una qualunque curva c (n. 2) si può ragionare come si è fatto nei nn. 3, 4, 5, 6, 7 nell'ipotesi $m = 3$, soltanto è qui da osservare che il punto analogo al punto H si costruisce diversamente, e precisamente secondo c , se d'ordine m' , con la curva, del n. 2, d'ordine $m' - 2$; infatti queste due curve hanno in comune solamente un punto distinto da P , punto che, in generale, non coincide con M , nè con M' .

Meccanica. — *Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.*
Nota di C. TOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. *Introduzione.* — Come è ben noto, un'applicazione delle equazioni gravitazionali di Einstein è la ricerca della natura della metrica cronotopica che corrisponde al nostro universo, quando sia considerato in grande scala, cioè quando, ad ogni regione di sufficiente estensione attorno ad una galassia, si attribuisca la materia di questa, distribuita uniformemente e dotata della velocità media della galassia stessa (in un tempo sufficientemente lungo).

Non è detto che, anche se considerato in grande scala, il nostro universo si possa ritenere completamente simmetrico attorno ad ogni suo punto. Tuttavia, per la grande semplificazione che si viene così ad introdurre nella trattazione matematica del problema, e perchè ben rispondente alla veduta (tanto radicata in noi « moderni! ») che la parte dell'universo, in cui ci

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

troviamo, non debba essere in alcun modo privilegiata, quella ipotesi è stata comunemente assunta nei lavori svolti sull'argomento. Lo studio delle soluzioni delle equazioni gravitazionali, in questa ipotesi particolare di un universo isotropo ed omogeneo, è ormai completo⁽¹⁾, sia nel caso statico (Einstein, De Sitter) e sia nel caso dinamico (Friedmann, Lemaitre, De Sitter), che è quello di attualità dopo la scoperta del moto di allontanamento delle galassie.

In una sua Nota dello scorso anno⁽²⁾ il Tolman dimostra, dall'esame di alcuni casi particolari di universi non omogenei, che, almeno in generale, le equazioni di Einstein non implicano nessuna tendenza delle disomogeneità iniziali a scomparire col tempo. Ciò conferma la possibilità che il nostro universo, anche se considerato in grande scala, sia ben lungi dal poter essere approssimato con un modello isotropo ed omogeneo e che delle regioni, al di fuori del campo dei nostri attuali telescopi, siano in contrazione piuttosto che in espansione e contengano materia con densità e stadio di evoluzione del tutto differenti da quelli che ci sono famigliari.

Poichè ogni decisione, in favore della ipotesi di omogeneità o meno, è, allo stato delle attuali conoscenze, pura extrapolazione, può sembrar saggio il non applicare con troppa facilità al comportamento dell'universo conclusioni tratte dallo studio di modelli omogenei e di passare ad esaminare modelli cosmologici che non siano tali. A puro titolo di semplificazione matematica, ne prenderemo in esame uno speciale tipo: modelli dotati di completa simmetria (geometrica e cinematica) attorno ad un ben determinato punto.

La forma che assumono le equazioni gravitazionali per questi universi è data anche dal Tolman nella sua Nota, però nell'ipotesi particolare che, in un riferimento sostanziale, cioè fornito dalla stessa materia in moto, non vari da punto a punto (in uno stesso istante) la velocità della luce. Le equazioni che io qui presento sono invece valide indipendentemente da questa assunzione. In una prossima Nota esaminerò come esse si semplifichino nell'ipotesi introdotta dal Tolman.

2. *Forma del ds^2 quadridimensionale.* — Occorre anzitutto che scegliamo le coordinate, a cui riferire gli elementi tensoriali che compaiono nelle equazioni di Einstein. Ove si tenga conto che ogni varietà metrica tridimensionale a simmetria sferica è rappresentabile conformemente nello spazio euclideo⁽³⁾, ci si presentano come coordinate convenienti: la coordinata tem-

(1) Ved. per es. W. DE SITTER, *The astronomical aspect of the theory of relativity*. « Univ. of California Publ. in Mathem. », vol. 2, n. 8, giugno, 1933.

(2) R. C. TOLMAN, *Effect of inhomogeneity on cosmological models*. « Proc. of the National Academy of Sciences », Washington, vol. 20, n. 3, pp. 169-176, marzo 1934.

(3) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. Bologna, Zanichelli, 1928, p. 139.

orale x_0 , per cui risulta la simmetria di ogni sezione $x_0 = \text{cost.}$ del cronotopo, e le coordinate x_1, x_2, x_3 dello spazio euclideo rappresentativo, riferito ad una terna cartesiana avente per origine il centro di simmetria.

Conformandoci a quanto si è soliti fare ⁽¹⁾, ammetteremo anche noi che, pel riferimento ora scelto, vengano a mancare nel ds^2 i termini rettangoli in dx_0 ; ciò equivale, come è noto ⁽²⁾, ad accettare la isotropia della propagazione della luce. Osserviamo però che tanto Lemaître e De Sitter, nei loro lavori, per i modelli isotropi ed omogenei, quanto il Tolman, nella sua Nota, per i modelli simmetrici attorno ad un unico centro, ammettono quella isotropia rispetto a coordinate sostanziali. Noi qui invece, non per sostenere un'ipotesi diversa, ma perchè è una generalità che ci costa poco, lasceremo imprecisato se le coordinate x_1, x_2, x_3 assunte, e rispetto alle quali abbiamo supposto il comportamento isotropico della luce, seguano il moto della materia o costituiscano un qualsiasi altro riferimento, a cui essa non appaia ferma.

Tutto ciò premesso, il ds^2 einsteiniano relativo ai nostri universi può essere assunto nell'aspetto particolarmente semplice

$$(I) \quad ds^2 = V^2 dx_0^2 - H^2 d\ell_0^2,$$

dove si è posto $d\ell_0^2 = \sum_i dx_i^2$, e V, H sono funzioni soltanto di x_0 e del raggio vettore ρ .

3. *Espressioni delle componenti del tensore energetico.* — Per poter scrivere queste espressioni, premettiamo alcune precisazioni sopra il mezzo che si suppone riempire i nostri modelli cosmologici.

Questi modelli vogliono rappresentare le condizioni meccaniche medie dell'universo. Come abbiamo detto, essi sono ottenuti dall'universo reale attribuendo ad ogni regione attorno ad una galassia la materia di questa, distribuita uniformemente e dotata della velocità media della galassia stessa. Ora, così facendo, si viene a prescindere dalle deviazioni di ciascuna galassia dal proprio moto medio, mentre, *a priori*, non è possibile trascurare, senza allontanarsi dall'universo reale, il contributo agli sforzi cinetici che proviene da questi movimenti di agitazione. Per tenerne conto, si suole attribuire al mezzo che riempie i modelli una pressione p_m , conveniente funzione di x_0 e ρ , che va addizionata alla effettiva pressione di radiazione p_s . Se supponiamo che questa, in ogni punto, si eserciti ugualmente in tutte le direzioni, allora si può ritenere che il mezzo in considerazione si comporti

(1) Cfr., per es., W. DE SITTER, *On the foundations of the theory of relativity, with special reference to the theory of the expanding universe.* «Proc. R. Acad. Sci.», Amsterdam, vol. 37, n. 9, 1934.

(2) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, op. cit., cap. I, § 17.

come un fluido perfetto (cioè incapace di trasmettere sforzi di taglio) di pressione totale $p = p_m + p_s$.

In corrispondenza ⁽¹⁾, possiamo assumere come determinazione tensoriale delle T_{ik}

$$(2) \quad T_{ik} = \epsilon \lambda_i \lambda_k - p g_{ik},$$

dove ϵ denota la densità di energia intrinseca e le λ i momenti della linea oraria del generico elemento materiale.

Stante la completa simmetria attorno all'origine O, basterà che ci occupiamo dei punti di uno solo dei raggi uscenti da O, ad es. dei punti dell'asse x_1 , cioè di coordinate $x_1 = \rho$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. In tali punti si annullano i parametri λ^2, λ^3 della linea oraria del generico elemento di materia; ne segue per i momenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, in base a $\lambda_i = \sum_0^3 g_{ij} \lambda^j$,

$$(3) \quad \lambda_1 = -H^2 \lambda^1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

e per il momento λ_0 , dalla relazione $\sum_0^3 g^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1$,

$$(4) \quad \frac{\lambda_0^2}{V^2} - \frac{\lambda_1^2}{H^2} = 1.$$

Ciò tenendo presente, la (2) dà

$$(5) \quad \begin{cases} T_{11} = \epsilon \lambda_1^2 + H^2 p & , \quad T_{22} = T_{33} = H^2 p, \\ T_{ik} = 0 & \text{se } i \neq 0, \quad k \neq 0, \quad i \neq k; \end{cases}$$

e per le T_{ik} con qualche indice eguale a zero

$$(6) \quad \begin{cases} T_{00} = \epsilon \lambda_0^2 - V^2 p = V^2 (\epsilon - p) + \epsilon \lambda_1^2 \frac{V^2}{H^2}, \\ T_{01} = \epsilon \lambda_0 \lambda_1, \quad T_{02} = T_{03} = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo infine anche l'invariante lineare del tensore energetico:

$$(7) \quad T = \sum_0^3 g^{ik} T_{ik} = \epsilon \sum_0^3 g^{ik} \lambda_i \lambda_k - p \sum_0^3 g^{ik} g_{ik} = \epsilon - 4p.$$

4. *Forma delle equazioni gravitazionali.* — Le equazioni generali di Einstein sono (con il ben noto significato dei simboli)

$$(8) \quad G_{ik} - \lambda g_{ik} + \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

(1) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, op. cit., pp. 79-80.

La loro applicazione al nostro caso particolare richiede il calcolo preventivo delle componenti dei due tensori G_{ik} e T_{ik} . Ora, le espressioni esplicite delle G_{ik} le abbiamo date in una precedente Nota ⁽¹⁾; e, per quanto riguarda il tensore energetico, ci sono le relazioni (5), (6), (7) sopra stabilite. Usufruéndo di questi risultati, le dieci equazioni (8) ci forniscono per i nostri universi le seguenti quattro equazioni (le altre sei si riducono ad identità o coincidono con una di queste):

$$(9) \quad 2 \left(\frac{H'}{H} - \frac{H^2}{H^2} + \frac{H'}{H\rho} \right) + \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V'}{H} \right) - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right) + \\ + H^2 \left(\lambda - \kappa p + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) + \kappa \varepsilon \lambda_1^2 = 0,$$

$$(10) \quad \frac{H''}{H} + 3 \frac{H'}{H\rho} + \frac{V'}{V\rho} + \frac{H'V'}{HV} - 2 \frac{\dot{H}^2}{V^2} - \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right) + \\ + H^2 \left(\lambda - \kappa p + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) = 0,$$

$$(11) \quad \frac{V''}{V} + \frac{H'V'}{HV} + 2 \frac{V'}{V\rho} - 3 \frac{H}{V} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\dot{H}}{V} \right) + \\ + H^2 \left(\lambda - \kappa p - \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) - \kappa \varepsilon \lambda_1^2 = 0,$$

$$(12) \quad 2 \left(\frac{\dot{H}'}{H} - \frac{\dot{H}V'}{HV} - \frac{H'\dot{H}}{H^2} \right) + \kappa \varepsilon \lambda_0 \lambda_1 = 0,$$

dove gli apici denotano derivazione rispetto a ρ ed i punti derivazione rispetto ad x_0 .

Si tratta di un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali del 2° ordine nelle cinque funzioni incognite $H, V, \varepsilon, p, \lambda_1$ di x_0 e ρ (λ_0 non è un'ulteriore funzione incognita, perchè è legata a λ_1 dalla (4)). Il loro aspetto è piuttosto complesso. Mostrerò tuttavia in una prossima Nota che, nel caso particolare considerato dal Tolman, a cui ho accennato nell'introduzione, esse si semplificano notevolmente e ci permettono di stabilire un interessante risultato.

(1) C. TOLOTTI, *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6°, vol. XXI, 1° sem. 1935, pp. 326-332.

Meccanica. — *Centri di gravitazione e corpi centrobarici.*
Nota di A. FENICI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un articolo di prossima pubblicazione ⁽²⁾ il chiar.^{mo} prof. Levi-Civita ha chiamato *centro di gravitazione* di un corpo generico ogni punto in cui si annulla il risultante delle attrazioni newtoniane dei singoli elementi del corpo. Mi permetto di indicare qui alcune proprietà dei detti centri, cominciando naturalmente col dimostrarne l'esistenza.

Sono stato così anche condotto a riprendere la nozione dovuta a Lord Kelvin ⁽³⁾, di *corpo centrobarico*, riconoscendo che, se un corpo è centrobarico, non soltanto nel campo esterno, ma anche nei punti interni, esso è necessariamente limitato da superficie sferiche concentriche, e non può quindi essere altro che una sfera, se a contorno unico.

CENTRI DI GRAVITAZIONE.

Definiamo *centro di gravitazione* di un corpo C continuo ogni punto in cui si equilibrano le attrazioni newtoniane di C.

Cominciamo col dimostrare che per ogni corpo C esiste almeno un centro di gravitazione. Per fare ciò consideriamo l'espressione del potenziale U in un punto qualsiasi P. Sia r la distanza di P dal generico elemento potenziale dC del corpo; se dm è la massa dell'elemento, e μ la densità, si ha:

$$U = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{\mu dC}{r}.$$

Supponiamo che il corpo sia tutto a distanza finita, il che porta come conseguenza che U si annulla all'infinito, essendo del resto dovunque positivo, finito e continuo (assieme alle sue derivate prime). È quindi sempre possibile assegnare un numero positivo L tale che risulti:

$$U < L.$$

Sotto tali condizioni, esiste almeno un punto N (a distanza finita) in cui U prende il suo valore massimo rispetto a tutti i punti circostanti.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) *Sur le problème relativistique des deux corps*, che apparirà quanto prima nell'«Enseignement Mathématique», année XXXIII, 1935.

(3) Cfr. KELVIN e TAIT, *A Treatise on natural philosophy* (Ediz. stereotipica), vol. II, articoli 534, 535.

Quivi necessariamente si annullano le derivate di U , ossia le componenti dell'attrazione; quindi N (o, per essere più precisi, ognuno di questi punti N) è centro di gravitazione.

Abbiamo detto « ognuno di questi punti » perchè è facile rendersi conto che esistono corpi i quali ne ammettono addirittura infiniti. Infatti, se si considera una crosta sferica o un omeoide omogenei, si sa che per ogni punto compreso nella parte cava dell'una o dell'altro, le forze attrattive sono nulle; detti punti, essendo di equilibrio, sono necessariamente altrettanti centri di gravitazione.

Del resto esistono anche sistemi dotati di un numero finito di centri di gravitazione. Eccone un esempio gentilmente suggeritomi dal prof. Sobrero.

Consideriamo due sfere S ed S' aventi i centri O ed O' , i raggi r ed r' e le masse m ed m' rispettivamente. È chiaro, per ragioni di simmetria, che nei punti della retta dei centri, l'attrazione complessiva delle due sfere ha la direzione di OO' .

Dico che (soddisfatta una certa disuguaglianza) vi sono sulla OO' tre punti: N, N', N'' in cui le attrazioni newtoniane si annullano, e che sono perciò centri di gravitazione.

Infatti, indichiamo con a la minima distanza fra le sfere; e, sulla OO' , siano A e A' i due punti estremi di a . L'attrazione che si esercita in un generico punto N compreso fra O ed A , computata positivamente verso O' , è data da-

$$(1) \quad F = \frac{fm'}{(a+r+r'-\rho)^2} - \frac{fmp}{r^3}$$

ρ designando la distanza ON .

Supponiamo di far coincidere successivamente N con O e con A (ossia di assumere una volta $\rho = 0$ e un'altra $\rho = r$). In O la (1) ci dà $F > 0$, in A risulta:

$$(2) \quad F = f \left\{ \frac{m'}{(a+r')^2} - \frac{m}{r^2} \right\}.$$

Qualora

$$\frac{m'}{(a+r')^2} \leq \frac{m}{r^2}$$

ovvero

$$(3) \quad a \geq \sqrt{\frac{m'}{m}} \left\{ r - \sqrt{\frac{m}{m'}} r' \right\}$$

il secondo membro della (2) risulta negativo. Per ragioni di continuità esiste necessariamente un punto N , fra O e A , in cui $F = 0$. Ecco un primo centro di gravitazione interno ad S . Ragionando in modo analogo si riconosce che la stessa disuguaglianza (3) assicura l'esistenza di un secondo centro di attrazione N' interno ad S' .

Inoltre risultando di segno opposto i valori delle attrazioni in A e A' deve necessariamente esistere fra A ed A' un punto N'' in cui è ancora nulla la risultante di tali attrazioni e quindi un terzo centro di gravitazione.

Cerchiamo ora di stabilire quali delle proprietà classiche del baricentro siano estensibili ai punti N.

a) Cominciamo dalla *ubicazione* e dimostriamo che:

I. Nessun centro di gravitazione può essere esterno al corpo potenziale C. Infatti il potenziale U è armonico nel campo esterno a C; quindi non ammette massimi (nè minimi) in tale campo: i suoi valori estremi cadono all'infinito (dove U tende ad assumere il valore minimo zero), e sul contorno σ di C. Naturalmente non è detto che questi valori estremi rispetto al campo esterno, e in particolare, il valore massimo assunto su σ , sia massimo anche rispetto ai valori nei punti interni. Anzi ciò si può senz'altro escludere in un caso importante e precisamente si ha ch :

II. Per qualsiasi corpo *convesso* il centro di gravitazione (o diciamo meglio ogni eventuale centro di gravitazione)   interno ad esso.

Infatti consideriamo un qualunque piano tangente del corpo; nel punto di contatto la risultante di tutte le attrazioni del corpo   manifestamente volta verso l'interno, con che intendiamo dalla banda del piano in cui (per l'ipotesi della convessit ) giace interamente il corpo; sicch  non tutte le derivate di U si annullano nei punti del contorno σ di C.   perci  escluso che il massimo di U possa cadere su σ . Fuori non  , per quanto precede, dunque sta dentro.

Se il corpo convesso   anche *omogeneo*, sembra assai probabile che esso ammetta *un solo* centro di gravitazione. Finora non sono per  riuscito a dimostrarlo.

b) La propriet  *distributiva* del baricentro non sembra, in generale, estensibile al punto N.

c) Propriet  di *simmetria*. Supponiamo che il corpo in esame possenga un piano di simmetria che noi assumeremo come piano $z = 0$. Consideriamo le funzione U in due punti qualsivogliano $Q(x, y, z)$, $Q'(x, y, -z)$ simmetrici rispetto a detto piano.

Per la simmetria del corpo deve riuscire:

$$U(x, y, z) = U(x, y, -z)$$

donde derivando ambo i membri rapporto a z

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = - \frac{\partial U(x, y, -z)}{\partial z}$$

Ponendo in particolare $z = 0$, cio  considerando un generico punto Q del piano di simmetria, si ha, in quanto $Q(x, y, 0)$ coincide allora col suo

simmetrico Q' :

$$\frac{\partial U_Q}{\partial \tilde{\alpha}} = - \frac{\partial U_Q}{\partial \tilde{\alpha}}$$

donde

$$\frac{\partial U_Q}{\partial \tilde{\alpha}} = 0.$$

Perciò nei punti Q del piano di simmetria l'attrazione è sempre contenuta nel piano stesso, come è intuitivo. Consideriamo ora il potenziale U_Q come funzione dei punti di detto piano; poichè la U_Q è positiva, finita e continua ovunque e nulla all'infinito, esisterà come abbiamo visto, almeno un punto N in cui assumerà il suo valore massimo, in tale punto si annullano necessariamente tutte e tre le derivate della U . Esso è dunque centro di gravitazione. Con che resta dimostrato l'asserto.

CORPI CENTROBARICI.

Dicesi corpo centrobarico ogni corpo tale che la sua attrazione sopra un qualsiasi punto passi sempre per un punto fisso nel corpo: il suo centro di gravitazione.

Dello studio delle proprietà di tali corpi cominciò ad interessarsi Lord Kelvin, che pervenne a stabilire questo importante teorema riguardante i corpi non omogenei: « Un corpo *non* centrobarico può rendersi tale per i punti *esterni* con l'aggiunta di un opportuno strato superficiale di materia ».

Alla teoria dei corpi centrobarici (relativamente ai punti esterni) si collegano come caso particolare le ricerche di Pizzetti⁽¹⁾ e di Lauricella⁽²⁾ sui corpi che esercitano addirittura attrazione nulla nei punti esterni. Il Pizzetti ha rilevato importanti proprietà concernenti la distribuzione di massa di questi corpi, e il Lauricella ha caratterizzato analiticamente la più generale espressione della loro densità.

Dopo questo breve cenno storico ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

« Di tutti i corpi le sfere sono i soli *completamente* centrobarici ». Infatti consideriamo un corpo centrobarico S rispetto ad un punto O . In primo luogo osserviamo che O è necessariamente centro di gravitazione. Invero, qualora non lo fosse, il vettore grad. U sarebbe diverso da zero in O , possedendovi una direzione ben determinata. Sia p la retta uscente da O in questa direzione e P un punto vicinissimo ad O nel piano perpendicolare a p in O . In questo punto P la direzione di grad. U dovrebbe essere vicinissima a p (quasi parallela) e non perpendicolare a p , come

(1) « Rend. dei Lincei », anno 1909, 1° sem., pp. 211 e sgg.: *Corpi equivalenti rispetto all'attrazione newtoniana esterna.*

(2) « Rend. dei Lincei », anno 1911, 1° sem., pp. 99 e sgg.

invece sarebbe necessario affinchè passasse per O. Dunque se il corpo è centrobarico di centro O, questo punto è certo un suo centro di gravitazione. Fissiamo un sistema di assi cartesiani $Oxyz$ e sia $U(P) = U(xyz)$ il potenziale dell'attrazione di S nel punto P con che il vettore che rappresenta l'attrazione newtoniana di S su P ha per componenti $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial z}$, cioè esso è proprio $\text{grad. } U$.

Essendo partiti dall'ipotesi che S sia centrobarico rispetto ad O, si ha che $\text{grad. } U$ deve sempre passare per O, ciò che si traduce vettorialmente nell'eguaglianza:

$$(1) \quad \text{grad. } U = -K(P)(P - O)$$

con K scalare, *a priori* indeterminato, che dipende in generale dal posto.

Moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (1) per dP ; essendo dP uno spostamento completamente arbitrario del punto generico P. Si ha:

$$\text{grad. } U \times dP = -K(P)(P - O) \times dP,$$

o, ciò che è lo stesso,

$$(2) \quad dU = -K(xdx + ydy + zdz) = -K\rho d\rho,$$

avendo posto

$$(3) \quad \rho^2 = (P - O)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Riferiamoci per un momento a coordinate polari ρ, θ, φ ; dalla (2) discende immediatamente l'indipendenza di U dagli argomenti θ e φ ; infatti se incrementiamo comunque θ e φ tenendo costante ρ , si vede subito dalla (3) che:

$$dU = 0$$

ossia che

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi = 0$$

per qualsiasi scelta di $d\theta$ e $d\varphi$. Ciò richiede

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

ovvero U funzione della sola ρ .

Giunti a tal punto giova, per poter andare innanzi, ricordare:

I. Che per tutti i punti esterni ad S riesce (col solito significato dell'operatore Δ_2).

$$\Delta_2 U = 0.$$

II. Che per tutti i punti interni è:

$$\Delta_2 U = -4 \pi \mu,$$

la densità μ , risultando quindi, al pari di U funzione della sola ρ .

Notoriamente è, per una funzione U della sola ρ

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dU}{d\rho} \right).$$

Introduciamo, per semplicità di discussione l'ipotesi restrittiva che il corpo S , supposto centrobarico rispetto ad O , sia limitato da un'unica superficie σ , e che ogni raggio vettore, spiccato da O , attraversi σ una sola volta. Nei punti esterni a σ è $\Delta_2 U = 0$.

Integrando, radialmente, da un punto generico, cioè da un ρ generico fino all'infinito, si ha, in base alla (4)

$$(5) \quad \frac{dU}{d\rho} = - \frac{m'}{\rho^2}$$

m' designando una costante.

Nei punti interni si ha invece, dalla richiamata formula di Poisson

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dU}{d\rho} \right) = -4 \pi \mu,$$

donde, integrando da $\rho = 0$ (cioè da o) fino ad un ρ generico (non al di là dell'intersezione del raggio vettore colla superficie σ)

$$(6) \quad \frac{dU}{d\rho} = - \frac{m}{\rho^2}$$

dove si è posto per brevità

$$(7) \quad m = 4 \pi \int_0^\rho \mu \rho^2 d\rho.$$

Siccome $\frac{dU}{d\rho}$ si mantiene continua anche quando si attraversa il contorno σ , le sue determinazioni (5) e (6) dovranno coincidere in ogni punto A di σ .

Ciò implica $m = m'$, ossia, per il raggio vettore di ogni punto A , la condizione

$$\int_0^\rho \mu \rho^2 d\rho = \text{cost.}$$

e quindi $\rho = \text{cost.}$, c. d. d.

Meccanica. — *Sur une propriété de l'opérateur H de M. de Broglie.* Nota di R. L. GOMES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans notre dernière Note ⁽²⁾ nous avons déduit la relation ⁽³⁾

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + (2\mu_0)^2 c^2$$

qui relie entre elles l'énergie E et la quantité de mouvement p correspondantes à une onde plane:

$$\Phi = ae^{i[Et - p(\alpha x + \beta y + \gamma z)]}.$$

À présent nous nous proposons d'en donner une déduction tout à fait générale.

Pour cela, remarquons tout premièrement que l'opérateur H de l'équation de M. de Broglie (dans sa forme schrödingerienne) s'écrit ainsi

$$H = H_1 + H_2$$

avec

$$H_1 = \frac{c}{2} [\alpha_1 \times 1 p_x + \alpha_2 \times 1 p_y + \alpha_3 \times 1 p_z - 2\mu_0 c \alpha_4 \times 1]$$

$$H_2 = \frac{c}{2} [1 \times \alpha_1 p_x - 1 \times \alpha_2 p_y + 1 \times \alpha_3 p_z + 2\mu_0 c 1 \times \alpha_4].$$

Or, en faisant

$$\mathcal{H} = c\alpha_1 p_x + c\alpha_2 p_y + c\alpha_3 p_z - m_0 c^2 2_4 \quad ; \quad m_0 = 2\mu_0$$

et en remarquant que des quatre matrices de Dirac $\alpha_i - \alpha_4$ c'est la seule qui change de signal avec l'unité imaginaire i , il vient

$$H_1 = \frac{1}{2} \mathcal{H} \times 1 \quad ; \quad H_2 = -\frac{1}{2} 1 \times \mathcal{H}.$$

On représente par $\mathcal{H}$ l'opérateur conjugué de $\mathcal{H}$ qui est ni plus ni moins que l'opérateur de Dirac pour une particule matérielle de masse $m_0 = 2\mu_0$.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XXI, ser. 6°, fasc. 6, p. 443.

(3) Voir M. de BROGLIE, *Una nouvelle Conception de la Lumière*, p. 41, en note.

L'opérateur H prend donc le forme

$$H = \frac{1}{2} (\mathcal{H} \times 1 + 1 \times \bar{\mathcal{H}}).$$

En élevant $\mathcal{H}$ et $\bar{\mathcal{H}}$ au carré il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \mathcal{H}^2 = c^2 [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2] \\ &= c^2 \left[m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right], \end{aligned}$$

vu les propriétés bien connues des matrices α_i .

En procédant de même avec l'opérateur H , nous obtenons :

$$H^2 = \frac{1}{4} (\mathcal{H}^2 \times 1 + 1 \times \bar{\mathcal{H}}^2 + 2 \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}})$$

$$H^2 = \left[c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) - \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} \right]$$

et en répétant le carré :

$$H^4 = \frac{1}{4} \left[c^4 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right)^2 + \mathcal{H} \times \mathcal{H}^2 + 2 \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) \right]$$

ou encore

$$H^4 = \frac{1}{2} c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) \left[c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) - \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} \right]$$

$$(2) \quad H^4 = c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) H^2.$$

Cette équation nous montre que le double carré de l'opérateur de M. de Broglie est égal au produit du carré du même opérateur par le carré de l'opérateur de Dirac.

Et à présent la relation (1) s'ensuit presque immédiatement.

En effet, Φ étant un état fondamental de H , c'est à dire se vérifiant l'égalité

$$H \Phi = E \Phi,$$

l'équation (2) nous donne

$$E^2 \Phi = c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4 \pi^2} \Delta \right) E^2 \Phi$$

d'où

$$E = 0,$$

ou bien

$$E^2 \Phi = c^2 \left(m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \Delta \right) \Phi$$

$$E^2 \Phi = c^2 (m_0^2 c^2 + p^2) \Phi$$

$$\frac{E^2}{c^2} \Phi = p^2 \Phi + (2\mu_0)^2 c^2 \Phi,$$

avec

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Φ est donc aussi une fonction fondamentale de l'opérateur p^2 .

Si nous représentons ses valeurs fondamentales par la même lettre il vient finalement

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + (2\mu_0)^2 c^2.$$

Meccanica. — *La determinazione dei carichi critici per mezzo del principio dei lavori virtuali.* Nota di O. ZANABONI, presentata⁽¹⁾ dal Corresp. P. BURGATTI.

È noto che, nell'equilibrio elastico, possono aver luogo dei casi di instabilità che si manifestano comunemente, come per i solidi caricati di punta, mediante spostamenti, non prevedibili in base all'ordinaria teoria, che hanno luogo improvvisamente non appena i carichi agenti superano determinati valori cui si dà il nome di « critici ».

La conoscenza dei carichi critici per i vari problemi concreti è dunque di importanza fondamentale in quanto, dal loro confronto colle intensità dei carichi effettivamente agenti, si ha la possibilità immediata di classificare le condizioni di equilibrio del corpo tra quelle stabili o tra quelle instabili.

Se invece le forze applicate assumono esattamente il valore critico, si stabilisce la condizione intermedia di equilibrio indifferente.

Non mi risulta che sia mai stato osservato che, in tali condizioni una qualsiasi tra le configurazioni ancora equilibrate che sussistono accanto alla configurazione normale del corpo, gode delle stesse proprietà generali in virtù delle quali è resa possibile l'applicazione del principio dei lavori virtuali alle deformate elastiche ordinarie.

Il presente lavoro è dedicato agli sviluppi che derivano da tale osservazione, e mostrerà come i procedimenti che sono di uso comune per la determinazione di una incognita iperstatica ordinaria, valgano integralmente per la ricerca dei carichi critici.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

In effetto sotto l'azione di questi, oltre alla deformata elastica deducibile secondo la normale teoria (che chiameremo configurazione normale o principale), il corpo può disporsi secondo infinite altre configurazioni (secondarie) infinitamente vicine alla precedente, per le quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. Di possedere la stessa energia potenziale totale della forma normale.
2. Di rispettare la continuità del corpo e le condizioni di vincolo: cioè di essere congruenti.
3. Di essere soggette ad un sistema di tensioni interne che si equilibrano coi carichi critici applicati, e con le reazioni dei vincoli.
4. Di differire di infinitamente poco dalla configurazione del corpo scarico.

Tali proprietà sono quelle stesse che si richiedono per potere istituire una qualunque equazione dei lavori virtuali, e perciò resta senz'altro stabilita la possibilità di valersi di tale principio per i casi che ci interessano.

Supponiamo ora di avere una struttura prevalentemente estesa in senso lineare, od in senso superficiale, in modo da poterla sostituire col suo asse geometrico o colla sua superficie media, e supponiamo inoltre di applicare gradatamente i carichi fino a far loro raggiungere l'intensità critica.

Al termine dell'operazione rileveremo in ogni punto dell'asse, o della superficie media, delle deformazioni elastiche interne s , e degli spostamenti esterni espressi da un vettore $\bar{a}$.

A questo punto, senza più variare i carichi, è consentito passare ad una configurazione secondaria, e ciò potrà soltanto avvenire applicando una variazione a s ed $\bar{a}$, per modo che, in totale, le deformazioni e gli spostamenti risulteranno rispettivamente uguali ad $s + \delta s$, $\bar{a} + \delta \bar{a}$.

Come è stato osservato, questi costituiscono un sistema atto ad essere introdotto in un'equazione dei lavori virtuali, e perciò, applicato al corpo o ad una sua struttura principale un sistema di forze $\bar{F}$ che non diano luogo ad equilibrio instabile e cui compete un'azione interna S'_0 , potremo scrivere:

$$\Sigma S'_0(s + \delta s) = \Sigma \bar{F} \times (\bar{a} + \delta \bar{a})$$

dove, tanto le sommatorie quanto la S'_0 , si intendono riferite alla configurazione secondaria presa in esame.

Se però S_0 è l'azione interna dovuta alle $\bar{F}$ nella forma normale del corpo, potremo scrivere:

$$S'_0 = S_0 + \delta S_0$$

e notare che la S'_0 e la S_0 equilibrano entrambi le F (in quanto, per l'ipotesi che queste ultime si trovino in equilibrio stabile, lo spostamento infinitesimo che esse hanno subito nel passaggio tra le due configurazioni contigue di equilibrio, non ha alcuna influenza), cosicchè le δS_0 rappresentano di per sè un sistema equilibrato.

Il loro lavoro virtuale $\Sigma (s + \delta s) \delta S_0$ è perciò nullo, e l'equazione posta più sopra si riduce a:

$$\Sigma (s + \delta s) S_0 = \Sigma \bar{F} \times (\bar{a} + \delta \bar{a}).$$

Tra le sommatorie che qui compaiono, e le analoghe estese alla configurazione principale, intercorre una differenza che si dimostra facilmente essere espressa da termini infinitesimi del 3° ordine o di ordine superiore, e perciò trascurabili in confronto dei termini infinitesimi del 1° e 2° ordine coi quali abbiamo a che fare; talchè, in definitiva, la relazione posta, sia nelle sommatorie che nei termini $\bar{F}$ ed S_0 , si deve intendere riferita alla forma normale.

Essendo quest'ultima una configurazione equilibrata, si ha:

$$\Sigma s S_0 = \Sigma \bar{F} \times \bar{a}$$

e quindi si deduce la:

$$(1) \quad \Sigma S_0 \delta s = \Sigma \bar{F} \times \delta \bar{a}$$

che è l'equazione dei lavori virtuali per la condizione di equilibrio indifferente.

Nella (1) non compaiono ancora i carichi critici P_{cr} , che devonsi invece considerare essendo essi le incognite del problema che stiamo trattando.

Notiamo allora che nella configurazione principale, per la legge di proporzionalità, le deformazioni s implicano l'esistenza di un sistema di tensioni interne S , tali che:

$$s = \rho S$$

dove ρ è un coefficiente, noto in base alle caratteristiche fisiche e geometriche della struttura, ed indipendente dai carichi e dalle deformazioni.

Nella configurazione secondaria, per effetto delle deformazioni $s + \delta s$, si avranno allora le tensioni $S + \delta S = \frac{1}{\rho} (s + \delta s)$; cosicchè si ha:

$$\delta s = \rho \delta S.$$

Se ora ripetiamo daccapo la deduzione della (1) sostituendo le tensioni interne in funzione delle rispettive deformazioni, troveremo l'equazione:

$$\Sigma \rho (S + \delta S) S_0 = \Sigma \bar{F} \times (\bar{a} + \delta \bar{a})$$

che è quella stessa che si dovrebbe porre se si volesse dedurre l'azione interna in una struttura caricata dalle forze P_{cr} , e la cui forma naturale fosse la configurazione secondaria di equilibrio.

Inversamente allora, supposta nota quest'ultima, si potrà ricavare mediante i procedimenti ordinari la $S + \delta S$, ed in seguito la δS , poichè è pure immediatamente determinabile la S .

La (1) diventa dunque:

$$(2) \quad \Sigma p \delta S \cdot S_0 = \Sigma F \times \delta \bar{a}$$

dove le incognite P_{cr} sono implicitamente contenute in δS .

Notiamo ora che tra i dati del problema vi è indubbiamente la forma del diagramma di carico, vale a dire è nota la relazione che lega ciascuna delle forze che lo compongono ad una determinata di esse.

Quest'ultima rimane allora l'unica incognita del problema, e comparirà linearmente nella (2) che si dimostra così atta alla ricerca dei valori critici dei carichi.

Chiamato ora con m un parametro arbitrario, è evidente che tutte le deduzioni svolte restano valide anche per la deformata che si ottiene applicando alla configurazione normale di equilibrio le deformazioni e gli spostamenti $m\delta s$, $m\delta \bar{a}$.

Tale deformata è quindi essa stessa una configurazione secondaria di equilibrio.

Se di queste ne esistono varie tra di loro indipendenti, una qualsiasi combinazione lineare dei relativi δs e $\delta \bar{a}$ darà luogo ad una deformata che è ancora una forma secondaria di equilibrio.

Inversamente, la configurazione equilibrata più generale è la combinazione lineare di configurazioni tra loro indipendenti.

Poichè è chiaro che il valore di P_{cr} non deve dipendere da quello dei parametri arbitrari, potremo annullarli tutti tranne uno che si pone uguale all'unità.

In tal modo si ha che è possibile procedere alla considerazione di una sola configurazione secondaria, a piacimento, ed indipendentemente da qualsiasi parametro.

Siccome poi in quest'ultimo è sempre possibile conglobare l'infinitesimo principale, ne deriva che tutto il calcolo può essere svolto in termini finiti.

La forma normale del corpo corrisponde evidentemente all'annullarsi contemporaneo di tutti i parametri arbitrari.

Ora, e contrariamente a quanto fu ammesso in principio circa al fatto che il sistema delle forze F , applicato al corpo o ad una sua struttura principale, dia luogo unicamente ad equilibrio stabile, assumiamo le F coincidenti coi carichi critici.

È chiaro che in tal caso il lavoro virtuale, espresso dalla (1), che si compie nel passaggio dalla configurazione principale ad una secondaria di equilibrio, si trasforma in un lavoro effettivo.

Il lavoro interno sarà dato dalla tensione interna aggiuntiva δS per lo spostamento δs : poichè queste quantità sono tra loro proporzionali, si ottiene $\Sigma \frac{1}{2} \delta S \cdot \delta s$.

Il lavoro esterno, tenuto presente che i carichi non variano, è espresso da $\Sigma P_{cr} \eta$, quando si chiamino con η gli spostamenti aggiuntivi dei punti di applicazione delle forze P_{cr} lungo la propria linea di azione.

L'equazione diventa dunque:

$$(3) \quad \Sigma \frac{1}{2} \delta S \cdot \delta s = \Sigma P_{cr} \eta.$$

Essa esprime il noto criterio energetico del Brian, che si riconduce quindi ad un caso particolare della trattazione del presente.

Tutti gli sviluppi sin qui svolti mostrano la possibilità di dedurre i carichi critici col principio dei lavori virtuali, cogli stessi procedimenti coi quali si determinerebbe una comune incognita iperstatica, sotto la condizione di conoscere *a priori* la configurazione secondaria di equilibrio.

Ciò però non si verifica per la quasi totalità dei casi, per i quali una simile ricerca riesce oltremodo difficoltosa se non impossibile.

Si ricorre allora a procedimenti di successiva approssimazione, i quali d'altronde, non ponendo alcun limite teorico a quest'ultima, possono classificarsi tra i metodi esatti.

Questo concetto è già stato seguito dal Timochenko che lo ha applicato all'equazione (3), sostituendo alla configurazione secondaria esatta di equilibrio, una configurazione arbitraria poco differente.

In questa è possibile dedurre sia il lavoro di deformazione, sia gli spostamenti lungo i carichi dati, che sono intervenuti nel passaggio presupposto tra la configurazione principale del corpo e quella secondaria arbitraria.

Ponendo che sia ancora valida la (3), cioè:

Lavoro di deformazione = $\Sigma P_{cr} \eta$, si ha la possibilità di dedurre un valore approssimato di P_{cr} .

I valori che si ricavano con simile procedimento, per il principio della minima energia potenziale totale, risultano sempre maggiori del valore esatto, il quale è quindi un minimo rispetto ai precedenti.

Questo fa sì che il metodo riesca grandemente approssimato e che, assegnando la configurazione arbitraria per mezzo di parametri indeterminati q , e ponendo le condizioni:

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial q} = 0$$

sia possibile avvicinarsi a piacimento al valore esatto.

L'unico inconveniente che si riscontra, è la difficoltà di dedurre gli spostamenti η , dato che, come è noto, essi sono gli infinitesimi di 2° ordine.

In modo analogo si può impiegare la (1) per la ricerca approssimata dei carichi critici.

Assunta una deformata arbitraria simile alla configurazione secondaria di equilibrio, e fissato il sistema di forze ausiliarie $\bar{F}$, si deducono i termini δs , $\delta \bar{a}$, S_0 , e si ha quindi l'equazione, ancora esatta:

$$\Sigma S_0 \delta s = \Sigma \bar{F} \times \delta \bar{a}$$

od anche, pensando che alla δs deve corrispondere la tensione $\rho \delta S$:

$$\Sigma \rho S_0 \delta S = \Sigma \bar{F} \times \delta \bar{a}.$$

Ora se, come nel caso esatto, deduciamo δS in funzione dei carichi applicati supposti agenti sulla configurazione arbitraria, l'equazione precedente verrà a contenere l'incognita, è quindi a determinarla.

È chiaro che i valori di P_{cr} che così si ricavano non sono più in tale relazione col valore esatto, da potersi enunciare ancora il principio di minimo citato per procedimento del Timochenko.

Il nuovo metodo può perciò riuscire meno approssimato del precedente, ma è di più comoda applicazione non rendendosi necessaria la ricerca di spostamenti infinitesimi di ordine superiore.

Anche in questo caso tuttavia è possibile procedere per successive approssimazioni, senza alcun limite teorico circa il numero di esse.

Il metodo da seguirsi a questo effetto, scaturisce immediatamente dall'osservazione di quanto deve verificarsi nel caso esatto.

In esso si avrà che il valore dei carichi critici risulterà indipendente dal sistema di forze $\bar{F}$ ausiliarie assunte, e ciò nonostante la diversità delle equazioni dei lavori virtuali cui esse danno luogo.

Nel caso approssimato si potrà dare allora la deformata arbitraria per mezzo di parametri, che si determineranno imponendo la condizione che i carichi critici che si ricavano assumendo un congruo numero di diversi sistemi $\bar{F}$, siano tra loro uguali.

Se il corpo è continuo, questo criterio può assumere una forma differenziale.

Supposto infatti che $\bar{F}$ si un'unica forza unitaria, che supponiamo di poter trasportare parallelamente a sè stessa ad applicarsi nei vari punti della struttura, l'equazione risolvente assume, come abbiamo visto, forma lineare, e quindi sarà del tipo:

$$(4) \quad H P_{cr} = L.$$

Dove H e L sono funzioni del punto di applicazione di $\bar{F}$.

Questo non deve accadere per P_{cr} che è indipendente da qualsiasi riferimento, cioè che è di valore costante anche se portiamo $\bar{F}$ nei punti infinitamente vicini a quello di partenza.

Ciò richiede che sia:

$$(5) \quad H' P_{cr} = L' \quad H'' P_{cr} = L'' \dots H^{(n)} P_{cr} = L^{(n)} \dots$$

dove coll'apice si sono indicate le derivate, ordinarie o parziali a seconda dei casi, rispetto alle coordinate che individuano il punto del corpo.

Con un diverso orientamento della $\bar{F}$, la conclusione sarebbe stata formalmente identica alla precedente, e, per il verificarsi contemporaneo delle equazioni iniziali:

$$H P_{cr} = L \quad H_1 P_{cr} = L_1$$

le stesse condizioni si riconoscono essere identiche anche sostanzialmente.

Il sistema più generale di forze ausiliarie, risulta dalla combinazione lineare di vari sistemi del tipo considerato, e vale dunque anche per esso la condizione alle derivate.

Nel caso approssimato basterà imporre la (4) e le (5) in numero sufficiente, per poter così determinare i parametri che definiscono la configurazione approssimata più vicina alla esatta.

Merita una speciale considerazione lo sviluppo che si ottiene assumendo come forze $\bar{F}$ quelle stesse che, supposte agenti sul corpo, sono capaci di deformarlo secondo la configurazione che si assume in via approssimativa in luogo di quella esatta.

In questo caso i $\delta \bar{a}$ sono gli spostamenti effettivi dovuti alle $\bar{F}$, ed allora il termine $\Sigma \bar{F} \times \delta \bar{a}$ è il doppio del lavoro esterno di deformazione che si è verificato nel corpo per portarlo nella configurazione arbitraria.

Siccome questa è equilibrata, esso è anche uguale al doppio del lavoro interno.

Il termine $\Sigma \rho S_0 \cdot \delta S$ dell'equazione approssimata, è proporzionale al lavoro interno che, in seguito alle deformazioni ρS_0 dovute alle $\bar{F}$, viene a compiersi da parte delle tensioni interne relative ai P_{cr} .

L'esistenza delle note relazioni tra P_{cr} , e δS , ci assicura che tale lavoro è uguale a quello esterno compiuto da P_{cr} , cioè a $\Sigma \eta P_{cr}$.

Il coefficiente di proporzionalità è ancora $\frac{1}{2}$, poichè durante lo stabilirsi delle deformazioni ρS_0 , le tensioni δS hanno variato proporzionalmente da 0 al valore finale.

Di conseguenza l'equazione approssimata dei lavori virtuali non differisce in questo caso dalla:

$$\Sigma P_{cr} \eta = \text{lavoro interno}$$

che è l'equazione del metodo approssimato del Timochenko.

Ne viene che, così procedendo, si giunge agli stessi risultati di questo, e se ne gode il vantaggio della notevole approssimazione, senza peraltro risentire l'inconveniente della ricerca dei termini infinitesimi del 2° ordine, che, coll'equazione dei lavori virtuali, non compaiono affatto.

Per il raggiungimento di approssimazione via via crescenti, è chiaro che ci si varrà del teorema di minimo più sopra ricordato.

Astronomia. — *Sull'orbita di un terzo corpo invisibile in un sistema binario.* Nota di F. ZAGAR, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. SILVA.

1. In una recente Nota ⁽²⁾ sulla utilizzazione di misure di velocità radiali allo scopo di dedurre l'esistenza e l'orbita di un corpo invisibile C ruotante intorno ad una delle due componenti B od A di un sistema binario, il prof. Nobile afferma che nessun indizio sulla posizione del piano dell'orbita di C intorno a B od A è possibile ottenersi dal solo moto apparente del compagno B intorno ad A, cioè da sole osservazioni visuali che danno, come è noto, la posizione di B rispetto ad A nel solito piano perpendicolare alla visuale diretta ad A.

Invogliato dallo studio di questa Nota, ho ripreso l'interessante problema che già altre volte mi ha occupato, e sono arrivato alla conclusione che, sotto determinate condizioni, che non differiscono essenzialmente da quelle ammesse dal prof. Nobile, si possono ottenere dalle osservazioni anzidette, sempre nella supposizione di C invisibile, non soltanto il piano dell'orbita di questo, ma anche tutti gli altri elementi eccettuato il semiasse maggiore.

Ci riferiremo per semplicità al caso di C ruotante intorno a B. Risulterà però, dalle considerazioni che seguono, il fatto pressochè intuitivo che ad ogni soluzione relativa ad un corpo C invisibile ruotante intorno a B corrisponde pure una soluzione con un corpo C ruotante intorno ad A.

2. Dimosteremo anzitutto che nelle ipotesi che C sia molto vicino a B e che la massa dell'astro principale non sia fortemente preponderante sulla somma delle masse dei due altri corpi, *il moto di B intorno ad A è il moto composto dei due seguenti: moto kepleriano indisturbato del centro di gravità G del sistema BC intorno ad A e moto analogo di B intorno a G.*

Infatti, siano m_1, m_2, m_3 rispettivamente le masse di A, B, C, e siano D, r, Δ , rispettivamente le distanze di B da A, di C da A e di C da B; allora in generale il moto di B intorno ad A e quello di B intorno a C sono definiti dalle seguenti equazioni vettoriali

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», ser. 6^a, vol. XIX, p. 682, 1934.

$$(1) \quad \frac{d^2(B-A)}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_2}{D^3} (B-A) + f m_3 \left\{ \frac{C-B}{\Delta^3} - \frac{C-A}{r^3} \right\}$$

$$(2) \quad \frac{d^2(B-C)}{dt^2} = -f \frac{m_2 + m_3}{\Delta^3} (B-C) + f m_1 \left\{ -\frac{C-A}{r^3} - \frac{B-A}{D^3} \right\}.$$

Indicata ancora con δ la distanza di B da G, si ha

$$(3) \quad B-C = \frac{m_2 + m_3}{m_3} (B-G), \quad \Delta = \frac{m_2 + m_3}{m_3} \delta,$$

e dalla (2), posto $C-A = (C-B) + (B-A)$, si ottiene facilmente

$$(4) \quad \frac{d^2(B-G)}{dt^2} = -f \frac{m_2 + m_3}{\Delta^3} (B-G) + \\ + f \frac{m_1 m_3}{m_2 + m_3} \left\{ \frac{C-B}{r^3} - (B-A) \left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{r^3} \right) \right\}.$$

Ponendo

$$B-A = Du, \quad C-A = rv, \quad B-G = \delta w, \quad C-B = -\Delta w,$$

con u, v, w , tre vettori unitari, indicando con ψ l'angolo in B del triangolo ABC e trascurando le potenze superiori in $\frac{\Delta}{D}$, si ha

$$r^2 = D^2 + \Delta^2 - 2D\Delta \cos \psi, \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{D^3} \left\{ 1 + 3 \frac{\Delta}{D} \cos \psi + \dots \right\},$$

e, tenendo conto della seconda delle (3), la (4) diventa

$$(5) \quad \frac{d^2(B-G)}{dt^2} = \\ -f \frac{m_3^3}{(m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{\delta^2} \left\{ w + \frac{m_1}{m_2 + m_3} \left(\frac{\Delta}{r} \right)^3 w - 3 \frac{m_1}{m_2 + m_3} \left(\frac{\Delta}{D} \right)^3 \cos \psi u \right\}.$$

Se ora supponiamo il corpo C vicino a B, in maniera che la terza potenza dei rapporti $\frac{\Delta}{r}$, $\frac{\Delta}{D}$ sia trascurabile di fronte all'unità, si riconosce facilmente che nella espressione (5) possono essere abbandonati il secondo e il terzo termine entro la parentesi, purchè le masse siano dello stesso ordine, più precisamente purchè la massa m_1 non sia fortemente preponderante sulla somma delle altre due. Però anche se non valesse questa condizione ed il rapporto $\frac{m_1}{m_2 + m_3}$ fosse dell'ordine di $\frac{D}{\Delta}$, basterebbe che fosse trascurabile il quadrato del rapporto suddetto (ipotesi del prof. No-

bile), perchè la conclusione rimanga invariata ⁽¹⁾. In questa ipotesi la (5) diventa

$$(6) \quad \frac{d^2(B-G)}{dt^2} = -f \frac{m_3}{(m_2+m_3)^2} \frac{1}{\delta^3} (B-G)$$

che dimostra intanto che il moto di B intorno a G è un moto kepleriano puro.

Sottraendo poi la (4) dalla (1) si ottiene, tenendo presente la prima delle (3),

$$(7) \quad \frac{d^2(G-A)}{dt^2} = -f \frac{m_1+m_2+m_3}{m_2+m_3} \left\{ \frac{m_2}{D^3} (B-A) + \frac{m_3}{r^3} (C-A) \right\}$$

e, scrivendo in questa

$$B-A = (B-G) + (G-A),$$

$$C-A = (C-G) + (G-A) = -\frac{m_2}{m_3} (B-G) + (G-A),$$

risulta

$$(8) \quad \frac{d^2(G-A)}{dt^2} = -f \frac{m_1+m_2+m_3}{m_2+m_3} \left\{ \left(\frac{m_2}{D^3} + \frac{m_3}{r^3} \right) (G-A) + m_2 \left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{r^3} \right) (B-G) \right\}.$$

Se allora indichiamo ancora con D_r la distanza di G da A e con φ l'angolo in G nel triangolo ABG, si ha facilmente

(1) La ipotesi relativa alle masse è implicitamente ammessa anche dal prof. Nobile. Osserviamo infatti dapprima che scrivendo il secondo termine a destra della (1) nella forma

$$-f \frac{m_3}{\Delta^2} \left\{ w + \left(\frac{\Delta}{r} \right)^2 v \right\},$$

si riconosce che nella ipotesi che il quadrato del rapporto delle distanze sia trascurabile la (1) diventa

$$\frac{d^2(B-A)}{dt^2} = -f \frac{m_1+m_2}{D^3} (B-A) + f \frac{m_3}{\Delta^3} (C-B).$$

Da questa, osservando che il primo termine a destra rappresenta il moto indisturbato e il secondo termine la perturbazione, segue appunto la conclusione del prof. Nobile che la forza perturbatrice agente su B è sempre diretta verso C. Ma non può da questa dedursi immediatamente che il moto di C intorno a B e viceversa sia piano. Dalla (2) si ottiene infatti facilmente per il moto di C intorno a B una espressione simile alla (5) e da essa risulta che il moto è piano soltanto se è trascurabile il terzo termine entro la parentesi, per il quale valgono le considerazioni suddette. Dato che il prof. Nobile parla poi di piano dell'orbita di C intorno a B, deve dunque ammettersi implicitamente l'ipotesi per le masse.

$$D^2 = D_1^2 + \delta^2 - 2D\delta \cos \varphi, \quad r^2 = D_1^2 + (\Delta - \delta)^2 + 2D_1(\Delta - \delta) \cos \varphi,$$

$$\frac{r}{D^3} = \frac{r}{D_1^3} \left\{ 1 + 3 \frac{\delta}{D_1} \cos \varphi + \dots \right\}, \quad \frac{r}{r^3} = \frac{r}{D_1^3} \left\{ 1 - 3 \frac{\Delta - \delta}{D_1} \cos \varphi + \dots \right\}$$

e da queste, tenendo presente che è $\delta m_2 = (\Delta - \delta) m_3$, segue

$$\frac{m_2}{D^3} + \frac{m_3}{r^3} = \frac{r}{D_1^3} (m_2 + m_3 + \dots), \quad \frac{r}{D^3} - \frac{r}{r^3} = + 3 \frac{\Delta}{D_1^3} \cos \varphi + \dots,$$

dove i termini trascurati contengono le potenze superiori del rapporto $\frac{\delta}{D_1}$.

Posto infine $G - A = D_1 n$, con n vettore unitario, la (8) si trasforma in

$$(9) \quad \frac{d^2(G - A)}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_2 + m_3}{D_1^2} \left\{ n + 3 \frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)^2} \cos \varphi \left(\frac{\Delta}{D_1} \right)^2 w \right\},$$

e da questa risulta che nella ipotesi di C vicino a B, così da poter trascurare di fronte all'unità il quadrato del solito rapporto delle distanze, il moto di G intorno ad A è espresso dalla relazione

$$(10) \quad \frac{d^2(G - A)}{dt^2} = -f \frac{m_1 + m_2 + m_3}{D_1^3} (G - A),$$

la quale completa la dimostrazione del nostro enunciato.

3. La proprietà risultante nel numero precedente può compendiarsi dunque nella relazione

$$(11) \quad \frac{d^2(B - A)}{dt^2} = -\frac{k_1^2}{D_1^3} (G - A) - \frac{k_2^2}{\delta^3} (B - G),$$

dove si è posto

$$f(m_1 + m_2 + m_3) = k_1^2, \quad f \frac{m_3^2}{(m_2 + m_3)^2} = k_2^2.$$

Nel caso che il terzo corpo ruotasse invece intorno ad A, denominiamolo con C' ed indichiamo con G' il centro di gravità del sistema AC', con D' e δ' le distanze BG' e G'A, con m'_1, m'_2, m'_3 le masse dei tre corpi e poniamo

$$k_1'^2 = f(m'_1 + m'_2 + m'_3), \quad k_2'^2 = f \frac{m_3'^2}{(m'_1 + m'_3)^2};$$

si ricava allora analogamente

$$(12) \quad \frac{d^2(B - A)}{dt^2} = -\frac{k_1'^2}{D_1'^3} (B - G') - \frac{k_2'^2}{\delta'^3} (G' - A).$$

Ora dalla considerazione delle relazioni (11) e (12) risulta immediatamente che se noi fissiamo le masse per modo che sia

$$(13) \quad k'_1 = k_1, \quad k'_2 = k_2,$$

e per un istante iniziale facciamo

$$B - G' = G - A, \quad G' - A = B - G,$$

(con che risulterà anche $D'_1 = D_1, \delta' = \delta$), ed inoltre per lo stesso istante

$$\frac{d(B - G')}{dt} = \frac{d(G - A)}{dt}, \quad \frac{d(G' - A)}{dt} = \frac{d(B - G)}{dt},$$

il moto kepleriano di B intorno a G' sarà uguale a quello di G intorno ad A e quello di G' intorno ad A sarà uguale a quello di B intorno a G, cosicchè il vettore B - A continuerà a rimanere per tutti i tempi identico nei due casi. Ciò significa, come del resto è intuitivo, che - finchè C rimane invisibile - il solo studio del moto relativo di B intorno ad A non può decidere se il corpo C ruota intorno a B oppure intorno ad A. Alle condizioni (13) per le masse se ne può aggiungere ancora una arbitraria; se per es. assumiamo

$$\frac{m_1}{m_2 + m_3} = \frac{m_1' + m_2'}{m_2'},$$

il moto non perturbato di A e di B rispetto alle stelle circostanti, cioè il moto di A e G nel primo caso e quello di G' e B nel secondo caso intorno al centro di gravità G₀ dei tre corpi è lo stesso nei due casi.

4. Per mostrare ora come possano le osservazioni micrometriche usuali di B riferito ad A condurre alla conoscenza di ambedue le orbite precedentemente considerate, tratteremo dapprima il caso più semplice di due orbite circolari, comunque inclinate sul piano di proiezione.

Notiamo intanto che, in generale, tra le solite coordinate polari ρ e ϑ nell'orbita apparente e quelle r e v nella orbita vera esistono le due relazioni

$$(14) \quad \begin{cases} \rho \cos(\vartheta - \Omega) = r \cos(\omega + v) \\ \rho \sin(\vartheta - \Omega) = r \sin(\omega + v) \cos i, \end{cases}$$

dove Ω, i ed ω sono i soliti elementi dell'orbita. Siano x_1, y_1 , le coordinate cartesiane ortogonali del centro di gravità G, riferite al solito sistema

coll'origine in A, x_2, y_2 quelle del corpo B nel moto intorno a G riferite ad un sistema parallelo al precedente, ma coll'origine in G; essendo

$$x_1 = \rho_1 \cos \vartheta_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \vartheta_1,$$

si ha, per le (14),

$$(15) \quad \begin{cases} x_1 \cos \Omega_1 + y_1 \sin \Omega_1 = r_1 \cos (\omega_1 + v_1) \\ y_1 \cos \Omega_1 - x_1 \sin \Omega_1 = r_1 \sin (\omega_1 + v_1) \cos i_1 \end{cases}$$

ed analoghe per x_2, y_2 .

Nel caso che il moto nell'orbita vera sia circolare, è

$$r_1 = \text{cost.} = a_1, \quad \omega_1 = 0, \quad v_1 = \psi_1 + \varphi_1 t,$$

con che le (15) diventano

$$\begin{aligned} x_1 \cos \Omega_1 + y_1 \sin \Omega_1 &= a_1 \cos (\psi_1 + \varphi_1 t) \\ y_1 \cos \Omega_1 - x_1 \sin \Omega_1 &= a_1 \sin (\psi_1 + \varphi_1 t) \cos i_1 \end{aligned}$$

e possono anche scriversi

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \Omega_1 \cos (\psi_1 + \varphi_1 t) - a_1 \cos i_1 \sin \Omega_1 \sin (\psi_1 + \varphi_1 t) \\ y_1 &= a_1 \sin \Omega_1 \cos (\psi_1 + \varphi_1 t) + a_1 \cos i_1 \cos \Omega_1 \sin (\psi_1 + \varphi_1 t). \end{aligned}$$

Sviluppando in queste il seno ed il coseno di $\psi_1 + \varphi_1 t$ e prendendo le analoghe relative alla seconda orbita (B intorno a G) si hanno allora le seguenti quattro relazioni

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \varphi_1 t + s_1 \sin \varphi_1 t, & x_2 = r_2 \cos \varphi_2 t + s_2 \sin \varphi_2 t \\ y_1 = m_1 \cos \varphi_1 t + n_1 \sin \varphi_1 t, & y_2 = m_2 \cos \varphi_2 t + n_2 \sin \varphi_2 t, \end{cases}$$

nelle quali si è posto

$$(17) \quad \begin{cases} r_1 = a_1 \cos \Omega_1 \cos \psi_1 - a_1 \cos i_1 \sin \Omega_1 \sin \psi_1 \\ s_1 = -a_1 \cos \Omega_1 \sin \psi_1 - a_1 \cos i_1 \sin \Omega_1 \cos \psi_1 \\ m_1 = a_1 \sin \Omega_1 \cos \psi_1 + a_1 \cos i_1 \cos \Omega_1 \sin \psi_1 \\ n_1 = -a_1 \sin \Omega_1 \sin \psi_1 + a_1 \cos i_1 \cos \Omega_1 \cos \psi_1 \end{cases}$$

ed analoghe per r_2, s_2, m_2, n_2 .

Posto allora

$$X = x_1 + x_2, \quad Y = y_1 + y_2,$$

saranno X ed Y le coordinate di B rispetto ad A , cioè le coordinate fornite dall'osservazione, e dalle (16) si ha immediatamente

$$(18) \quad \begin{cases} X = r_1 \cos \varphi_1 t + r_2 \cos \varphi_2 t + s_1 \sin \varphi_1 t + s_2 \sin \varphi_2 t \\ Y = m_1 \cos \varphi_1 t + m_2 \cos \varphi_2 t + n_1 \sin \varphi_1 t + n_2 \sin \varphi_2 t. \end{cases}$$

La prima di queste è una relazione nelle 6 incognite $\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2, s_1, s_2$; la seconda analogamente nelle 6 incognite $\varphi_1, \varphi_2, m_1, m_2, n_1, n_2$, due delle quali compariscono però già nella prima; t sono le epoche di osservazione corrispondenti alle X, Y . Volendo rimanere nel campo teorico, basteranno perciò sei valori di X e quattro di Y (o viceversa), insieme alle rispettive epoche t per ottenere le predette incognite e da queste mediante le (17) e simili i 10 elementi $a_1, \psi_1, \varphi_1, \Omega_1, i_1$; $a_2, \psi_2, \varphi_2, \Omega_2, i_2$ delle due orbite ⁽¹⁾. Con ciò, osservando che il piano dell'orbita di B intorno a G è anche quello dell'orbita di C intorno a B e che le due orbite sono simili, si ha pure l'orbita del terzo corpo a meno del raggio; quest'ultimo elemento può però pure essere conosciuto se è conosciuta la massa di A e del sistema BC .

In pratica, essendo le X, Y , affette degli errori di osservazione, si applicheranno tutte le misure disponibili alla risoluzione dei due sistemi (18) con un metodo di compensazione. Si seguirà all'uopo, non essendo le dette equazioni lineari nelle incognite, la via di cercare dapprima un sistema di valori approssimati delle incognite e di determinare poi le correzioni $dr_1, dr_2, \dots$ dalle relazioni lineari in queste correzioni che risultano dalle (18) per differenziazione. È appena necessario avvertire che in pratica una buona approssimazione dell'orbita di G è data dalla orbita media di B intorno ad A , cosicchè il problema viene molto semplificato.

L'estensione al caso generale di orbite ellittiche qualunque è ovvia; in tale caso in luogo di 10 incognite se ne hanno 14 ed i legami sono più complicati, ma per il resto le deduzioni rimangono come nel caso speciale. Qui importava soltanto far vedere che è possibile di risolvere il problema propostoci.

Data la precisione delle osservazioni di questo genere notiamo che si otterrà un'orbita sufficientemente esatta per il compagno B intorno a G anche calcolando semplicemente gli scarti $O - C$ delle posizioni di B osservate rispetto alle posizioni calcolate coll'orbita media di B , cioè coll'orbita calcolata dalle osservazioni di B nella ipotesi che le perturbazioni per

(1) Si ha facilmente dalle (17)

$$i_1^2 (\Omega_1 - \psi_1) = \frac{s_1 + m_1}{r_1 - n_1}, \quad i_2^2 (\Omega_1 + \psi_1) = \frac{m_1 - s_1}{r_1 + n_1},$$

le quali forniscono i due elementi Ω_1 e ψ_1 , dopo di che si ottengono subito a_1 e $\cos i_1$.

effetto di C siano considerate quali errori di osservazione. Tale orbita viene infatti a corrispondere con molta approssimazione all'orbita del centro di gravità e se i predetti scarti si portano in un sistema di assi la cui origine si faccia corrispondere a G, si avrà da risolvere un analogo problema di quello che si risolve ogni volta che si calcola l'orbita relativa di una doppia. Una tale orbita (con alcune semplificazioni per non prolungare di troppo i calcoli numerici) è stata ottenuta dal Volet⁽¹⁾ per il terzo corpo di Sirio⁽²⁾.

Fisica (Fisica matematica). — *Fondamenti termodinamici della teoria dell'equilibrio elettrico e delle correnti permanenti nei conduttori metallici*. Nota di F. Odone, presentata⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. PREMESSA. — Si chiamano conduttori metallici quei conduttori nei quali si può modificare la distribuzione delle cariche elettriche senza modificare le loro proprietà fisiche e chimiche.

I principali fenomeni elettrici presentati dai conduttori metallici, percorsi da correnti permanenti o sui quali è realizzato l'equilibrio elettrico, sono i seguenti: d. d. p. (differenza di potenziale) tra interno e superficie di uno stesso metallo, d. d. p. tra punti appartenenti a metalli diversi tra loro a contatto, correnti termoelettriche, effetto Joule, effetto Peltier, effetto Thomson.

In una prima Nota dedicata a tali questioni ho trovato l'espressione della f. e. m. in ogni punto e l'espressione della quantità di calore sviluppata da un generico elemento di volume di un conduttore metallico percorso da correnti permanenti.

In una seconda Nota ho dimostrato l'esistenza della d. d. p. tra interno e superficie di un metallo, l'esistenza dell'effetto Volta esterno e interno; ho confrontato l'effetto Volta interno con il coefficiente dell'effetto Peltier

(1) « Bull. Astron. » (II), to. VIII, fasc. I, p. 60, 1933.

(2) Chiudiamo questa Nota coll'osservare relativamente alla critica espressa dal prof. Nobile (come tale è stata infatti interpretata; v. « Bibliographie mensuelle de l'Astronomie », to. 2, n. 9, 1934) circa l'orbita da me calcolata per il terzo corpo nei due sistemi ζ Herculis e Sirio, che lo scopo principale del calcolo di dette orbite non era quello di arrivare a degli elementi più o meno sicuri per il terzo corpo, ma semplicemente di dimostrare che poteva ammettersi un corpo con una certa orbita che spiegasse le irregolarità riscontrate. Più che l'orbita importava infatti dimostrare l'esistenza del terzo corpo ed in questo intento mi sono servito di una primissima approssimazione, senza però affermare che l'orbita trovata « corrisponda alla realtà »; la affermazione a p. 49 del mio lavoro su Sirio « questo fatto costituisce la conferma più sicura per la nostra ipotesi » riguarda infatti l'ipotesi fondamentale del lavoro (riaccennata al principio del § 13 in cui quella affermazione è contenuta), cioè l'esistenza del terzo corpo e non la sua orbita.

(3) Nella seduta del 7 aprile 1935.

ed ho dato la ragione termodinamica per cui il coefficiente dell'effetto Peltier NON misura la d. d. p. di contatto; e la ragione è questa che la d. d. p. di contatto corrisponde all'energia libera delle azioni delle masse materiali sulle cariche elettriche, mentre il coefficiente dell'effetto Peltier corrisponde all'energia vincolata di queste stesse azioni.

In una terza Nota ho determinato la f. e. m. d'una catena termoelettrica mediante le d. d. p. di contatto ed ho espresso il coefficiente dell'effetto Peltier relativo a due metalli e la differenza dei coefficienti degli effetti Thomson degli stessi metalli, mediante la f. e. m. di una coppia termoelettrica formata con questi metalli.

In questa quarta Nota voglio meglio precisare i fondamenti termodinamici dei fenomeni ora ricordati ed insistere sulla distinzione tra calore compensato e calore non compensato ⁽¹⁾.

2. RICHIAMI DI TERMODINAMICA. — Sia U l'energia interna di un sistema; poniamo $U = U_1 + U_2 + \dots$ indicando con $U_1, U_2, \dots$ le energie interne delle varie parti in cui il sistema si può considerare diviso ⁽²⁾. Supponiamo che il sistema subisca una modificazione nella quale non vi sia né variazione di energia cinetica, né esecuzione di lavoro esterno. Se dQ è la quantità di calore sviluppata durante la modificazione, il primo principio della termodinamica fornisce la relazione

$$dQ = -dU.$$

Nelle ipotesi fatte, dQ è quindi indipendente dal modo con cui la modificazione si produce.

Se la modificazione di cui si tratta è effettuabile anche per via reversibile, si può far uso del secondo principio della termodinamica. Secondo tale principio dQ è la somma di due termini, ossia si ha

$$dQ = d\tau + d\vartheta.$$

$d\tau$ si chiama *calore o lavoro non compensato* ed è sempre positivo; esso è nullo solo se la trasformazione è effettuata per via reversibile. $d\vartheta$ si chiama *calore o lavoro compensato* e può essere tanto positivo che negativo che nullo; esso è indipendente dal modo con cui la modificazione si produce. Infatti

(1) Le Note, a cui ho accennato, sono state pubblicate la prima sul numero di giugno del 1934 del «Nuovo Cimento»; la seconda e la terza ancora sul «Nuovo Cimento» del 1935.

(2) Scrivendo $U = U_1 + U_2 + \dots$ non vogliamo già dire che l'energia interna U è la somma delle energie interne che avrebbero le varie parti supposte separate le une dalle altre, il che sarebbe falso (DUHEM, *Energétique*, vol. II, p. 45. Paris, Gauthier-Villars, 1911); vogliamo invece dire che l'energia interna è la somma delle energie interne delle varie parti, prese nel loro stato attuale.

il secondo principio stabilisce che se il sistema ha la stessa temperatura assoluta T in tutti i punti, si ha $d\vartheta = -T dS$, essendo S l'entropia del sistema; se invece la trasformazione avviene senza cambiamenti di temperatura, ma questa è diversa da punto a punto, si ha

$$d\vartheta = -d(T_1 S_1 + T_2 S_2 + \dots).$$

Nel seguito faremo uso di quest'ultima formula.

Notiamo intanto che se $dQ = -dU$, allora anche $d\tau$ diventa indipendente dalla trasformazione. Infatti in quest'ipotesi si ha:

$$d\tau = dQ - d\vartheta = -dU - d\vartheta = -d(U_1 - T_1 S_1 + U_2 - T_2 S_2 + \dots),$$

ossia

$$d\tau = -d(F_1 + F_2 + \dots) = -dF,$$

avendo posto

$$F_1 = U_1 - T_1 S_1, \quad F_2 = U_2 - T_2 S_2, \dots \quad \text{ed} \quad F = F_1 + F_2 + \dots.$$

F si chiama potenziale termodinamico del sistema.

Si dimostra che tra F, U, S passano le relazioni

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad U = F - T \frac{\partial F}{\partial T};$$

esse permettono di esprimere U, S in funzione di F .

3. IPOTESI E FORMULE FONDAMENTALI PER LO STUDIO DELLE CORRENTI PERMANENTI NEI CONDUTTORI METALLICI. — In un sistema elettrizzato esistono 3 sorta di azioni:

- azioni tra masse materiali e masse materiali;
- azioni tra le cariche elettriche;
- azioni tra le masse materiali e le cariche elettriche.

Si dimostra che il potenziale termodinamico, in condizioni di equilibrio elettrico, assume la forma

$$F = F_0 + \frac{1}{2} (V_1 q_1 + V_2 q_2 + \dots) + \theta_1 q_1 + \theta_2 q_2 + \dots,$$

essendo F_0 il potenziale termodinamico del sistema allo stato neutro;

$\frac{1}{2}(V_1 q_1 + V_2 q_2 + \dots)$ il potenziale delle azioni tra le cariche elettriche;
 $\theta_1 q_1 + \theta_2 q_2 + \dots$ il potenziale delle azioni tra le masse materiali e le cariche elettriche.

L'energia interna U e l'entropia S sono quindi date dalle formule

$$U = U_0 + \frac{1}{2} (V_1 q_1 + V_2 q_2 + \dots) + K_1 q_1 + K_2 q_2 + \dots$$

con

$$K = \theta - T \frac{\partial \theta}{\partial T};$$

$$S = S_0 + H_1 q_1 + H_2 q_2 + \dots$$

con

$$H = - \frac{\partial \theta}{\partial T}.$$

Ci conviene introdurre ancora le seguenti notazioni, che ci serviranno in seguito:

$$W_V = \frac{1}{2} (V_1 q_1 + V_2 q_2 + \dots) \quad ; \quad W_\theta = \theta_1 q_1 + \theta_2 q_2 + \dots;$$

$$W_H = T_1 H_1 q_1 + T_2 H_2 q_2 + \dots;$$

$$W_K = K_1 q_1 + K_2 q_2 + \dots = W_\theta + W_H.$$

Ciò posto, consideriamo dei conduttori metallici fermi, con temperatura diversa da punto a punto ma stazionaria, percorsi da correnti permanenti. Poichè i conduttori sono supposti fermi e non c'è esecuzione di lavoro esterno, si fa l'*ipotesi* che per ogni elemento di volume $d\omega$ e per ogni intervallo di tempo dt sia

$$dQ = -dU,$$

prendendo come valore di U quello calcolato in assenza di correnti.

Sia $\mathbf{j}$ il vettore densità della corrente; R la resistenza specifica; $\mathbf{E} = R\mathbf{j}$ il vettore della f. e. m. Si fa allora la seconda *ipotesi* che per ogni elemento di volume $d\omega$ e per ogni intervallo di tempo dt sia

$$R \mathbf{j}^2 d\omega dt = \mathbf{E} \times \mathbf{j} d\omega dt = d\tau = -dF,$$

prendendo come valore di F quello calcolato in assenza di correnti.

Si usa dire che $d\tau = R \mathbf{j}^2 d\omega dt$ è il calore sviluppato dalla corrente, immaginando che le cariche elettriche possano acquistare, cedere, trasportare dell'energia.

Partendo dalle due ipotesi ora ricordate si dimostra che:

$$\mathbf{E} = - \left(\text{grad } V + \text{grad } \theta_T + \frac{\partial \theta}{\partial T} \text{grad } T \right).$$

$$dQ = \left[R \mathbf{j}^2 - \text{grad } (TH)_T \times \mathbf{j} - \frac{\partial (TH)}{\partial T} \text{grad } T \times \mathbf{j} \right] d\omega dt;$$

l'indice T posto in θ_T , $(TH)_T$ significa che nel calcolo del grad la temperatura dev'essere ritenuta costante.

Da $d\tau = \mathbf{E} \times \mathbf{j} d\omega dt$ risulta

$$d\tau = R \mathbf{j}^2 d\omega dt = - \text{grad } V \times \mathbf{j} d\omega dt - \\ - \left(\text{grad } \theta_T + \frac{\partial \theta}{\partial T} \text{grad } T \right) \times \mathbf{j} d\omega dt$$

e si controlla facilmente che $d\tau = -dF$. Infatti indicando col simbolo d la variazione subita dalla grandezza, a cui d è applicato, per effetto del moto delle cariche nell'elemento di volume $d\omega$ e nel tempo dt , si ha $dF = dW_V + dW_\theta$, con

$$dW_V = \text{grad } V \times \mathbf{j} d\omega dt \\ dW_\theta = \left(\text{grad } \theta_T + \frac{\partial \theta}{\partial T} \text{grad } T \right) \times \mathbf{j} d\omega dt.$$

Si controlla pure facilmente che $dQ = -dU$. Infatti si ha

$$dU = dW_V + dW_K = dW_V + dW_\theta + dW_H,$$

con

$$dW_H = \left[\text{grad } (TH)_T + \frac{\partial (TH)}{\partial T} \text{grad } T \right] \times \mathbf{j} d\omega dt.$$

L'ipotesi $d\tau = -dF = R \mathbf{j}^2 d\omega dt$ significa che l'effetto Joule è l'equivalente termico del lavoro non compensato sviluppato dalla corrente; questo lavoro, *che proviene da energia ceduta dalla corrente*, nel caso che stiamo esaminando, cioè di conduttori metallici fermi, può solo trasformarsi in calore. Se invece nel circuito ci fossero delle parti in movimento (motore) o potessero prodursi delle reazioni chimiche (voltmetro), allora facendo tendere a zero l'effetto Joule, l'energia trasportata dalla corrente verrebbe trasformata in energia meccanica o in energia chimica; questa trasformazione sarebbe completa, o quasi, quando la forza-contro-elettromotrice del motore o del voltmetro tendesse allo stesso valore della f. e. m. dell'elettromotore che provoca il passaggio della corrente; in tal caso l'intensità della corrente tenderebbe a zero e l'effetto Joule diventerebbe trascurabile.

4. IMPORTANZA DELLA DISTINZIONE TRA LAVORO COMPENSATO E LAVORO NON COMPENSATO. — Si può fare qualche osservazione interessante sull'espressione di $d\tau$ e di dQ . Abbiamo intanto

$$d\tau = -dW_V - dW_\theta \quad ; \quad dQ = -dW_V - dW_K = d\tau - dW_H.$$

Se il tratto di conduttore considerato è *omogeneo* e con *temperatura identica in tutti i punti* risulta $dW_0 = dW_K = dW_H = 0$ e quindi $dQ = d\tau = -dW_V$, cioè il calore sviluppato si riduce all'effetto Joule e proviene soltanto dalle azioni delle cariche elettriche sulle cariche elettriche.

Ma se il conduttore metallico non è omogeneo, o se la temperatura è variabile da punto a punto, o se queste due cose son verificate entrambe contemporaneamente si ha $d\tau = -dW_V$, $dQ = d\tau$. In queste ipotesi i termini dW_V , dW_0 , dW_H , dW_K possono essere tanto positivi, che negativi, che nulli. Inoltre ci si convince facilmente che:

— dW_V rappresenta il lavoro delle azioni delle cariche elettriche l'una sull'altra; esso rappresenta energia *data* alla corrente se $-dW_V$ è negativo, energia *tolta* alla corrente e trasformata in calore se $-dW_V$ è positivo;

— dW_K rappresenta il lavoro complessivo delle azioni delle masse materiali sulle cariche elettriche;

— dW_0 rappresenta la parte del lavoro, dovuto alle azioni delle masse materiali sulle cariche elettriche, che può essere trasformata in energia della corrente; esso corrisponde a calore assorbito dell'esterno e trasformato in energia data alla corrente se $-dW_0$ è negativo, a energia tolta alla corrente e trasformata in calore ceduto all'esterno se $-dW_0$ è positivo;

— dW_H infine è il lavoro compensato delle azioni delle masse materiali sulle cariche elettriche; esso si manifesta sotto forma di calore assorbito o ceduto sul posto e non può essere trasformato in energia della corrente.

Se si sapesse misurare $-dW_0$, si potrebbero ottenere i valori delle d. d. p. di contatto o delle d. d. p. dovute a diversità di temperatura. In particolare, per un tratto di circuito, con temperatura eguale in tutti i punti, formato da due metalli a, b e percorso da un flusso di corrente J da a verso b , si ha $-dW_0 = (\theta_a - \theta_b) J dt$. Ma $-dW_0$ non è misurabile. Ciò che si può misurare è invece $dQ = d\tau - dW_H$. Poichè $d\tau$ può essere reso trascurabile, misurando dQ si ottiene il valore di $-dW_H$, che corrisponde agli effetti Peltier e Thomson. In particolare, per un tratto di circuito con temperatura assoluta T eguale in tutti i punti, formato da due metalli a, b e percorso da un flusso di corrente J da a verso b , si ha $-dW_H = T(H_a - H_b) J dt$. Si conclude che gli effetti Peltier e Thomson non possono fornire la d. d. p. di contatto tra due metalli diversi o la d. d. p. tra punti, a temperature diverse, di uno stesso metallo.

La distinzione tra calore compensato $-dW_H$ e calore $-dW_0$, su cui qui si insiste, è analoga alla distinzione ben nota tra calore chimico e calore voltaico nel caso di un circuito contenente una pila idroelettrica⁽¹⁾. Le due distinzioni hanno questo di comune: in entrambi i casi bisogna di-

(1) BOUASSE, *Electricité*, III, p. 429 e seg., Paris, Delagrave, 1920.

stinguere tra energia che può essere fornita alla corrente, ed energia che non può essere fornita alla corrente; questa seconda parte di energia è il calore compensato $-dW_H = dQ - d\tau$, sviluppato o assorbito nella modificazione prodotta dal moto delle cariche. Differiscono invece in questo: il calore chimico è l'analogo del calore che qui abbiamo indicato con dQ , e il calore voltaico è l'analogo del calore che qui abbiamo indicato con $d\tau$: il termine $-dW_0$ della teoria qui esposta è invece privo di corrispondente nella teoria termodinamica della pila. Si può ancora notare che $-dW_0$ è l'energia libera delle azioni delle masse materiali sulle cariche elettriche, mentre $-dW_H$ è l'energia vincolata di queste stesse azioni⁽¹⁾.

Fisica (Chimica-Fisica). — *La diffusibilità del deuterio nei metalli*. Nota di T. FRANZINI, presentata dal Corrisp. A. AMERIO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Studio sui composti aliciclici. I. Sintesi di β -chetoammine*⁽²⁾. Nota di F. PIRRONE, presentata⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Date le scarse notizie sulle β -chetoammine, ed in particolare sulle β -chetoammine aril-alicicliche, si sembrò interessante applicare la reazione di Betti⁽⁴⁾ ai ciclochetoni. Per questi composti, dato che essi reagissero nella forma chetonica, o nella enolica, si potevano ottenere delle β -chetoammine N sostituite, o dei composti di condensazione, e ciclizzazione, del tipo isossazinico.

I risultati ottenuti in una prima serie di esperienze, sul cicloesanone, hanno mostrato che l'equilibrio esistente per questo composto, fra la forma enolica e chetonica, viene spostato a vantaggio di una reazione nella forma chetonica.

È probabile, che ciò sia dovuto alla presenza di un gruppo metilenico, avente particolare azione condensante, e che quindi, funziona da gruppo elettronegativo, influenzando l'attività del gruppo carbonilico, ed impedendo che il composto ottenuto per condensazione fra due molecole di aldeide benzoica, una molecola di ammoniaca ed una molecola di cicloesanone, si ciclizzi in un composto a tipo isossazinico.

(1) Per la distinzione tra energia libera ed energia vincolata, si può vedere DUHEM, *Energétique*, vol. II, p. 37 in nota. Paris, Gauthier-Willars, 1911.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Pisa.

(3) Nella seduta del 7 aprile 1935.

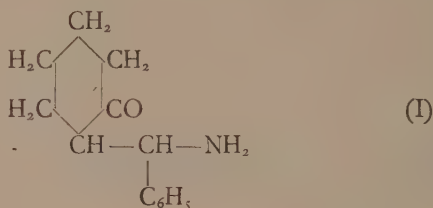
(4) BETTI, « Gazz. Chim. Ital. », 30, 301, 1900; 30, 310, 1900 e 31, 377, 1901.

I prodotti ottenuti possono raggrupparsi nella serie delle β -chetoammine del 2-metil-1-cicloesanoone sostituite o no in N ⁽¹⁾.

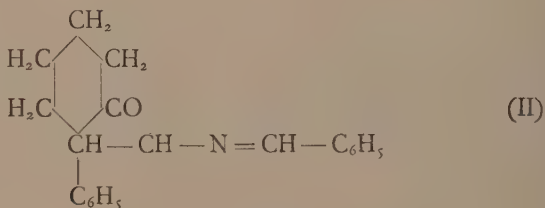
Per i gruppi metilenici in posizione α -, α' - rispetto al gruppo carbonilico, il cicloesanoone può dare origine, in presenza di alcali ⁽²⁾, ed in particolari condizioni di reazione, al 2-benzal-1-cicloesanoone ⁽³⁾ ed al 2-6-dibenzal-1-cicloesanoone ⁽⁴⁾.

In condizioni normali, bassa temperatura, assenza di idrati alcalini fissi, non è noto che sia possibile la reazione suddetta.

Era da attendersi, che nella reazione fra benzaldeide, cicloesanoone e ammoniacca, venisse a formarsi: in un primo tempo un prodotto di condensazione fra questi tre prodotti, con eliminazione di una molecola di acqua, per ottenere dal cicloesanoone una β -chetoammina: l' (I) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloesanoone (I)



e che il prodotto ottenuto, reagendo, ulteriormente, con una molecola di benzaldeide, desse origine ad una β -chetoammina N sostituita: l' N benzal-(1) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloesanoone (II)



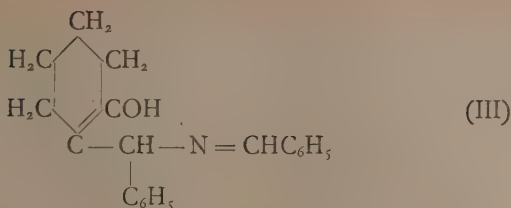
non essendo escluso che l' N benzal-(1) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloesanoone, si tautomerizzi in un primo tempo nella forma enolica, dando l' N benzal-(1) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloessenolo (III)

(1) La parte sperimentale sarà pubblicata per esteso nella « Gazz. Chim. Ital. ».

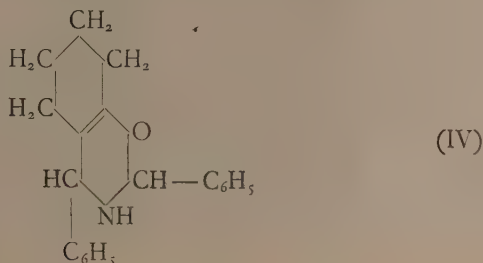
(2) WALLACH, « Ber. », 40, 71; « C. B. I. », 639, 1908 e « Ann. », 347, 333.

(3) POGGI e GUASTALLA, « Gazz. Chim. Ital. », 61, 410, 1931.

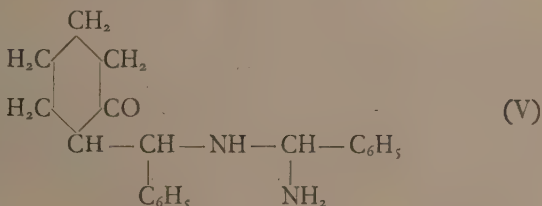
(4) POGGI e SALTINI, « Gazz. Chim. Ital. », 62, 678, 1932.



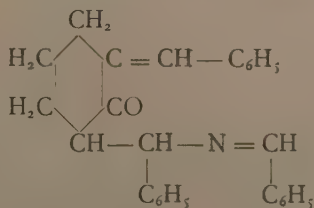
forrendo, in un secondo tempo, per ciclizzazione, l'1-3 difenil-esametilene-2-4 isossazina (IV)



La reazione ha dato luogo a vari prodotti a seconda che si è operato a temperatura ordinaria od all'ebollizione. A temperatura ordinaria si è ottenuto un composto fondente a 181-183°, al quale per i risultati dell'analisi elementare, e per i derivati ottenuti, sembra probabile spetti la formola dell'N benzal-(1) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloesanone (II); un prodotto fondente a 188-189° al quale spetta la formola dell'N benzilammina-(1) fenil-(1) ammino-2 metil-1 cicloesanone (V),



ed un prodotto fondente a 170-171° al quale spetta la formola dell'N-benzal-(1) fenil-(1)ammino-2 metil-6 benzal-1 cicloesanone (VI),



oltre ad una sostanza vischiosa, rosso-scura, sulla quale proseguono le ricerche, ed a cristalli gialli trasparenti di 2-6 dibenzal-1 cicloesanone, fondenti a 116-118°.

Il prodotto fondente a 188-189° (V), svolge ammoniacale per riscaldamento, anche da una soluzione alcoolica, fornendo il prodotto fondente a 181-183° (II)

Dal prodotto fondente a 181-193° sono stati ottenuti il semicarbazone p. f. 199-200°, l'ossima p. f. 182-184°, l'idrossilamminoossima p. f. 199-200°, mentre per trattamento con acido cloridrico, esso subisce una decomposizione con migrazione del gruppo C_6H_5CH per fornire il 2-6 dibenzal-1 cicloesanone.

L'andamento della reazione fra cicloesanone, ammoniacale e benzaldeide eseguita a caldo non differisce, che per il rendimento dei composti fondenti a 116-118° ed a 181-183°, da quello notato a t. o.

Difatti, a caldo, si ottiene molto prodotto oleoso, e, in maggior quantità, il prodotto fondente a 116-118° che quello fondente a 181-183°.

Non si sono ottenuti a caldo i prodotti fondenti a 188-189 ed a 171-172°.

Biologia. — *Nuove osservazioni sulla vita e sul rapporto sessuale dei nati di « Gambusia holbrookii Grad. »*⁽¹⁾. Nota di F. DULZETTO, presentata⁽²⁾ dal Socio A. Russo.

In una precedente Nota⁽³⁾, alla quale rimando per la bibliografia, ho esposto i risultati di una prima serie di ricerche, dirette ad accertare il rapporto sessuale dei nati da femmine adulte di *Gambusia holbrookii*, tenute, per tutta la durata della stagione riproduttiva, insieme col maschio; nonché l'epoca di ripresa dell'attività riproduttiva, l'intervallo di tempo che abitualmente passa tra un parto e il successivo, il numero dei parti, che in una stagione una femmina può dare, il numero dei piccoli partoriti.

Ora, onde potere stabilire l'eventuale influenza che esercita la convivenza coi maschi - condizione rispondente a quella che abitualmente si ha in natura - ho isolato al principio dell'estate delle femmine pregne, ed ho lasciato che partorissero, senza avere con essi ulteriori rapporti. Il 10 maggio 1934, infatti, sono state prelevate dalla vasca del giardino dell'Istituto 10 femmine grosse, in stato di gravidanza avanzata, ed immesse in altrettanti grandi recipienti di vetro. Come nelle precedenti ricerche, per tutta la durata del-

(1) Queste ricerche sono state in parte eseguite con un assegno sui fondi Treccani, nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(3) DULZETTO F., *Osservazioni sulla vita e sul rapporto sessuale dei nati di « Gambusia holbrookii Grad. »*. « Archivio Zool. », vol. XX, 1934.

l'esperimento, si è avuto cura di rinnovare frequentemente l'acqua, di immergere dei ciuffi di *Cladophora*, e di fornire un abbondante nutrimento, costituito da larve di culicidi. Quando la estensione delle macchie addominali faceva prevedere prossimo il parto, le femmine venivano attentamente sorvegliate, ed a parto iniziato i piccoli allontanati, man mano che venivano espulsi. Si aveva così la sicurezza di recuperare tutti i nati di ciascun parto, i quali venivano fissati in liquido Hollande, inclusi in paraffina e sezionati, onde procedere al controllo del sesso senza pericolo di errore.

Influenza della temperatura sulla ripresa dell'attività riproduttiva. — Hildebrand⁽¹⁾ aveva richiamato l'attenzione sulla influenza che la temperatura esercita sull'inizio del periodo delle nascite in *G. affinis*. Successivamente anche Barney e Anson⁽²⁻³⁾ hanno constatato che, a parità di altre condizioni, l'inizio dei parti della stagione dipende dalla temperatura dell'acqua, in cui l'animale vive. Anche le mie osservazioni, eseguite negli anni 1927⁽⁴⁾ e 1933⁽⁵⁾, sulla *G. holbrookii* acclimatata in Italia, collimano con quelle degli autori americani; e trovano, come vedremo, nuova conferma nei risultati di questa ultima serie di ricerche.

Delle 10 femmine, che sono state isolate il 10 maggio 1934, la prima ha partorito il 24 maggio, altre sei hanno partorito tra il 1° ed il 5 giugno, due hanno partorito l'8, ed una il 24 giugno. Confrontando questi dati con quelli relativi alle osservazioni fatte l'anno scorso, si rileva un notevole anticipo nella ripresa della attività riproduttiva. Infatti allora il primo parto della stagione si ebbe il 12 giugno; delle altre femmine, cinque partorirono tra il 16 ed il 19 giugno, quattro in luglio, ed una nella seconda decade di agosto.

Dai dati fornitimi da questo R. Osservatorio geofisico si rileva che nei mesi di aprile e maggio 1933 la temperatura media è stata, rispetto agli anni precedenti bassa, non solo, ma in aprile si è anche avuta una minima di 5°2, che per Catania si deve considerare come molto bassa. Nella primavera del 1934 la temperatura media si è mantenuta invece al disopra della media normale. Infatti nel marzo 1934 la temperatura media è stata di 12°8,

(1) HILDEBRAND F. S., *Notes on the life history of the Minnows «Gambusia affinis» and «Cyprinodon variegatus»*. «Bureau of Fisheries», Appendix VI. Doc. N. 857, 1917.

(2) BARNEY R. L. and ANSON B. J., *Seasonal abundance of the mosquito-destroying Top-Minnow, «Gambusia affinis», especially in relation to male frequency*. «Ecology», vol. II, 1921.

(3) BARNEY R. L. and ANSON B. J., *The seasonal abundance of the mosquito-destroying Top-Minnow, «Gambusia affinis», especially in relation to fecundity*. «Anat. Record», vol. XXII, 1921.

(4) DULZETTO F., *Osservazioni sulla vita sessuale della «Gambusia holbrookii» Grad.*. «Rendic. R. Acc. Lincei», vol. VIII, ser. 6°, 1928.

(5) DULZETTO F., *Osservazioni sulla vita e sul rapporto sessuale dei nati di «Gambusia holbrookii» Grad.*. «Archivio Zoologico», vol. XX, 1934.

e quindi un poco più elevata, rispetto alla media normale che è $12^{\circ}.3$; in aprile è stata di $16^{\circ}.5$, e quindi più elevata di $1^{\circ}.6$ rispetto alla media normale che è $14^{\circ}.9$; in maggio è stata di $20^{\circ}.3$, e quindi più elevata di $1^{\circ}.7$ rispetto alla normale, che è $18^{\circ}.6$. Ora anche nella primavera del 1927, a cui risalgono le mie prime osservazioni, la media si è mantenuta al disopra della normale, ed anche allora il primo parto della stagione si è avuto il 21 maggio. È evidente quindi che, come per le altre specie di *Gambusia*, anche per la *G. holbrookii* l'inizio della attività riproduttiva di ogni stagione dipende dalla temperatura media primaverile.

Numero dei parti e intervallo tra un parto ed il successivo. — Delle 10 femmine tenute in osservazione (vedi Tabella), due hanno partorito una sola volta, due due volte e sei tre volte. Dalle mie precedenti ricerche si rileva che il numero massimo di parti, che si possono avere in una stagione, per la *G. holbrookii* acclimatata in Italia, e particolarmente a Catania, è di quattro. Ma non è raro il caso di femmine che, pur coabitando col maschio per tutta la durata del periodo riproduttivo, partoriscono un numero minore di volte, come è avvenuto per le femmine che hanno fatto oggetto delle ricerche eseguite nell'estate del 1933. Infatti, tre di esse partorirono quattro volte, tre tre volte, e cinque due sole volte. Analogo comportamento si è riscontrato nelle otto femmine isolate nel maggio 1927, e che sono state tenute pure lontane dai maschi. Sicchè non sembra che la loro presenza abbia eccessiva influenza sul numero dei parti della stagione, il quale pare dipenda dalle particolari condizioni fisiologiche dell'ovario della femmina, come potrà meglio accertarsi quando saranno ultimate le ricerche istologiche sull'apparato sessuale femminile, che sono ancora in corso.

Per quanto si riferisce poi al tempo che intercede tra i vari parti, si rileva che tra il primo ed il secondo parto sono passati in media 29.7 giorni, con un minimo di 23 ed un massimo di 35; tra il secondo ed il terzo 20.5 con un minimo di 19 giorni ed un massimo di 23. Questi risultati differiscono sensibilmente da quelli ottenuti nelle esperienze del 1933, specialmente per quanto si riferisce al tempo medio che intercede tra secondo e terzo parto, infatti allora son passati circa 28 giorni, con un minimo di 22. Essi si avvicinano di più a quelli ottenuti nell'estate del 1927, in cui tra secondo e terzo parto son passati in media 22 giorni, con un minimo di 19 ed un massimo di 23. Per quanto si riferisce all'intervallo di tempo tra primo e secondo parto, le differenze sono meno sensibili, anzi possiamo dire che i dati quasi coincidono. Infatti, tra il primo ed il secondo parto sono passati in media 27.7 giorni nelle esperienze del 1927, 29 giorni nelle esperienze del 1933 e 29.7 in queste ultime. Alla media più bassa, che si è avuta tra secondo e terzo parto in queste ultime esperienze, corrisponde anche il minimo più basso, che si sia sinora riscontrato, e che è stato di 19 giorni, minimo che si è avuto in un solo caso nelle esperienze del 1927.

TABELLA.

Gambusie in esame	Data del 1° parto	Numero dei nati		Differenza tra i due sessi		Sesso %		Rapporto sessuale		Data del 2° parto	Intervallo tra 1° e 2° parto in giorni	Sesso		Differenza tra i due sessi		Sesso %		Rapporto sessuale	
		♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀			♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
A	1-VI-1934	21	18	3	15	—	85.7	100.0	16.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B	5 » »	29	11	18	—	7	37.9	100.0	163.6	5-VII-1934	29	35	13	22	—	37.1	62.9	100.0	169.2
C	24-V »	11	6	5	1	—	54.5	100.0	83.3	25-VI »	31	32	20	12	—	62.5	37.5	100.0	60.0
D	8-VI »	22	9	13	—	4	40.9	100.0	144.4	6-VII »	27	34	17	17	—	50.0	50.0	100.0	100.0
E	24 » »	60	32	28	4	—	53.3	100.0	87.5	18 » »	23	77	41	36	5	53.2	46.8	100.0	87.8
F	4 » »	41	25	16	9	—	61.0	100.0	64.0	5 » »	30	55	24	31	—	43.6	56.4	100.0	129.1
G	5 » »	18	12	6	6	—	66.6	100.0	50.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
H	4 » »	17	5	12	—	7	29.4	100.0	240.0	7-VII-1934	32	44	16	28	—	36.4	63.6	100.0	175.0
I	8 » »	59	25	34	—	9	42.4	100.0	136.0	10 » »	31	41	14	27	—	34.1	65.9	100.0	192.8
L	1 » »	22	9	13	—	4	40.9	100.0	144.4	7 » »	35	20	12	8	4	60.0	40.0	100.0	66.6
		300	152	148								338	157	181					

Segue: TABELLA.

Gambusie in esame	Data del 3° parto	Intervallo tra 2° e 3° parto in giorni		Numero dei nati		Differenza tra i due sessi		Sesso %		Rapporto sessuale		Numero comples- sivo dei parti		Numero comples- sivo dei nati		Sesso		Sesso %		Rapporto sessuale		Osservazioni
				♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀			♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	
A	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	21	18	3	85.7	14.3	100.0	100.0	100.0	100.0	166
B	25-VII-1934	20	33	16	17	—	—	48.5	51.5	100.0	106.2	3	97	40	57	41.2	58.8	100.0	100.0	100.0	100.0	142.5
C	»	23	38	36	22	14	—	62.1	37.9	100.0	61.1	3	101	62	39	61.3	38.7	100.0	100.0	100.0	100.0	62.9
D	»	19	33	20	13	7	—	60.7	39.3	100.0	65.0	3	89	46	43	51.7	48.3	100.0	100.0	100.0	100.0	93.4
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	137	73	64	53.3	46.7	100.0	100.0	100.0	100.0	87.6
F	26-VII-1931	20	67	3	36	—	5	46.3	53.7	100.0	116.1	3	163	80	83	49.1	50.9	100.0	100.0	100.0	103.8	Il 19 VII-1934 è stata trovata morta.
G	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	18	12	6	66.6	33.4	100.0	100.0	100.0	100.0	
H	29-VII-1934	21	36	19	17	2	—	52.8	47.2	100.0	89.4	3	97	40	57	41.3	58.7	100.0	100.0	100.0	100.0	142.5
I	»	20	13	4	9	—	5	30.7	69.3	100.0	225.0	3	113	43	70	38.0	62.0	100.0	100.0	100.0	100.0	139.5
L	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	42	21	21	50.0	50.0	100.0	100.0	100.0	100.0	Il 15-VII-1934 è saltata fuori dal recipiente ed è stata tro- vata morta.
												21	878	—	—	—	—	—	—	—	—	
														43	413							

Sicchè rimane così accertato che tra secondo e terzo parto è interposto il tempo più breve, non solo come media, ma anche come valore estremo, mentre pare che su tutto il fenomeno faccia risentire la sua influenza la temperatura media primaverile.

Numero dei piccoli partoriti. — Dai dati raccolti nella Tabella si rileva che le 10 femmine, tenute in esperimento, hanno prodotto complessivamente 878 piccoli in 24 parti, con una media per parto di 36.6 piccoli. Il numero massimo di piccoli, 77, è stato quello che la femmina E ha partorito il 18 luglio; questa stessa femmina al primo parto aveva dato 60 piccoli. Il numero dei piccoli deposti oscilla così tra un massimo di 77 ed un minimo di 11. Dall'esame dei singoli parti si rileva che il numero complessivo dei nati del primo è stato di 300, con una media per parto di 30 piccoli, i valori estremi sono compresi tra un massimo di 60 ed un minimo di 11. I nati del secondo parto sono stati 338, con una media di 42.2 per parto; ed un massimo di 77 piccoli, che si è avuto in un solo parto, ed un minimo di 20, che si è avuto pure in un solo parto. I nati del terzo parto sono stati 240, con un massimo di 67, che si è avuto in un solo parto, ed un minimo di 13, che si è avuto pure in un solo caso, ed una media di 40 per parto. Nel secondo parto si ha un notevole aumento del numero dei piccoli deposti, specialmente rispetto al primo, in cui la media raggiunge il livello più basso. Nel terzo parto il numero dei nati diminuisce, ma si mantiene sempre ad un livello più alto dei nati del primo. Questi risultati si accordano con quelli ottenuti precedentemente e particolarmente con quelli dell'estate del 1933, se si prescinde dal fatto che, in questi ultimi, le medie si mantengono ad un livello più basso. Rimane così accertato che il maggior numero dei nati della stagione si ha al secondo parto, mentre i primi sono i meno numerosi. Come si vede, in questo fenomeno la presenza o meno dei maschi non esercita alcuna influenza, mentre pare non possa escludersi un certo rapporto con l'andamento della temperatura ambientale.

Rapporto sessuale dei nati. — Nonostante fosse nota sin dal 1892, epoca a cui risalgono le prime osservazioni di Smith⁽¹⁾ su *G. patruelis*, la forte sproporzione numerica esistente tra i due sessi nelle specie del genere *Gambusia*, sproporzione constatata anche da Artom⁽²⁾ per la *G. holbrookii* acclimatata in Italia, sino allo scorso anno, in cui pubblicai le mie prime osservazioni, nessuna notizia si aveva sul rapporto sessuale alla nascita,

(1) SMITH H. M., *Notes on a collection of Fishes from the Lower Potomac river Maryland.* «Bull. U. S. Fish. Comm.», vol. 10, 1892.

(2) ARTOM C., *La sproporzione numerica dei sessi nella «Gambusia holbrookii» analizzata nelle sue cause molteplici.* «Rend. R. Accad. Lincei», vol. XXXIII, 1924.

per la difficoltà, cui qualche autore accenna ⁽¹⁾, di distinguere il sesso dei piccoli appena nati, e di mantenerli in vita sino alla comparsa dei caratteri sessuali. Facevo allora rilevare come fosse assolutamente indispensabile procedere all'accertamento del sesso immediatamente dopo il parto, dato che, per cause le quali sfuggono al nostro controllo, negli allevamenti, quantunque tenuti con tutte le cure possibili, si ha sempre una certa percentuale di nati, che va incontro alla morte. E l'esame istologico delle gonadi dei piccoli, fissati interi e sezionati, si è rivelato l'unico metodo atto ad evitare quegli errori, cui inevitabilmente è caduto qualche autore, che ha tentato l'esame delle gonadi a fresco, per dilacerazione. Infatti spesso anche nelle sezioni si può confondere l'ovario col testicolo, quando non si è acquistata una sufficiente conoscenza dei due organi.

Accertato il rapporto sessuale dei nati dalle femmine, che erano rimaste per tutta l'estate insieme coi maschi, era opportuno vedere se esso subisce spostamenti quando le femmine, fecondate che siano al principio della primavera, partoriscono senza avere avuto più, per tutta la durata del periodo riproduttivo, rapporti coi maschi. Tale controllo si rendeva necessario anche per stabilire quale valore dovesse darsi alla ipotesi avanzata da Artom ⁽²⁾ per spiegare l'andamento del rapporto sessuale, riscontrato nella generazione autunnale di una femmina di *G. holbrookii*. Questa tra il 26 ed il 27 luglio aveva partorito 15 piccoli, di cui 8 femmine e 6 maschi; evidentemente uno era andato perduto. La seconda generazione l'A. dice che è andata perduta. Il terzo parto, avvenuto nei primi di settembre, aveva dato 75 piccoli, di cui 43 femmine, 27 maschi e 5 di sesso incerto. Colpito dalla forte sproporzione esistente tra i due sessi in questa generazione autunnale, Artom ha pensato che, col sopraggiungere della stagione autunnale, supposto eterogametico il sesso maschile, al momento della fecondazione negli ovidotti della femmina fossero presenti, o semplicemente più vitali, piuttosto gli spermatozoi con tendenza a determinare il sesso femminile, che non gli altri con tendenza opposta.

Ma, a parte il fatto che, come risulta dalle mie ricerche eseguite nella primavera ed estate del 1933, quella sproporzione numerica tra i due sessi, che aveva particolarmente richiamato l'attenzione dell'Artom, e che l'aveva spinto a formulare la ipotesi avanti accennata, è un fenomeno che avviene normalmente, anche ai primi parti della stagione, era opportuno istituire delle ricerche di controllo.

Da un primo esame dei dati raccolti nella Tabella si rileva che esistono degli scarti molto forti, talvolta a favore dei maschi, talvolta a favore delle femmine, senza che il fenomeno presenti alcuna regolarità. Infatti, se

(1) GEISER S. W., *Sex-rations and spermatogenesis in the Top-Minnow « Gambusia holbrookii »*. « Biol. Bull. », vol. 47, 1924.

(2) ARTOM C., loc. cit.

ci fermiamo solo a considerare l'andamento del rapporto sessuale dei nati dal primo parto, vediamo che mentre nei piccoli deposti dalla femmina *A* i maschi raggiungono l'85.7%, a cui corrisponde un rapporto sessuale di 16.6 femmine per ogni 100 maschi, nei nati della femmina *H* le femmine raggiungono il 70.6%, a cui corrisponde un rapporto sessuale di 240 femmine per ogni 100 maschi. E che il rapporto sessuale oscilla entro limiti molto ampi appare ancora più evidente quando si passi a considerare il sesso dei nati nei singoli parti, che in questa serie di ricerche non sono andati oltre il terzo. Se consideriamo infatti i nati del secondo parto vediamo che esistono gli stessi sbalzi, fra la percentuale dei maschi e quella delle femmine, riscontrati al primo parto; e così anche fra i nati del terzo, senza che il fenomeno obbedisca ad alcuna legge. Da un esame complessivo dell'andamento del rapporto sessuale si può solo rilevare che esso varia più notevolmente da una femmina all'altra, che nei vari parti di una stessa femmina, per quanto anche talvolta in questi si abbiano delle notevoli differenze. L'andamento del rapporto sessuale è però tale che in definitiva si viene a raggiungere un certo equilibrio tra i nati dei due sessi. Infatti, le 10 femmine, che sono state tenute in osservazione, hanno dato complessivamente, in 24 parti, 878 piccoli, di cui 435 erano maschi e 443 femmine. Se consideriamo poi i nati da ogni parto, vediamo che dei 300 piccoli, che rappresentano il prodotto del primo parto di tutte le femmine, 152 erano maschi e 148 femmine, rapporto che si può considerare vicinissimo a 1:1.

Nei nati dal secondo parto si osserva la stessa lieve differenza fra i nati dei due sessi, riscontrata al primo parto, senonchè in questo caso la differenza è a favore delle femmine; sicchè dei 338 piccoli, che rappresentano il prodotto del secondo parto di otto delle 10 femmine, 157 erano maschi e 181 femmine. Fra i nati del terzo parto si nota un lieve predominio dei maschi sulle femmine, risultato che è in pieno contrasto con quanto pensava Artom. Questo predominio è però tale da non determinare un vero spostamento, infatti dei 240 piccoli, che rappresentano il prodotto del terzo parto di sei delle 10 femmine, 126 erano maschi e 114 femmine, a cui corrisponde un rapporto sessuale di 90.4 femmine per ogni 100 maschi.

Dal confronto di questi risultati con quelli che si sono avuti, tenendo le femmine insieme coi maschi per tutta la durata del periodo riproduttivo, si rileva che la loro presenza non esercita alcuna influenza sul rapporto sessuale dei nati; rapporto che presenta nei singoli parti delle forti oscillazioni, pur realizzandosi in definitiva un certo equilibrio tra il numero dei maschi e quello delle femmine.

Varie ed importanti questioni si ricollegano col fenomeno che ho potuto mettere in evidenza, seguendo un metodo, che io credo si possa considerare privo di cause di errore. Questioni che spero di potere presto risolvere, essendo ormai a buon punto le ricerche istologiche sulla gonade

femminile, la quale, come è noto, funziona anche da tasca incubatrice. Ed ho creduto opportuno — vincendo la naturale tendenza ad affrontare quel lato di ogni problema biologico che può appagare più facilmente la nostra giusta curiosità — seguire quell'indirizzo che mi ha consentito di andare risolvendo gradualmente, ma in modo esauriente, tutto il complesso e vasto insieme di incognite, che presentava la biologia sessuale di questo Ciprino-donte.

Conclusioni. — Il rapporto sessuale dei nati di *G. holbrookii*, nei singoli parti, presenta quelle stesse forti oscillazioni, talvolta a favore dei maschi talvolta delle femmine, che sono state osservate nelle precedenti ricerche. L'andamento è tale però che in definitiva si viene a raggiungere un certo equilibrio tra i nati dei due sessi. Pare possa quindi escludersi qualsiasi influenza relativa sia alla convivenza coi maschi, sia all'epoca in cui ha luogo il parto, contrariamente a quanto pensava Artom.

Al secondo parto si ha un notevole aumento del numero dei piccoli deposti, rispetto al primo; nel terzo parto il numero dei piccoli diminuisce, ma si mantiene sempre ad un livello più alto dei nati del primo.

L'inizio della attività riproduttiva di ogni stagione sta in diretto rapporto con la temperatura media primaverile.

Tra il secondo ed il terzo parto è interposto il tempo più breve, non solo come media, giorni 20,5, ma anche come valore minimo, giorni 19.

Biologia (Zoologia). — *Notizie sulla diffusione della « Trutta genivittata »* ⁽¹⁾. Nota di I. DELPINO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Facendo seguito ad una Nota presentata nella seduta del 6 gennaio della Reale Accademia dei Lincei, nella quale riportavo i caratteri di alcune trote che erano state pescate nell'Adige e che erano state pertanto classificate come appartenenti alla *Trutta genivittata* (Heckel-Kner, 1858), sottospecie di cui finora si era fatta scarsissima menzione nella fauna ittiologica d'acqua dolce d'Italia, e assicurato che tale trota non si deve considerare come un ibrido o una varietà di *lacustris* o di *fario*, riferisco ora quanto ho potuto indagare circa la distribuzione e la diffusione di tale trota.

La *Trutta genivittata* che era una volta ritenuta esclusiva dell'Isonzo (Heckel), si trova invece abbondantemente sia da noi che sulle coste della Dalmazia, ove il Karaman ne ha riscontrata la presenza sia nei fiumi co-

(1) Dal R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia, diretto dal professore G. Brunelli.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1935.

stieri, come il Kerca, il Narenta e il piccolo Narenta, che negli affluenti del lago di Scutari, indicandone inoltre molto probabile l'esistenza anche nelle acque dell'Albania e dell'Epiro.

Dalle indagini recentemente compiute, risulta che da noi essa è diffusa solo nell'Italia Settentrionale, mentre è sconosciuta del tutto sia nell'Italia Centrale che nella Meridionale.

Volendo studiare la diffusione di tale trota in particolare nell'Italia Settentrionale, essa ha principalmente una distribuzione in relazione al bacino del Po: infatti se ne hanno esemplari provenienti dall'alto Po stesso e dai suoi affluenti, prevalentemente di sinistra, quali l'Orco, la Dora Baltea, il Sesia, il Ticino, l'Oglio e il Mincio, e dagli affluenti indiretti quali il Toce, l'Adda, nel suo corso superiore, e il Sarca; fra gli affluenti di destra si hanno notizie sicure della sua presenza solo nel Maira.

Comunissima e in quantità molto maggiore delle altre trote è la *Trutta genivittata* nei fiumi del Veneto, direttamente sfocianti nell'Adriatico, come l'Adige, ove si rinviene nella zona a monte fino a Rovereto, nonché nel Brenta, nel Piave e nel Tagliamento, ove la *genivittata* è sempre diffusa nel corso superiore di tali fiumi; anche nella zona carsica abbiamo sicurezza della sua presenza nell'Isonzo, nel Timavo e nel Risano.

È interessante anche conoscere sotto quali denominazioni questa trota è indicata dai pescatori. Da notizie avute, essa, tanto nel circondario di Brescia che nel Vicentino, è contraddistinta col nome di « nostrana » o « nera », dalla *fario*, detta invece « bresciana » o « importata » o « trota salmonata ». Viene quindi dai pescatori ritenuta indigena la *genivittata*, già invece considerata da altri autori come importata. (Scotti, 1898). Nel Bellunese invece è indicata come « trota del Piave ».

Concludendo: la *T. genivittata* è diffusa nei fiumi o nei torrenti, ma di grossa portata, e nel tratto più a monte di essi, così che si potrebbe definire il suo « habitat » come montano — con ragioni più intrinseche dovute alla temperatura — e in relazione a quantità idriche abbondanti e ciò evidentemente per il regime alimentare che tali acque possono offrire, dato che questa specie è molto vorace (come risulta dall'esame del contenuto stomacale). Questa voracità potrebbe spiegare perchè le *fario* che vengono annualmente immesse nell'Adige non si ritrovino più allo stato adulto; infatti alcuni avannotti sarebbero distrutti e gli altri si rifugierebbero nei torrenti a piccola portata d'acqua (ove realmente si catturano le *fario*) mentre nei grossi fiumi resterebbero le *genivittate*.

La diffusione quindi di tale trota è dovuta principalmente sia alle cause sopradette, sia alle continue semine che vengono compiute a scopo di ripopolamento. Infatti oltre all'incubatorio di Caporetto, ove vengono quasi esclusivamente incubate uova di *genivittate*, in molti altri incubatori, da grandi a piccoli impianti, come ad esempio quello di Belluno, di Torbole, di Brescia e di Borgo S. Dalmazzo, vengono fatte schiudere uova ritenute

ancora, per l'antica confusione, appartenenti alla *lacustre* e alla *fario*, mentre invece da sopraluoghi fatti, risulta chiaramente che appartengono alla *Trutta genivittata*. Grandissimo quindi è il numero degli avannotti che in tal modo vengono ogni anno immessi dai Consorzi per il ripopolamento.

Su tale argomento, il prof. Brunelli, con la sua competenza, afferma che l'etologia di questa trota è legata a grandi quantità di acqua ed in zone montuose, e che l'eccezionale robustezza della *genivittata* le permette di acquistare, nello stesso ambiente, uno sviluppo somatico maggiore delle altre trote, e di avere su di queste la prevalenza.

Biologia. — *Sulla natura degli ultravirus*. Nota di C. ACQUA, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere inviate in dono all'Accademia segnalando il vol. XXXIII dell'Archivio italiano di Anatomia e di Embriologia pubblicato in onore del Socio Chiarugi, per il suo 75° compleanno; il « Trattato di Embriologia III. Gli annessi embrionali » di G. Chiarugi; « Das Venensystem der Japaner » di B. Adachi; una pubblicazione polacca in onore di Copernico (Wizerunki Kopernika); « Erreurs de Mathématiciens des origines à nos jours » di M. Lecat, « Flora siamensis enumeratio » di W. S. Crail.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci LEVI-CIVITA e RAFFAELE.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 aprile 1935

- ADACHI BUNTARO. — Das Venensystem der Japaner. Lieferung I. Kyoto, 1933. 4°, pp. 1-85.
- AMODEO FEDERICO. — Accenni ai più importanti temi trattati nella scuola matematica napoletana (1615-1860). La Scienza della prospettiva nel secolo XVIII, nuovi indirizzi scientifici che da essa scaturiscono; e la ripresa della geometria descrittiva. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », Riunione XXIII, vol. II. Pavia, 1935. 8°, pp. 1-7.
- AMODEO FEDERICO. — Argomenti trattati nella scuola matematica napoletana (1615-1860). Appendice sintetica all'opera « Vita matematica napoletana ». Napoli, 1934. 8°, pp. 1-16.
- AMODEO FEDERICO. — Sulla storia della prospettiva. (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Pontaniana ». Vol. LXIII). Napoli, 1933. 8°, pp. 1-5.
- Annuario della R. Stazione Chimico-agraia di Torino. Vol. XII. Parte A. B. 1932-1934. Torino, 1935. 8°, pp. 1-412; I-VI, 1-435.
- Archivio italiano di anatomia e di embriologia. Vol. XXXIII, pubblicato in onore di Giulio Chiarugi. Firenze, Ditta Editrice Luigi Niccolai, 1934. 8°, pp. 1-930, tav. I-XL.
- BATOWSKI ZYGMUNT. — Wizerunki. Kopernika. Torun, 1933. 4°, pp. 1-93.
- BRANCHINI BRUNO. — Di una rara forma di dermatomicosi nel cane. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia ». Serie IV, vol. VI). Siena, 1935. 8°, pp. 1-53.
- CHIARUGI G. — Trattato di embriologia. Parte III. Gli annessi embrionali. Milano, 1934. 8°, pp. 1-523.
- CRAIB W. G. — Florae Siamensis enumeration. Vol. I. Polypetaeae. Bangkok, 1931. 8°, pp. 1-809.
- D'ARSONVAL A. — Jubilé du Professeur A. D'Arsonval, 27 mai 1933. Malakoff, 1933. 8°, pp. 1-97.
- Ente Autonomo per l'Acquedotto Pugliese. Relazione al Parlamento sull'andamento dell'azienda dal 1° luglio 1933-XI, al 30 giugno 1934-XII. Bari, Società Editrice Tipografica, 1933. 8°, pp. 1-133.
- EYRAUD HENRI. — Sur une représentation nouvelle des corrélations continues. (Travaux de l'Institut de Science Financière et d'Assurances de l'Université de Lyon. N.° 23). Paris, 1934. 4°, pp. 1355-1358.
- LECAT MAURICE. — Erreurs de Mathématiciens des origines à nous jours. Bruxelles, 1935. 8°, pp. 1-XII, 1-166.
- LECAT MAURICE. — Etude sur le Larousse du XX^e siècle. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». 1933, pp. 328-334). Louvain, 1933. 8°.
- LECAT MAURICE. — Remarques sur l'azéotropisme en relation avec la polymérisation et la solvation et sur l'azéotropisme négatif considéré au point de vue fonctionnel. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome LIX, pp. 283-290). Louvain, 1934. 8°.
- LECAT MAURICE. — Sur la fréquence de l'azéotropisme sans point de Bancroft et de l'azéotropisme borné. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome LIV, pp. 211-215). Louvain, 1934. 8°.
- LECAT MAURICE. — Sur les systèmes liquides ternaires. Contributions à leur classification au point de vue de l'ébullition.

- (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Serie B. sciences physiques et naturelles, tome LIV, page 120-125). Louvain, 1934. 8°.
- MARCHAL PAUL. — Discours et allocutions prononcés a l'occasion du V^e Congrès international d'Entomologie. Paris, 18-24 Juillet 1932, pp. 37-59. Paris, 1932. 8°.
- MARECHAL PAUL. — Les aphides de l'orme et leurs migrations. (Extr. des « Annales des Epiphyties ». Année XIX, n. 4-5, pp. 207-329). Paris, 1933. 8°.
- Ministero dei Lavori Pubblici. — La ferrovia per lo Stato della Città del Vaticano. Roma, 1934. 4°, pp. 1-87.
- PALOMBI MARINO. — Fisica, tecnica e legislazione dei cementi. (Estr. da « l'Industria Italiana del cemento », Anno VI, n. 11). Roma, 1934. 4°, pp. 1-3.
- POLLACCI GINO. — Rassegna sull'attività del R. Laboratorio Crittogamico di Pavia. (R. Osservatorio fitopatologico per le provincie di Cremona, Parma, Pavia e Piacenza) durante l'anno 1934. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia ». Serie IV, vol. VI). Siena, 1935. 8°, pp. 1-18.
- POLLACCI GINO. — Sopra una nuova specie di miceti commensale (*Phoma hominis* Agostini et Tredici), isolato da forme cliniche del derma. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia ». Serie IV, vol. VI). Siena, 1935. 8°, pp. 1-3.
- SER-GIACOMI GIULIO. — La costante cosmica. (Critica a l'« Universo in espansione » di Sir Arthur Eddington). Roma, 1925. 8°, pp. 1-47.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 28 aprile 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geologia. — *La serie di Montenotte come elemento costituente delle Alpi Occidentali e dell'Appennino.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ROYERETO.

Da parecchi anni ho distinto un particolare assieme di scisti rasati, filladico-sericitici, varicolori, uniti a radiolariti (a Montenotte), a marmi e calcari micacei, a diverse pietre verdi, al quale si può conferire il nome di *serie di Montenotte*, e che è intercalato nel Savonese fra i noti calcari dolomitici del trias medio, e la serie liassica dei calcescisti, per modo che l'ho riferito al trias superiore ⁽²⁾.

Per ricerche posteriori posso ora dire, che con la distinzione della serie di Montenotte si ha un nuovo elemento costitutivo, metamorfico, delle Alpi Occidentali, elemento nei più dei casi collegato con la falda del Gran San Bernardo, o con le falde secondarie che questa accompagnano, ad esempio con quella dell'Embrunais, o che è pizzicato nella zona delle pietre verdi: tralascio per ora di considerare che una facies simile si trova nella falda retica, se a questa appartiene la zona a radiolariti del Canavese.

Passando alle Alpi Liguri, troviamo, che Marco Airoidi ha di recente rinvenuto la serie di Montenotte in colleganza col massiccio gneissico di Calizzano, in una posizione eguale a quella osservata nella località tipica del Savonese ⁽³⁾; poi io l'ho meglio limitata ed estesa sia verso occidente, nei dintorni di Ferrania e Cairo, sia verso oriente nei dintorni di Corona.

(1) Presentata nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXVIII, 1909, p. 396 e Carta Geol. della tav. XIII.

(3) « Rend. R. Accad. Lincei », vol. XIX, 1934, p. 169.

Con la guida di ciò che ho osservato a Corona, ho riconosciuto che la serie in esame si trova qua e là a pizzico nella zona dei calcescisti del massiccio ligure del Gruppo di Voltri. È anche per me sicuro, che la serie triassica di Montenotte, con i suoi svariati trucioli, è identica alla serie scistosa, pure del trias superiore e a trucioli, del Promontorio Orientale del Golfo della Spezia, che è quindi un'unica cosa — e ciò non è certo poco — con la serie scistosa marmifera del trias superiore delle Apuane. Quelle poche masse di cipollini, o di altri marmi, che si osservano a Capo Corvo, alla C. delle Isole di Montenotte, e in alcuni luoghi delle valli piemontesi, sostituiscono i saccaroidi apuani dei livelli superiori.

Tutto questo ha sapore di novità, perchè nei rilevamenti fatti nelle Alpi Occidentali, e dei quali è ora ultimata la pubblicazione, la formazione degli scisti rasati triassici va confusa con quella dei calcescisti liassici, e, fors'anche, in alcuni casi, con quella dei sericitoscisti paleozoici.

Venendo a casi concreti, si riconosce, ad esempio, che a M. Cruzeau (vedasi la Carta Geologica al 1 : 100.000, foglio Cesana), località classica, dopo lo studio di C. G. Parona, gli scisti rasati, e non i calcescisti, racchiudono le radiolariti, associate a variate pietre verdi. Ciò è ancora più nettamente osservabile lungo la salita da Cesana al Monginevro, dove, quando si è alle grandi risvolte della strada sotto il Colle, si trova una grossa lente di radiolariti, accompagnata da scisti rasati, e, come ha segnalato il Franchi, da un diabase variolitico, laminato.

Nella stessa regione esistono, in territorio francese, i giacimenti di radiolariti, oppure di corneane od *Hornfels* (sostituzione che si osserva anche a Montenotte) di M. Chenaillet, di Cima del Gondran, dell'Arpet, notate nella carta geologica francese (foglio Briançon, ediz. del 1933) come accompagnate da micascisti (non da calcescisti), e che presentano, insieme a quelli italiani, più allineamenti interrotti, dato il complicato ondeggiamento tettonico regionale, ma che in complesso possono dirsi situati, come a Montenotte, fra l'insieme calcareo-dolomitico del trias medio, e anche del superiore (parte inferiore), della falda del Gran San Bernardo e i calcescisti.

Proseguendo verso mezzogiorno, secondo l'orientamento dato dalla falda del Gran San Bernardo, si trova che sono stati segnalati diaspri da Zaccagna a M. Salza ⁽¹⁾, e da Franchi al Colle della Traversière, nei dintorni di Acciglio ⁽²⁾. Sono località in cui la Carta Geologica (foglio Dronero-Argentera) nota calcescisti con pietre verdi, ma che sono in realtà fuori della gran zona o falda dei calcescisti, che sta al loro oriente, e che si trovano invece in relazione con la falda del Gran San Bernardo: è probabile che esista con essi una zona di scisti rasati.

In differenti condizioni tettoniche si trovano gli scisti varicolori lungo la Vermenagna e a Roccavione, accompagnati da radiolariti sotto il ponte

(1) « Boll. R. Comit. Geol. », vol. VIII, p. 387, 1887.

(2) « Boll. R. Comit. Geol. », vol. XLII, 1911.

di Vernante, secondo una segnalazione fatta dal Parona e da me, quando si studiò le radiolariti di Montenotte. Il tutto è situato fra il margine parautoctono del massiccio delle Alpi Marittime e la fronte della falda del Gran San Bernardo, e indica la presenza della serie di Montenotte anche nella fronte della falda, dove sempre mancano, invece, i calcescisti. Ciò si coordina con quello che si osserva nella falda frontale dell'Embrunais, dove per un lungo tratto, secondo Schoeller ⁽¹⁾, si hanno scaglie di un trias costituito da scisti varicolori.

Si giunge così alle Alpi Liguri, ossia all'area che per la serie di Montenotte è tipica.

Ho segnalato col Parona, sin dal 1895, le radiolariti di Villanova Mondovì, che si trovano a ponente di questa località, insieme a scisti varicolori, e sono poste fra i calcescisti e i calcari triassici. Di seguito, e poco lungi, tra la Valle dell'Ellero e quella del Casotto, il Franchi ⁽²⁾ ha scoperto una zona di scisti a ottrelite (o meglio a cloritoide), indicata con esattezza nel foglio Boves, la quale sostituisce a mio giudizio gli scisti varicolori: è suggestivo pensare che scisti a cloritoide simile si trovano nelle Alpi Apuane, nella stessa serie del trias superiore: Franchi considera invece, che questi scisti a cloritoide appartengano alla formazione dei calcescisti.

Aggiungerò che scisti a cloritoide esistono in Val Ceresolo, del gruppo di Voltri fra i calcescisti; ma anche qui sono probabilmente portati ad affiorare da un nucleo anticlinalico, come ora vedremo; con tutto ciò sono però lungi dal pensare che tutti gli scisti a cloritoide delle Alpi siano del trias.

Poi vengono, come sopra ho detto, sempre lungo il passaggio tra la falda del Gran San Bernardo a quella dei calcescisti, i giacimenti a ridosso del massiccio gneissico di Calizzano e dell'area tipica di Montenotte, che si protrae sino a comprendere la grande massa gabbriica, glaucofanitica, di Corona, che per un lato è collegata a scisti varicolori e per un'altro ai calcescisti.

Tutte le masse di gabbri glaucofanitici, con altre non glaucofanitiche ad esse unite, del gruppo di Voltri, si trovano in posizione periferica ai calcescisti, oppure associate in strano modo agli affioramenti dei calcari dolomitici triassici.

È nella prima posizione, oltre la massa di Corona, il classico giacimento di gabbri a glaucofane e a lawsonite di Pegli; però bisogna anche dire che hanno la stessa posizione molte altre masse di gabbri, non glaucofanitici, come ad esempio quella, che è la più grande fra tutte, di Cogoleto-Varazze. Esiste però un notevole carattere distintivo, che consiste nel fatto,

(1) « Bol. Soc. Géol. France », p. 78, 1927.

(2) Ne ho pubblicato il rilievo in « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXVIII, p. 416, 1909, fig. 13.

che queste masse periferiche, non glaucofanitiche, e non triassiche, mandano numerose apofisi filoniane nelle altre rocce attornianti, che a Cogoletto sono serpentine e peridotiti (foce dell'Arestra), associate ai calcescisti, apofisi che mancano nelle masse triassiche.

In quanto al secondo modo di giacimento, si osserva il gabbro allungato in strette lenti, talvolta profondamente milonitizzato, modellato secondo il contorno della massa calcarea, triassica, lungo il confine orientale della zona dei calcescisti: sono quindi gabbri collegati all'anticlinale corrispondente a tale confine, e affiorante dai calcescisti: si osservano a Monte Spassuà dietro la massa calcarea di M. Gazzo; a Rocca Macca, associati a scisti varicolori, a ridosso dell'isola triassica di M. Torbi; poi, nel modo il più tipico, fra serpentina e calcare, tutt'attorno al confine occidentale dell'isola calcarea di Gallaneto, sino alla conca di Cravasco; termina la serie l'enorme lente gabbrica, accompagnata da scisti glaucofanitici e granatiferi, di M. Leco, che per tale composizione si distingue da altre vicine masse gabbriche comprese negli scisti del flysch cretaceo e associate a diabasi, ma che non saprei dire, con sicurezza, se è appartenente al trias oppure alla serie dei calcescisti, perchè manca il calcare, e solo un lembo di scisti esiste sopra C. Cortin, fra gabbro e la grande zona di serpentine e peridotite di M. delle Figne, ma è profondamente alterato, e non si può dire se si tratta di scisti rasati, o di calcescisti.

Basandoci, invece, unicamente sulla natura degli scisti, possiamo asserire, in modo più o meno sicuro, che nel gruppo di Voltri esistono ancora altri lembi della serie di Montenotte, al Promontorio di Arenzano, e in Val Ceresolo sopra Voltri.

All'estremo del Promontorio di Arenzano non vi sono calcescisti, ma vari scisti micacei, alcuni eguali a quelli a chiazze di mica bianca che si osservano a Capo Corvo. Sono appoggiati contro a un'isola di calcare dolomitico e a quarziti triassiche, e contengono trucioli dello stesso calcare, e una lente di prasinite⁽¹⁾.

Lungo la valle del Ceresolo siamo sull'asse tormentato di un anticlinale, per il quale affiorano, da sotto i calcescisti, quarziti e scisti talco-quarzitici, evidentemente triassici⁽²⁾.

Sullo stesso allineamento delle quarziti si osservano, lungo il Ceresolo, talcoscisti ad attinolite, talcoscisti a cloritoide (C. Tavernino), albitoscisti zoizitici, epidotici, glaucofanitici.

Tronco per ora questa enumerazione, la quale però può già nettamente servire a far per la prima volta ammettere, che il massiccio delle pietre verdi del Gruppo di Voltri, racchiudendo nell'insieme dei suoi calcescisti dei lembi della serie di Montenotte, è composto da scisti metamorfici e da pietre verdi di due età.

(1) Vederne il rilievo in « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXVIII, p. 409, 1909, fig. 9, nella quale figura però gli scisti micacei vanno compresi con i vicini calcescisti.

(2) Rappresentato in « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXVIII, p. 414, fig. 12.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui differenziali d'ordine superiore.* Nota di M. RENATA FABBRI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. L'invertibilità dell'ordine delle differenziazioni nei differenziali secondi costituisce una proprietà invariantiva, come è noto ⁽²⁾: mi propongo di dare a questo risultato una forma che si può estendere a differenziali di ordine qualunque.

Precisamente introdotti gli operatori alternanti di secondo ordine

$$(d, \delta) = d\delta - \delta d,$$

si vedrà in primo luogo che le $(d, \delta)x^i$ costituiscono un sistema contravariante; e perciò, se esso si annulla in un sistema di variabili si annulla in tutti (invarianza dell'invertibilità). Si vedrà poi che anche le differenze di due differenziali generici di ordine $m + 1$, provenienti da scambio di due simboli di differenziazione, costituiscono un sistema contravariante, purchè siano invertibili i differenziali fino all'ordine m , cioè purchè siano nulli i corrispondenti alternanti di ordine $\leq m$.

Questa osservazione è atta a semplificare un risultato di Pèrès, come mostrerò in fine alla mia Nota.

2. Consideriamo un sistema di n variabili x^i e una funzione qualsiasi, di esse, $f(x^1, x^2 \dots x^n)$ (derivabile quanto occorre).

Si applichi a f l'alternante (d, δ) : si trova che

$$(1) \quad (d, \delta)f = \sum_i f_i (d, \delta)x^i$$

in cui le $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ costituiscono un sistema covariante ⁽³⁾, e $(d, \delta)f$ è invariante, per essere invarianti gli operatori d e δ . Se ne deduce che $(d, \delta)x^i$ costituisce un sistema contravariante, come si era annunciato.

3. Nel caso di differenziali di ordine qualunque, $m + 1$, si possono ripetere le considerazioni precedenti, osservando che, nell'ipotesi già espressa che i differenziali siano invertibili fino all'ordine m

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, cap. V, § 19, p. 136.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, cap. IV, § 11, p. 97.

$$(2) \quad \underbrace{(d \, d' \, d'' \, \dots \, \delta \, \delta' \, \delta'' \, \dots)}_{m+1} f = \sum_i^n f_i \underbrace{(d \, d' \, d'' \, \dots \, \delta \, \delta' \, \delta'' \, \dots)}_{m+1} x^i,$$

dove $(d \, d' \, d'' \, \dots \, \delta \, \delta' \, \delta'' \, \dots)$ rappresenta l'alternante ottenuto per scambio di due segni di differenziazione qualsiasi.

Infatti, differenziando successivamente il differenziale primo

$$df = \sum_i^n f_i \, dx^i$$

il maggior ordine di differenziazione nelle x si ha in corrispondenza del termine che, lasciando inalterata la f_i , opera con tutti i possibili operatori d e δ sulle x^i . Tutti gli altri termini della (2), contenenti differenziali di ordine minore, si elidono a coppie per l'ipotesi fatta sull'invertibilità fino all'ordine m . Ometto il calcolo diretto, assolutamente elementare.

Nel caso di differenziali del terzo ordine questo risultato è stato trovato già dal prof. Levi-Civita⁽¹⁾; la dimostrazione veramente si riferisce a differenziali dati dalla teoria del parallelismo, ma il teorema vale anche in generale, come si può rilevare sia da un esame diretto della dimostrazione stessa, sia dalle precedenti osservazioni.

4. Nella nota critica che termina la memoria già gitata sulla *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc. il prof. Levi-Civita rileva una difficoltà d'interpretazione di un passo di Riemann⁽²⁾. In esso Riemann afferma che l'espressione invariante

$$(3) \quad R = \delta^2 \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, dx^k - 2 \, d\delta \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, \delta x^k + d^2 \sum_{ik}^n b_{ik} \, \delta x^i \, \delta x^k$$

è $= 2I$ purchè i differenziali secondi siano determinati in modo che sia

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, \delta x^k - \delta \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, \delta' x^k - d \sum_{ik}^n b_{ik} \, \delta x^i \, \delta' x^k = 0 \\ \delta' \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, dx^k - 2 \, d \sum_{ik}^n b_{ik} \, dx^i \, \delta' x^k = 0 \\ \delta' \sum_{ik}^n b_{ik} \, \delta x^i \, \delta x^k - 2 \, \delta \sum_{ik}^n b_{ik} \, \delta x^i \, \delta' x^k = 0 \end{array} \right.$$

(δ' è una variazione qualunque).

(1) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo...* «Circ. Mat. di Palermo», vol. XLII, 1917, § 16.

(2) RIEMANN, *Commentatio Math.* «Ges. Werke», p. 380 e sgg.

I rappresenta la forma biquadratica

$$\sum_{i,j,k,l} (ij, kl) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l.$$

Le (4) danno per i differenziali secondi le stesse espressioni introdotte dal prof. Levi-Civita mediante la teoria del parallelismo, ma se si adottano per i differenziali terzi i valori che ne risultano si trova $R = 0$, e non $R = 2I$ come afferma Riemann.

Il Pérès⁽¹⁾ affronta la questione e dà un'esauriente risposta: il teorema precedente può forse render più espressivo il suo ragionamento.

Egli comincia col porre

$$R = R_1 + R_2$$

raggruppando in R_2 tutti i termini contenenti differenziali terzi. Supponendo invertibili, come è lecito, i differenziali secondi risulta

$$(5) \quad R_2 = 2 \sum_{i,k} b_{ik} dx^i (\delta d \delta x^k - d \delta \delta x^k).$$

Per quanto si è detto nel numero precedente la saturazione degli indici di covarianza e controvarianza nel tensore a secondo membro della (5) mostra che R_2 è invariante. Dalla (3) risulta l'invarianza della R e perciò è invariante anche R_1 . Tale invarianza, che naturalmente è relativa a trasformazione di variabili e non alle differenti convenzioni che si possono fare sui differenziali, ci permette di studiare il comportamento di R_1 e di R_2 rispetto a un sistema qualsiasi di variabili, per esempio geodetiche, nel generico punto che si considera.

Se si adottano i differenziali secondi e successivi dati dalla teoria del parallelismo R_1 e R_2 sono diversi da zero, ma è zero la loro somma: se si adottano invece i differenziali introdotti da Pérès nella Nota citata, solo R_1 è diverso da zero. Il calcolo diretto di R_1 , che riporto in nota⁽²⁾, non presenta alcuna difficoltà, ma si può evitare, come fa anche Pérès. Infatti

(1) PÉRÈS, *A proposito di una nozione di parallelismo*. « Rendiconti Lincei », vol. XXIX₁, 1920, pp. 134-138.

(2) In variabili geodetiche

$$\begin{aligned} R_1 = R &= \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} [\delta x^l \delta x^j dx^i dx^k - 2 dx^l \delta x^j dx^i \delta x^k + dx^l dx^j \delta x^i \delta x^k] = \\ &= \sum_{i,j,k,l} \left[\frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - 2 \frac{\partial^2 b_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 b_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right] dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l = \end{aligned}$$

in coordinate geodetiche i differenziali secondi di Levi-Civita e quelli di Pèrès sono uguali, perchè tutti nulli, e quindi la R_i ha nei due casi lo stesso valore. Nella teoria del parallelismo $R_i = -R_2$ e R_2 risulta uguale a $-2 I^{(i)}$. Dunque, purchè si adottino i differenziali secondi e successivi introdotti da Pèrès (che però non hanno carattere invariante),

$$R = R_i = 2 I$$

conforme l'affermazione di Riemann.

$$\begin{aligned} &= \sum_i^n {}^{ikjl} \left(\frac{\partial^2 b_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 b_{il}}{\partial x^j \partial x^k} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l - \\ &- \sum_i^n {}^{ikjl} \left(\frac{\partial^2 b_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l. \end{aligned}$$

Se nel secondo sommatorio scambiamo, come è lecito, j con l e i con k si ottiene

$$\begin{aligned} R_i = R &= \sum_i^n {}^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l - \\ &- \sum_i^n {}^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l = \\ &= \sum_i^n {}^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l - \\ &- \sum_i^n {}^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} \right) dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l = \\ &= 2 \sum_i^n {}^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i & l \\ & j \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & j \end{matrix} \right\} \Big\} dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l. \end{aligned}$$

E quindi, risulta

$$R = 2 I.$$

(1) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, cap. VII, § 2, p. 201, form. (4).

Matematica. — *Sulla regolarità delle superficie algebriche.*
Nota di L. ROTH, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. La ricerca delle condizioni di regolarità delle superficie algebriche, indispensabile per la classificazione di esse, è rimasta finora un campo quasi inesplorato, all'infuori dei teoremi classici che citeremo nel seguito. Però pochi anni fa, per cortesia del prof. Severi ho potuto vedere un manoscritto inedito del Comessatti che contiene il germe d'una teoria estesa, la quale nei suoi sviluppi sarà indubbiamente di grande interesse; i teoremi di Comessatti, un po' amplificati in qualche punto, si troveranno in una Nota ⁽²⁾ che ho pubblicata l'anno scorso, e che è stata seguita da due altre ⁽³⁾ in cui ho fatto varie semplificazioni ed estensioni dei primi criteri. Scopo della presente Nota è di esporre alcuni di questi risultati in forma definitiva e di aggiungere dei nuovi teoremi che qui possono trovare posto.

Supponiamo sempre che si tratti d'una superficie F non rigata di S_r ($r > 3$), priva di singolarità, di cui le sezioni iperpiane $|C|$ hanno l'ordine n e il genere π . Denotiamo con $\pi_r(n)$ il massimo genere d'una curva irreducibile di S_r , di ordine n , sicchè sarà ⁽⁴⁾

$$(I) \quad \pi_r(n) = \chi \left\{ n - r - \frac{1}{2} (\chi - 1)(r - 1) \right\},$$

ove

$$\frac{n-1}{r-1} - 1 \leq \chi < \frac{n-1}{r-1}.$$

Incominciamo con un risultato dovuto a Castelnuovo ⁽⁵⁾:

I. Se C è normale in S_{r-1} e $\pi = n - r + 1$, la superficie F è regolare e di genere zero.

Questo teorema si può dire il primo nel nostro campo, il secondo in ordine storico essendo

II. Se $n > 2\pi - 2$ oppure $r \geq 3$ $\pi - 5$ F è razionale o riferibile a rigata.

Un terzo teorema fondamentale, di cui la dimostrazione è semplicissima, è

III. Se $n = 2\pi - 2$ e $r \geq \pi - 1$, F è regolare, essendo il genere $p_g \leq 1$.

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) L. ROTH, *On the regularity of surfaces*. «Proc. Camb. Phil. Soc.», 30, 1934, p. 4.

(3) L. ROTH, *On the regularity of surfaces*, II e III. «Ibid.», p. 271 e p. 404.

(4) CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*. «Atti R. Acc. Torino», 24, 1889, p. 346.

(5) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*. «Math. Annalen», 44, 1894, p. 125.

2. Passiamo a considerare una linea di ricerca che segue un ordine di idee elementari. Se F contiene un fascio razionale di curve piane di ordine v , essa sarà contenuta nella varietà V_3 generata dai piani, la quale si può supporre normale in S_r e quindi di ordine $r-2$. Evidentemente il genere π di C sarà

$$(2) \quad \pi = (v-1)(n-1) - \binom{v}{2}(r-2),$$

e dalla rappresentazione di V_3 sullo spazio S_3 si trova che il genere aritmetico di F viene dato ⁽¹⁾ da

$$(3) \quad p_a = \binom{v-1}{2}(n-1) - 2 \binom{v}{3}(r-2).$$

In base a codesta rappresentazione e alle (2) e (3) si deduce ⁽²⁾ che

IV. *Se F contiene un fascio razionale di curve piane di ordine v , essa è regolare se $4\pi \geq (n-1)(v-1)$, e riferibile ad una rigata se*

$$4\pi < (n-1)(v-1).$$

3. Dal teorema IV segue subito il fatto che, se le sezioni di F conengono una g_2^1 oppure g_3^1 , F sarà regolare o riferibile a rigata, anzi nel primo caso è razionale: questi due risultati sono dovuti rispettivamente a Castelnuovo ⁽³⁾ e Bronowski ⁽⁴⁾.

Un'altra applicazione di grande utilità viene dall'osservazione che per i valori di π sufficientemente alti, la superficie F deve contenere un fascio razionale di curve piane (se $r > 4$), salvo nel caso $r = 6$, il quale può esigere un esame speciale ⁽⁵⁾: tutto ciò discende dalle ricerche di Fano ⁽⁶⁾ sulle curve di massimo genere di S_r , ove si trovano stabiliti i limiti inferiori di π purchè tale condizione sia soddisfatta.

Per ora ci contenteremo di riportare qualche corollario del teorema IV ottenuto in questa maniera:

- a) Se $\pi = \pi_{r-1}(n)$, F è regolare.
- b) Se $\pi = \pi_{r-1}(n) - k$, ove $n \geq (k+2)(r-2) + 2$, F è regolare.

(1) Questa formula mi è stata comunicata dal sig. Bronowski.

(2) Vedi la prima delle Note citate in (3) a p. 1.

(3) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*. «Rend. Circ. Mat. Palermo», 4, 1890, p. 73.

(4) BRONOWSKI, *The surfaces whose prime sections contain a g_3^1* . «Proc. Camb. Phil. Soc.», 30, 1934, p. 170.

(5) Vedi loc. cit. in (2) a questa pagina.

(6) FANO, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi di uno spazio qualunque*. «Mem. R. Acc. Torino», 44, 1894, p. 335.

c) Se $n > 2r - 2$ e $\pi > \chi \left\{ n - \frac{r}{2} - \chi \left(\frac{r-2}{2} \right) \right\}$, ove

$$\frac{n-r-2}{r-2} \leq \chi < \frac{n-r-2}{r-2} + 1, \text{ F è regolare.}$$

4. È certo che esistono numerose estensioni del teorema sopra citato: consideriamo intanto le superficie che contengono un sistema di curve ellittiche. È noto⁽¹⁾ da tempo che

V. Se F contiene una rete di curve ellittiche, essa è razionale o riferibile ad una rigata ellittica.

Supponiamo che F contenga un fascio razionale di curve ellittiche, senza punti base; allora segue da un teorema di Enriques⁽²⁾ che in generale F è regolare: i casi eccezionali sono quelli delle superficie ellittiche con $p_g = 0$, e delle superficie riferibili a rigate ellittiche. Però, si sa che tali superficie ellittiche non possono contenere un fascio razionale di curve ellittiche di ordine 4 neppure di ordine p , ove p è un numero primo qualsiasi, e quindi

VI. Se F contiene un fascio razionale, senza punti base, di curve ellittiche di ordine 4 oppure di ordine p (p essendo un numero primo qualsiasi), essa è regolare o riferibile ad una rigata ellittica.

Di più, il Bronowski ha dimostrato che una superficie ellittica avente $p_g = 0$ non può possedere un fascio razionale di curve ellittiche normali giacenti in spazi di dimensione minore di $r - 1$, e così deduce che

VII. Se F contiene un fascio razionale di curve ellittiche normali giacenti in spazi di dimensione minore di $r - 1$, essa è regolare o riferibile ad una rigata ellittica.

Ora si può dimostrare con Bronowski che

VIII. Se C contiene una g_4^1 , F è regolare o riferibile a rigata.

Infatti, la g_4^1 è segata da un fascio razionale di quartiche (salvo che F non stia su d'una quadrica di S_4 , nel quale caso è regolare) le quali sono o razionali o ellittiche oppure curve piane: nel primo caso F è razionale e negli altri casi è regolare o riferibile, in base ai teoremi IV e VI.

5. Un'altra via si può seguire usando il concetto dei sistemi continui di curve esistenti su d'una superficie irregolare; e così, adoperando questo concetto e ragionando per assurdo si perviene alla seguente generalizzazione del teorema III:

IX. Se $n = 2\pi - 2 - i$ ($i \leq 4$) e $r \geq n - \pi + 1$, F è regolare o riferibile a rigata.

(1) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*. « Rend. R. Acc. Lincei » (5), 3, 1894, p. 473.

(2) ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p(1) = 1$* . « Rend. R. Acc. Bologna », 9, 1906, p. 11.

Un caso particolare, per il quale $i = 1$, si trova considerato nel manoscritto di Comessatti. L'estensione ai valori $i \leq 3$ è stata fatta da me ⁽¹⁾, e il caso $i = 4$, che discende dal teorema VIII, è dovuto a Bronowski.

6. Come abbiamo osservato al n. 3, l'esistenza d'una g_2^1 sopra le sezioni C di F ci permette di concludere che essa è razionale; dunque, allo scopo di trovare un criterio più ampio di quello già stabilito, si può cercare quali curve C contengono un'involuzione γ_2^1 , le corrispondenti superficie F possedendo di conseguenza un fascio irrazionale di coniche. Ebbene, per l'appunto Comessatti ⁽²⁾ ha dimostrato che se una g_n^r sopra una curva di genere π ha l'ordine $n < \pi - 1$ e la dimensione $r > n/3$, la g_n^r sarà composta con una γ_2^1 di genere $p \leq n/6$. Nel caso $r = n/3$, se la serie è composta, lo sarà $\delta/$ con una γ_2^1 oppure una g_3^1 ; e se essa è semplice, sarà $\pi = \pi_r(n)$ o $\pi_r(n) - 1$. Applicando codesti risultati alla serie caratteristica di $|C|$, troviamo che se $n < 3(r - 1)$, F è regolare o riferibile a rigata; se $n = 3(r - 1)$ e la C contiene una γ_2^1 o g_3^1 , F è regolare o riferibile; oppure si ha $\pi = \pi_{r-1}(n)$ o $\pi_{r-1}(n) - 1$ e si ricade nel teorema IV, corollari a) e b). Quindi concludiamo che

X. Se $n < \pi - 1$ e $n \leq 3(r - 1)$, F è regolare o riferibile ad una rigata.

Infine notiamo che Comessatti ha pure trovato, nello stesso lavoro, che condizione sufficiente, purchè una curva di genere π contenga una g_3^1 , è l'esistenza su di essa d'una serie di ordine n tale che $2\pi - 2 > n > \pi - 1$, e di dimensione $(2n - \pi + 1)/3$. Dunque, dal teorema IV si deduce che

XI. Se $2\pi - 2 > n > \pi - 1$ e $3r = 2n - \pi + 4$, F è regolare o riferibile a rigata.

7. In conclusione sarà forse interessante notare quali risultati si ottiene quando i criteri già citati vengono applicati all'esame delle superficie di S_4 . Anzitutto osserviamo che se $n \leq 7$, dalla (1) abbiamo sempre $n > 2\pi - 2$, e quindi dal teorema II segue che tutte le superficie senza singolarità per cui $n \leq 7$ sono razionali o riferibili a rigate. Se $n = 8$ lo stesso teorema vale per $\pi \leq 4$, e siccome $\pi_3(8) = 9$, rimangono da discutere i casi $5 \leq \pi \leq 9$. Per $\pi = 5$ si applica il teorema III, per $\pi = 6, 7$ vale il teorema IX, e per $\pi = 8, 9$ vale il IV. Aggiungiamo in proposito che dall'esame delle superficie riferibili a rigate si stabilisce le seguenti proposizioni ⁽³⁾:

Se $n < 8$, F è regolare.

Se $\pi < 6$ e F è irregolare, essa è riferibile ad una rigata ellittica.

(1) Vedi la seconda Nota citata in (3) a p. 1.

(2) COMESSATTI, Limiti di variabilità della dimensione e dell'ordine d'una g_n^r sopra una curva di dato genere. «Atti R. Ist. Veneto», 74, 1915 (parte 2^a), p. 1685.

(3) L. ROTH, On surfaces of sectional genres five. «Proc. Camb. Phil. Soc.», 30, 1934, p. 123.

Seguendo così la ricerca delle superficie irregolari, si trova che la superficie di ordine minimo, priva di singolarità e non riferibile a rigata, ha i caratteri $n = 10$, $\pi = 6$, $p_g \leq 1$, $p_a = -1$. L'esistenza di tali superficie è stata stabilita da Enriques e Severi ⁽¹⁾, i quali hanno costruito una superficie di Picard avente questi caratteri, e indipendentemente da Comessatti ⁽²⁾, che ha trovato una superficie del tipo richiesto tra le superficie di Jacobi semplicemente singolari. Del resto, si potrebbe pensare che esistesse pure una superficie ellittica con $n = 10$, $\pi = 6$; però che così non sia viene dimostrata in un lavoro recente ⁽³⁾.

Matematica. — Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche.

Nota I di E. CIANI, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

1. In evidente analogia col noto fascio sizigetico di cubiche piane, chiamerò, con uguale denominazione, il seguente fascio di superficie cubiche

$$\sum_{i=1}^4 x_i^3 + 6\lambda(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3) = 0$$

dove le x_i sono coordinate omogenee di punto nello spazio e λ è il parametro del fascio. Le sezioni piane delle facce del tetraedro fondamentale sono costituite da altrettanti fasci sizigetici di cubiche piane.

2. Prima di procedere nello studio proposto, credo utile qui richiamare le seguenti nozioni riguardanti alcune classi di superficie cubiche.

Se accade che per un punto P di una superficie cubica S_3 , passino 3 rette di S_3 , esistenti in un piano π , il punto P si chiama di Eckardt (dal nome del primo autore che considerò questo caso particolare): anche il piano π prende ugual nome e così pure la superficie S_3 .

Escludendo il caso che P sia doppio per S_3 , si vede facilmente che la quadrica polare di P spezza in due piani di cui uno è π e l'altro π' che non passa per P e si suol chiamare il piano polare armonico di P. Questo punto P è doppio per la Hessiana e quindi è un vertice del pentaedro di Sylvester. La superficie S_3 è invariante rispetto alla omologia armonica che ha il centro in P e per piano fondamentale π' (polare armonico di P) ⁽⁵⁾.

(1) ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. « Acta Math. », 32, 1909, p. 283.

(2) COMESSATTI, *Sulle superficie di Jacobi semplicemente singolari*. « Mem. Soc. Italiana delle Scienze », ser. 3^a, 21, 1919, p. 45.

(3) L. ROTH, *Some types of irregular surfaces*. « Proc. Camb. Phil. Soc. », 31, 1935.

(4) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(5) Vedi ad es. la mia Nota, *Sulle superficie algebriche simmetriche*, in « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VI, 1890. — De Paolis chiama flesso di S_3 un punto P di

Viceversa se S_3 è invariante rispetto a una omologia armonica, risulta facilmente che il centro è un punto di Eckardt e il piano fondamentale è il piano polare armonico relativo. Una S_3 può contenere tutti i 10 vertici del pentaedro di Sylvester (realizzando così il caso massimo). Si ottiene allora la *superficie diagonale di Clebsch*⁽¹⁾.

3. Considero adesso il caso in cui la S_3 (supposta non rigata) sia invariante rispetto ad una involuzione gobba di assi r ed s . Pensando alle rette unite della involuzione (che sono appoggiate ad r ed s) risulta facilmente che uno degli assi suddetti appartiene a S_3 : sia r .

Assumendo questa retta come ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) la involuzione gobba in parola si può rappresentare con la sostituzione

$$I \equiv \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Bmatrix}$$

dopo di che, esigendo la invarianza di S_3 rispetto a I si trova per la sua equazione la seguente forma

$$ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3 + ex_1x_3^2 + fx_1x_4^2 + gx_2x_3^2 + hx_2x_4^2 + \\ + kx_1x_3x_4 + lx_2x_3x_4 = 0.$$

Allora la quadrica polare di un punto $(0, 0, \lambda, 1)$ generico di r , si può rappresentare così

$$x_1[x_3(2e\lambda + k) + x_4(k\lambda + 2f)] + x_2[x_3(2g\lambda + l) + x_4(l\lambda + 2h)] = 0$$

la quale si spezzerà in due piani se accadrà che le due parentesi quadre annullate rappresentino lo stesso piano per la qual cosa occorre che sia

$$\begin{vmatrix} 2e\lambda + k & k\lambda + 2f \\ 2g\lambda + l & l\lambda + 2h \end{vmatrix} = 0$$

la quale, essendo di 2° grado in λ , dimostra che sopra r ci sono due punti di Eckardt. Si conclude dunque:

Se una S_3 , priva di punti doppi, è invariante rispetto a una involuzione gobba, uno degli assi della involuzione appartiene ad S_3 e sopra tale asse ci sono

Eckardt, perchè ogni sezione piana di S_3 per tale punto ha ivi un flesso e quindi, in analogia con le cubiche piane, è naturale di chiamare piano polare armonico di P quello sopra indicato con π' (che cioè fa parte della quadrica polare di P senza passare per P). Veggasi, DE PAOLIS, *Ricerche sulle superficie di 3° ordine*. Nota II. « Atti R. Acc. Lincei », 1880-81, p. 10.

(1) Vedi ad es. l'altra mia Nota: *Sulla superficie diagonale di Clebsch*. « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. VII, 1931.

due punti di Eckardt. Ne consegue la invarianza di S_3 rispetto anche alle due omologie armoniche individuate (nel modo scritto nel n. 2) dai due punti suddetti. Il prodotto di queste omologie è la involuzione in parola. Se si aggiunge la identità si perviene così ad uno dei tre gruppi quadrimoni possibili di collineazioni spaziali e precisamente al G_4''' descritto in un altro mio lavoro⁽¹⁾. La S_3 è quindi invariante rispetto a tale G_4''' .

4. Finalmente, prima ancora di passare allo studio, oggetto principale del presente scritto, occorre considerare il caso di una S_3 invariante rispetto a una omologia spaziale a periodo 3. Assumendo il centro di questa supposta omologia quale punto (0 0 0 1) e il piano fondamentale quale $x_4 = 0$, essa potrà rappresentarsi con la sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \alpha x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\} \quad \text{con } \alpha^3 = 1 \quad (\alpha \text{ rad. primit.}).$$

Esigendo adesso la invarianza di S_3 rispetto a questa omologia si trova per S_3 la equazione seguente

$$ax_4^3 + u_3 = 0$$

dove a è una costante e u_3 una ternaria cubica in $x_1 x_2 x_3$.

Segue che la quadrica polare di (0 0 0 1) è il piano doppio $x_4^2 = 0$.

Viceversa: suppongo la esistenza di un punto la cui quadrica polare sia un piano doppio non passante per il punto.

Scrivo la equazione di S_3 nella consueta forma

$$u_0 x_4^3 + u_1 x_4^2 + u_2 x_4 + u_3 = 0$$

dove le u_i sono ternarie in $x_1 x_2 x_3$ di grado pari all'indice (e quindi u_0 è una costante). Assumendo il punto suddetto quale (0 0 0 1) e il piano doppio quale $x_4 = 0$, la condizione supposta trae che u_1, u_2 siano identicamente nulle, dopo di che risulta la invarianza di S_3 rispetto alla omologia cubica dianzi rappresentata. Calcolando poi l'Hessiana di S_3 si vede facilmente che essa si compone di $x_4 = 0$ e del cono cubico che da (0 0 0 1) proietta l'Hessiana di $u_3 = 0$. Dunque:

Per una superficie cubica S_3 sono condizioni equivalenti le seguenti:

- a) Esistenza di un punto la cui quadrica polare sia un piano doppio non passante per il punto;
- b) Invarianza rispetto ad una omologia a periodo tre che ha per centro e piano fondamentale il punto e il piano suddetti.

(1) CIANI, Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari. « Annali di Matematica », to. VIII, ser. III, p. 4, 1902.

Siccome poi l'Hessiana di S_3 si compone del piano in parola e del cono cubico che dal punto suddetto proietta la Hessiana della sezione di S_3 col piano medesimo, così ne viene che i nove flessi di tale sezione sono altrettanti punti doppi della superficie Hessiana nominata e quindi altrettanti punti di Eckardt di S_3 . La conferma analitica di questo si consegue scrivendo la equazione di S_3 così

$$ax_4^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6bx_1x_2x_3 = 0$$

e osservando che ad es. la quadrica polare del punto $P \equiv (1, -1, 0, 0)$ si compone dei due piani

$$x_1 + x_2 - 2bx_3 = 0 \quad , \quad x_1 - x_2 = 0$$

di cui il 1° è tangente a S_3 in P e quindi la taglia in 3 rette ivi convergenti e il 2° è il piano polare armonico relativo (n. 2).

Ecco dunque realizzato un esempio di superficie cubica dotata di nove punti di Eckardt (nei nove flessi suddetti). Le 27 rette della superficie si distribuiscono in nove terne di Eckardt, i cui piani passano tutti per il punto la cui quadrica polare è il piano doppio più volte nominato.

5. Prendiamo ora in esame il fascio sizigetico

$$(1) \quad \sum_i^4 x_i^3 + 6\lambda(x_1x_3x_4 + x_2x_4x_1 + x_3x_1x_2 + x_4x_2x_3) = 0.$$

Cominceremo dall'osservare che tutte le S_3 del fascio passano per i 6 seguenti punti

$$\begin{aligned} A &\equiv (1, -1, 0, 0) & B &\equiv (0, 1, -1, 0) & C &\equiv (0, 1, 0, -1) \\ A' &\equiv (0, 0, 1, -1) & B' &\equiv (1, 0, 0, -1) & C' &\equiv (1, 0, -1, 0) \end{aligned}$$

i quali esistono sul piano $\sum_i^4 x_i = 0$ e costituiscono i vertici del quadrilatero secondo il quale tale piano sega le 4 facce del tetraedro fondamentale. Ciascuno di tali punti è di Eckardt per ciascuno S_3 . Ad es. la quadrica polare di A si compone dei due piani

$$x_1 + x_2 - 2\lambda(x_3 + x_4) = 0 \quad , \quad x_1 - x_2 = 0$$

il primo dei quali è tangente ad S_3 in A e il secondo è il piano polare armonico relativo (n. 2). L'omologia armonica che ha il centro in A e per piano fondamentale il polare armonico suddetto trasforma ogni S_3 in se stessa e può rappresentarsi con la sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\}.$$

Dunque intanto:

Tutte le superficie del fascio posseggono sei punti di Eckardt nei sei punti $A A', B B', C C'$ sopra indicati. Essi costituiscono le 3 coppie di vertici opposti del quadrilatero secondo il quale il piano unità taglia i 4 piani fondamentali $x_i = 0$.

Sono dunque da riguardarsi come punti-base del fascio e costituiscono quindi 6 vertici del pentaedro di Sylvester comuni a tutte le S_3 del fascio.

Matematica. — *Derivazione tensoriale composta negli spazii non puntuali.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una varietà a n dimensioni $V(x^1, x^2, \dots, x^n)$, è dato un tensore qualsiasi: per esempio, il tensore di componenti T_{ij} . Per definizione, quando si fa un mutamento di coordinate

$$(1) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le componenti dello stesso tensore nel nuovo sistema sono

$$(2) \quad \bar{T}_{ij} = \sum_{pq} T_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Supponiamo che le componenti T_{pq} se esprimano *esplicitamente* nelle coordinate x^i e nelle componenti di un tensore qualunque: per esempio, del tensore doppio di componenti u_α^β . Cioè

$$T_{pq} = T_{pq}(x^i, u_\alpha^\beta) \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

Siccome

$$(3) \quad u_\alpha^\beta = \sum_{rs} \bar{u}_r^\beta \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s},$$

le componenti $\bar{T}_{ij}$ si possono esprimere esplicitamente, per le (1), (3) e pel sistema inverso di (1)

$$(1') \quad x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

nelle coordinate $\bar{x}^i$ e nelle componenti $\bar{u}_r^\beta$ del tensore (u) . Cioè

$$\bar{T}_{ij} = \bar{T}_{ij}(\bar{x}^i, \bar{u}_r^\beta).$$

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

Derivando (2) parzialmente rispetto a $\bar{u}_r$, risulta

$$\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial \bar{u}_r} = \sum_{pq} \frac{\partial T_{pq}}{\partial \bar{u}_r} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

ossia

$$(4) \quad \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial \bar{u}_r} = \sum_{pq\alpha\beta} \frac{\partial T_{pq}}{\partial u_\alpha^\beta} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta},$$

in virtù della (3).

Le equazioni (4) mostrano che $\frac{\partial T_{pq}}{\partial u_\alpha^\beta}$ sono componenti di un tensore quadruplo, covariante con indici p, q, β e contravariante con indice α .

La proprietà è generale:

I) Se le componenti $T_{(a)}^{(b)}$ di un tensore con a indici di covarianza e b indici di contravarianza, si esprimono (oltre che con le variabili x) a mezzo delle componenti $u_{(c)}^{(d)}$ di un tensore con c indici di covarianza e d indici di

controvarianza, le derivate parziali $\frac{\partial T_{(a)}^{(b)}}{\partial u_{(c)}^{(d)}}$ sono componenti di un tensore con $b + c$ indici di controvarianza e $a + d$ indici di covarianza.

Vuol dire: Mentre le derivate parziali $\frac{\partial T_{(a)}^{(b)}}{\partial x^i}$ delle componenti di un tensore, rispetto alle variabili x^i , non sono, in generale, componenti di un tensore (e perciò s'è creata la derivazione covariante) lo sono le derivate

parziali $\frac{\partial T_{(a)}^{(b)}}{\partial u_{(c)}^{(d)}}$ delle stesse componenti $T_{(a)}^{(b)}$ rispetto alle componenti $u_{(c)}^{(d)}$ di

qualsiasi tensore che figuri esplicitamente in $T_{(a)}^{(b)}$. Tale derivazione parziale aumenta di d unità l'ordine di covarianza e di c unità l'ordine di controvarianza del tensore T .

2. Consideriamo uno spazio, i cui elementi siano costituiti da un punto $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ di una varietà a n dimensioni e da uno o più enti geometrici, definiti un per uno da un sistema di parametri omogenei (dei quali interessano soltanto i rapporti mutui) che siano componenti di un tensore. [Così, per esempio, si definiscono gli spazi d'elementi lineari, formati, ciascuno da un punto $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ e da una direzione, definita da n parametri $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ omogenei che sono componenti di un vettore].

Sia, per esempio, uno spazio d'elementi definiti:

a) da un punto $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, che chiameremo centro dell'elemento;

b) da una direzione, definita da n parametri omogenei $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ che sono componenti d'un vettore controvariante;

c) da un ente geometrico, definito da parametri omogenei $u_{\alpha\beta}$, che sono componenti di un tensore doppio covariante.

A un tale spazio sarà data connessione euclidea se saranno dati:

1° La metrica, in prossimità dell'elemento (x, x', u) , definita da una forma quadratica

$$(5) \quad g_{hk}(x, x', u) dx^h dx^k$$

che dà il quadrato della distanza del centro (x) dell'elemento (x, x', u) al centro $(x + dx)$ dell'elemento $(x + dx, x' + dx', u + du)$. (Le funzioni g_{hk} , omogenee e di grado zero rispetto alle variabili x' e alle variabili u , sono componenti di un tensore doppio).

Un vettore di componenti (X^i) ha la lunghezza

$$\sqrt{g_{hk} X^h X^k};$$

e tale lunghezza dipende dai tre sistemi di variabili (x, x', u) che definiscono l'elemento d'appoggio.

2° L'incremento di un vettore (X^i) , quando il suo elemento d'appoggio subisce una variazione infinitesima. Le sue componenti saranno della forma

$$(6) \quad DX^i = dX^i + \Gamma_{h \cdot b}^i X^b dx^h + C_{k \cdot b}^i X^b dx'^k + E_{h \cdot b}^{i \cdot pq} X^b du_{pq}.$$

I parametri determinativi Γ, C, E non sono arbitrari, se vorremo soddisfare la condizione che resti invariata la grandezza di un vettore (X^i) quando è nullo il suo differenziale assoluto. Infatti, essendo

$$(DX^i) = 0,$$

$$\begin{aligned} d(g_{hk} X^h X^k) &= dg_{hk} \cdot X^h X^k + g_{hk} \cdot dX^h \cdot X^k + g_{hk} \cdot X^h \cdot dX^k = \\ &= dg_{hk} \cdot X^h X^k - g_{hk} [\Gamma_{l \cdot i}^{h \cdot} X^l dx^i + C_{l \cdot i}^{h \cdot} X^l dx'^i + E_{l \cdot i}^{h \cdot pq} X^l du_{pq}] X^k - \\ &- g_{hk} [\Gamma_{l \cdot i}^{h \cdot} X^l dx^i + C_{l \cdot i}^{h \cdot} X^l dx'^i + E_{l \cdot i}^{h \cdot pq} X^l du_{pq}] X^h = \\ &= dg_{hk} \cdot X^h X^k - X^k [\Gamma_{lki} X^l dx^i + C_{lki} X^l dx'^i + E_{lki}^{i \cdot pq} X^l du_{pq}] - \\ &- X^h [\Gamma_{lhi} X^l dx^i + C_{lhi} X^l dx'^i + E_{lhi}^{i \cdot pq} X^l du_{pq}] = \\ &= [dg_{hk} - (\Gamma_{hki} dx^i + C_{hki} dx'^i + E_{hki}^{i \cdot pq} du_{pq}) - \\ &- (\Gamma_{khi} dx^i + C_{khi} dx'^i + E_{khi}^{i \cdot pq} du_{pq})] X^h X^k = \\ &= [dg_{hk} - (\Gamma_{hki} + \Gamma_{khi}) dx^i - (C_{hki} + C_{khi}) dx'^i - (E_{hki}^{i \cdot pq} + E_{khi}^{i \cdot pq}) du_{pq}] X^h X^k. \end{aligned}$$

Perchè questa differenziale sia nulla, dev'essere

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g_{hk}}{\partial X^i} &= \Gamma_{hki} + \Gamma_{khi} & a) \\ \frac{\partial g_{hk}}{\partial x'^i} &= C_{hki} + C_{khi} & b) \\ \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_{pq}} &= E_{hki}^{i \cdot pq} + E_{khi}^{i \cdot pq} & c). \end{aligned} \right.$$

Pel teorema I, le grandezze $(6')b$ e $(6')c$ sono componenti di tensori, simmetrici rispetto agli indici h e k , in virtù della simmetria dei g_{hk} . D'altra parte, per una variazione infinitesima del vettore (X^i) , che annulli il suo differenziale assoluto, lasciando fisso il centro (x^i) dell'elemento di appoggio ed il tensore $(u_{\alpha\beta})$, sarà

$$dX^i + C_{k \cdot h}^{i \cdot} X^k dx'^h = 0,$$

ossia

$$(7) \quad \frac{\partial X^i}{\partial x'^h} = -C_{k \cdot h}^{i \cdot} X^k.$$

E, siccome $\left(\frac{\partial X^i}{\partial x'^h}\right)$ è un tensore doppio misto, $(C_{k \cdot h}^{i \cdot})$ sarà un tensore triplo, le cui componenti covarianti sono C_{kih} , funzioni omogenee, di grado — 1, rispetto alle variabili x'^i . Se il tensore (C_{khi}) fosse simmetrico rispetto ai due primi indici, sarebbe in particolare

$$(8) \quad C_{bki} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bk}}{\partial x'^i}.$$

Questa è una delle convenzioni del prof. Cartan nella struttura degli spazi di Finsler, in cui l'elemento d'appoggio è lineare (cioè, in cui il tensore doppio $(u_{\alpha\beta})$, innanzi considerato, non interviene nella definizione degli elementi dello spazio)⁽¹⁾.

Si vede egualmente che, nello spazio di cui ci occupiamo, (E_{hk}^{pq}) è un tensore che, se simmetrico rispetto ad h e k , ha componenti della forma

$$(9) \quad E_{hkpq}^{..} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_{pq}}.$$

Dato un tensore qualunque (supponiamo il tensore doppio (T_{ij})), sarà

$$(10) \quad DT_{ij} = dT_{ij} - (\Gamma_{ih}^{\lambda} T_{\lambda j} + \Gamma_{jb}^{\lambda} T_{i\lambda}) dx^b - (C_{i \cdot b}^{\lambda \cdot} T_{\lambda j} + C_{j \cdot b}^{\lambda \cdot} T_{i\lambda}) dx'^b - (E_i^{\lambda hl} T_{\lambda j} + E_j^{\lambda hl} T_{i\lambda}) du_{hl}.$$

Supponendo invariabile il centro (x^i) dell'elemento d'appoggio e anche invariabile l'ente geometrico definito da (u_{hl}) ; rappresentando con $\nabla'_h T_{ij}$ il coefficiente corrispondente a dx'^h nella espressione del differenziale covariante DT_{ij} , sarà

$$(11) \quad \nabla'_h T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x'^h} - C_{i \cdot h}^{\lambda \cdot} T_{\lambda j} - C_{j \cdot h}^{\lambda \cdot} T_{i\lambda}.$$

(1) Le convenzioni A, B, C, D, E del prof. Cartan sono equivalenti ad A, E e

A'): (C_{khi}) è un tensore simmetrico rispetto ad k, h, i .

(Les Espaces de Finsler, pp. 10).

Ed è evidente, pel teorema I e perchè $(C_i^{\lambda \cdot h})$ è un tensore, che $(\nabla_h T_{ij})$ è un tensore. È egualmente un tensore $(\nabla_{hl}' T_{ij})$, definito da

$$(12) \quad \nabla_{hl}'' T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial u_{hl}} - E_i^{\lambda hl} T_{\lambda j} - E_j^{\lambda hl} T_{i\lambda}.$$

Ma non è tale $(\nabla_h T_{ij})$, definito dalle formule

$$(13) \quad \nabla_h T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} - \Gamma_{ib}^{\lambda} T_{\lambda j} - \Gamma_{jb}^{\lambda} T_{i\lambda}.$$

Cioè, nella espressione

$$(14) \quad DT_{ij} = dx^b \cdot \nabla_b T_{ij} + dx'^b \nabla'_b T_{ij} + du_{hl} \cdot \nabla_{hl}'' T_{ij}$$

del differenziale assoluto, sono componenti di tensori soltanto i coefficienti di dx'^b e di du_{hl} .

Possiamo ancora scrivere

$$(15) \quad DT_{ij} = dx'^b \nabla_b^* T_{ij}$$

essendo

$$(16) \quad \nabla_b^* T_{ij} = \left(\nabla_b + \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} \nabla'_k + \frac{\partial u_{kl}}{\partial x^b} \nabla_{kl}'' \right) T_{ij}.$$

$(\nabla_b^* T_{ij})$ è un tensore e la sua espressione generalizza quella della derivata della funzione composta, nel calcolo differenziale ordinario. Nello spazio puntuale, definito da (x^i) , in cui (x'^i) e (u_{kl}) sono tensori, è

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} = x'^k_{|b} - \Gamma_{\lambda b}^k x'^{\lambda} \\ \frac{\partial u_{kl}}{\partial x^b} = u_{kl|b} + \Gamma_{kb}^{\lambda} u_{\lambda l} + \Gamma_{lb}^{\lambda} u_{k\lambda}. \end{cases}$$

Se il differenziale assoluto (DT_{ij}) corrisponde ad uno spostamento infinitesimo dell'elemento d'appoggio, in cui (x'^i) e (u_{kl}) hanno un trasporto parallelo, nello spazio puntuale (x^i) , le componenti della derivata covariante $(\nabla_b^* T_{ij})$ si ottengono sostituendo in (16) i valori di (17) corrispondenti a $(x'^k_{|b}) = 0$ e $(u_{kl|b}) = 0$.

Per esempio, se lo spazio è di elementi lineari (non entrando nella sua definizione il tensore (u_{kl})), sarà, nella ipotesi di un trasporto parallelo del vettore (x'^i) ,

$$(18) \quad \nabla_b^* T_{ij} = (\nabla_b - \Gamma_{\lambda b}^k x'^{\lambda} \nabla'_k) T_{ij};$$

(espressione questa del tensore $T_{ij|b}$, definito dal prof. Cartan)⁽¹⁾.

(1) *Les Espaces de Finsler*, pp. 18, formola XIV.

3. Saranno particolarmente interessanti gli spazi di *elementi plurilineari*: per esempio, lo spazio di *elementi bilineari* in cui ogni elemento è definito dal centro (x^i) e da due direzioni

$$(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \quad \text{e} \quad (x''^1, x''^2, \dots, x''^n),$$

ciascuna delle quali definita da n parametri omogenei che sono componenti di un vettore controvariante.

La *metrica* sarà definita da una forma quadratica

$$(19) \quad g_{hk}(x, x', x'') dx^h dx^k$$

che dà il quadrato della distanza del centro (x^i) dell'elemento (x, x', x'') al centro $(x^i + dx^i)$ dell'elemento

$$(x + dx, x' + dx', x'' + dx'').$$

Le g_{hk} , omogenee e di grado zero relativamente alle variabili x' e x'' , sono componenti di un tensore doppio. Un vettore (X^i) ha per lunghezza

$$\sqrt{g_{hk} X^h X^k},$$

e tale lunghezza dipende dai tre sistemi di variabili $(x), (x'), (x'')$, che definiscono l'elemento d'appoggio.

Il differenziale assoluto di un vettore (X^i) ha per componenti

$$(20) \quad DX^i = dX^i + \Gamma_{k \cdot h}^{i \cdot} X^k dx^h + C_{k \cdot h}^{i \cdot} X^k dx'^h + E_{k \cdot h}^{i \cdot} X^k dx''^h.$$

Perchè la grandezza del vettore resti invariabile, quando il suo differenziale assoluto è nullo, debbono verificarsi le condizioni $(6') a)$, $(6') b)$ e la condizione

$$(6') d) \quad \frac{\partial g_{hk}}{\partial x''^i} = E_{hki} + E_{khi}.$$

(C_{khi}) e (E_{hki}) sono *tensori tripli*; se simmetrici rispetto ad h ed a k , sarà

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{hki} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial x'^i} \\ E_{hki} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial x''^i} \end{array} \right.$$

Il differenziale assoluto di un tensore doppio T_{ij} sarà

$$(21) \quad DT_{ij} = dx^h \nabla_h T_{ij} + dx'^h \nabla'_h T_{ij} + dx''^h \nabla''_h T_{ij}$$

in cui $\nabla_b T_{ij}$ e $\nabla'_b T_{ij}$ hanno le espressioni (13) e (11) e

$$(22) \quad \nabla''_b T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x''^b} - E_{i \cdot b}^{\cdot \lambda} T_{\lambda i} - E_{j \cdot b}^{\cdot \lambda} T_{i \lambda}.$$

$(\nabla'_b T_{ij})$ e $(\nabla''_b T_{ij})$ sono tensori; ma non è tensore $(\nabla_b T_{ij})$.

Sarà anche

$$(23) \quad DT_{ij} = dx^b \nabla_b^* T_{ij},$$

dove

$$(24) \quad \nabla_b^* T_{ij} = \left(\nabla_b + \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} \nabla'_k + \frac{\partial x''^k}{\partial x^b} \nabla''_k \right) T_{ij}$$

sono componenti d'un tensore, la cui espressione generalizza quella della derivata della funzione composta.

Se i vettori (x'^i) e (x''^i) , che definiscono (con (x^i)) l'elemento di appoggio, hanno un trasporto parallelo nello spazio puntuale (x^i) , sarà

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} = -\Gamma_{\lambda \cdot b}^{\cdot k} x'^\lambda \\ \frac{\partial x''^k}{\partial x^b} = -\Gamma_{\lambda \cdot b}^{\cdot k} x''^\lambda \end{cases}$$

perchè sono nulli $(x'^k_{|b})$ e $(x''^k_{|b})$.

4. Nel caso d'un vettore (X^i) , l'equazione (24) piglia la forma

$$\nabla_b^* X^i = \left(\nabla_b + \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} \nabla'_k + \frac{\partial x''^k}{\partial x^b} \nabla''_k \right) X^i,$$

essendo

$$\begin{cases} \nabla_b X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^b} + \Gamma_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} X^\lambda \\ \nabla'_b X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x'^b} + C_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} X^\lambda \\ \nabla''_b X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x''^b} + E_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} X^\lambda. \end{cases}$$

Supponendo che si verifichino le relazioni (25), che cioè (x'^i) e (x''^i) abbiano trasporto parallelo; e facendo

$$\begin{cases} \frac{\delta X^i}{\delta x^b} = \frac{\partial X^i}{\partial x^b} + \frac{\partial X^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^b} + \frac{\partial X^i}{\partial x''^k} \frac{\partial x''^k}{\partial x^b} \\ \tilde{\Gamma}_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} = \Gamma_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} - \Gamma_{p \cdot b}^{\cdot k} x'^p C_{\lambda \cdot k}^{\cdot i} - \Gamma_{p \cdot b}^{\cdot k} x''^p E_{\lambda \cdot k}^{\cdot i} \end{cases}$$

sarà

$$(26) \quad \nabla_b^* X^i = \frac{\delta X^i}{\delta x^b} + \tilde{\Gamma}_{\lambda \cdot b}^{\cdot i} X^\lambda.$$

Se, oltre ciò, supponiamo che i parametri $\bar{\Gamma}_{a..b}^{i..}$ siano simmetrici rispetto a λ e b , le equazioni

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_{aib}^{*} = \bar{\Gamma}_{bia}^{*} \\ \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} = \Gamma_{hki} + \Gamma_{khi} \end{array} \right.$$

in numero di n^3 , determinano, in virtù delle (6') b), (6') d), i parametri Γ_{hki} in funzione di (x^i, x'^i, x''^i) .

Matematica. — *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes.* Nota di TH. MOTZKIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — 1. Soit donné un ensemble de points fermé E dans le plan Euclidien. Soit P_0 un point arbitraire extérieur à E , $K_0 = K(P_0)$ le plus petit cercle autour de P_0 qui rencontre E , en un ou plusieurs points $Q_0 = Q(P_0)$. M. Vergnères, dans sa Note *Sur l'unicité du « minimum » de la distance d'un point à un ensemble* ⁽²⁾, appelle les points Q_0 projections de P_0 sur E , le segment $P_0 Q_0$ une projetante de P_0 relative à E et le point P_0 lui-même ordinaire relatif à E , s'il n'a qu'une seule projection sur E — dans le cas contraire il sera donc extraordinaire relatif à E . Nous appelons K_0 cercle d'appui de E ; suivant le nombre des Q_0 situés sur la circonférence de K_0 , on pourra distinguer les cercles d'appui simples, doubles etc.

2. Dans cette Note, je voudrais montrer — à côté d'énoncés plus généraux (aux §§ 4 et 5) — que pour chaque ensemble non convexe, il existe réellement des points extraordinaires (un au moins), de sorte que la proposition — dont l'inverse ⁽³⁾ est triviale — est vraie:

THÉORÈME I. — *Si chaque point du plan au dehors d'un ensemble fermé E a sur E une projection seulement, alors E est convexe* ⁽⁴⁾.

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) Ces « Rendiconti », vol. XVIII, pp. 542-546.

(3) Pour E convexe, non seulement tous les points P_0, P_1 ayant pour projections $Q_0 \neq Q_1$, sont ordinaires et différents l'un de l'autre, mais encore l'on a, pour les distances, $P_0 P_1 \geq Q_0 Q_1$. En effet, soient q_0 et q_1 les droites par Q_0 et Q_1 resp., perpendiculaires à $Q_0 Q_1$; alors, pour chaque point R entre q_0 et q_1 , il y a sur $Q_0 Q_1$ (et à fortiori dans E) un point R' plus près de R que Q_0 et Q_1 , et l'on voit que P_0 et P_1 sont situés dans les deux demi-plans Π_0 resp. Π_1 (obtenus en enlevant la bande des R) dont la distance mutuelle est précisément $\overline{Q_0 Q_1}$.

(4) Voir autres énoncés au n. 15.

3. Nous commençons par quelques remarques simples. La distance $\overline{P_o E} = \overline{P_o Q_o}$ du point P_o à l'ensemble E est une fonction continue de P_o (car on a, pour P_o, P_i quelconques

$$\begin{aligned} |\overline{P_o E} - \overline{P_i E}| &= \max(\overline{P_o Q_o} - \overline{P_i Q_i}, \overline{P_i Q_i} - \overline{P_o Q_o}) \leq \\ &\leq \max(\overline{P_o Q_i} - \overline{P_i Q_i}, \overline{P_i Q_o} - \overline{P_o Q_o}) \leq \overline{P_o P_i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si une suite de points $P_v (v = 1, 2, \dots)$ converge vers P_o , et si P_o et les P_v sont des points ordinaires relatifs à E (avec les projections uniques $Q_v = Q(P_v)$ et $Q_o = Q(P_o)$), on a $\overline{P_v Q_v} \rightarrow \overline{P_o Q_o}$; donc l'ensemble des Q_v est borné, et chaque point d'accumulation des Q_v a la distance $\overline{P_o Q_o}$ de P_o et se trouve en E , il coïncide donc avec Q_o . Il s'en suit qu'on a aussi $Q_v \rightarrow Q_o$, et la projection Q_o , ainsi que la direction de la projetante $P_o Q_o$ dépendent, pour P_o ordinaire, d'une façon continue de P_o .

§ 2. — 4. Pour démontrer le théorème I, nous repartirons les points ordinaires en deux sous-classes. Faisons précéder à cela les considérations suivantes.

Soit q_o une demi-droite arbitraire, à l'extrémité Q_o dans E , contenant des points (non nécessairement ordinaires) dont Q_o est une projection. Les cercles par Q_o centrés sur q_o sont inclus les uns dans les autres et peuvent ne contenir aucun autre point de E , ou bien il existe parmi eux un *cercle maximum* $K_o = K(P_o)$ qui ne contient dans son intérieur aucun point de E .

Dans le premier cas, les cercles recouvrent ensemble un demi-plan π limité par une droite d'appui de E en Q_o , et tous les points, autres que Q_o , de q_o sont ordinaires.

5. Par contre au cas de l'existence de K_o , Q_o est projection unique de tous les points entre Q_o et P_o et n'est pas projection des points au-delà de P_o (sur q_o). Le point P_o lui-même peut être extraordinaire — Q_o étant une de ses projections — ou bien il est ordinaire avec la seule projection Q_o . Ce dernier cas nous suggère la

Définition. — Un point ordinaire P_o avec la projection Q_o est *simplement-ordinaire*, si de tous les points de la demi-droite $\overrightarrow{Q_o P_o}$, Q_o n'est projection que des points entre Q_o (exclus) et P_o (inclus); dans le cas contraire, P_o est *totalement-ordinaire*.

6. Les points P_i simplement-ordinaires relatifs à l'ensemble E de même que les points extraordinaires P_e forment (s'ils existent) un ensemble frontière (c.-à-d. sans points intérieurs). En effet, *près* (dans un voisinage quelconque) de chaque point extérieur à E il y a des points P_i totalement ordinaires, p. e. sur ses projetantes. D'une façon plus détaillée on a concernant

les relations mutuelles des trois ensembles formés respectivement par des points P_e, P_s, P_i le

THÉOREME II. — A) *Près d'un P_e il y a toujours des P_i et — excepté un cas trivial (voir plus bas au n. 8) — des P_s ; les P_s sont « facultatifs », c.-à-d. il peuvent y être aussi bien que manquer. B) *Près d'un P_s il y a toujours des P_i et des P_e , facultativement des P_s . C) *Près d'un P_i (1) il y a toujours des P_i , facultativement des P_e ou des P_e et des P_s .***

§ 3. — 7. Démontrons d'abord l'énoncé partiel B). L'existence des P_i dans le voisinage des P_s vient d'être établie. S'il y avait un $P_o = P_s$ sans P_i voisins, soit C_e un cercle autour de P_o et extérieur à E , assez petit pour que 1° chaque point P_C de C_e (la frontière incluse) ait une projection unique $Q_C = Q(P_C)$ sur E et que 2° la déviation de la demi-droite $\overrightarrow{Q_C P_C}$ soit $< \varepsilon < \frac{\pi}{6}$ (la déviation d'une demi-droite étant la valeur absolue de son angle avec la demi-droite $\overrightarrow{Q_o P_o}$). Un tel cercle existe, d'après les remarques à la fin du n. 3.

Considérons, maintenant, le diamètre d de C_e , perpendiculaire à $P_o Q_o$, et la demi-circonférence s découpée par d qui est la plus éloignée de Q_o . Soient S_1 et S_2 les points sur s pour lesquels $\overrightarrow{P_o S_1}$ et $\overrightarrow{P_o S_2}$ ont une déviation égale à ε , et soient D_1 et D_2 les points sur d , différents de P_o , tels que $\overrightarrow{D_1 S_1}$ et $\overrightarrow{D_2 S_2}$ ont la déviation ε . Alors la projetante $S_1 Q(S_1)$ rencontre d dans un point $P(S_1)$ entre P_o et D_1 , et de la même façon nous définissons $P(S_2)$ entre P_o et D_2 ainsi qu'en général $P(S)$ entre D_1 et D_2 pour chaque S sur l'arc $\widehat{S_1 S_2}$.

Le point $P(S)$ dépend de S d'une façon univoque et continue et, puisque les projetantes $SQ(S)$ ne se coupent pas, même biunivoque; on voit par la même raison que $P(S)$ parcourt d'une façon monotone le segment $P(S_1)P(S_2)$ quand S parcourt dans le même sens l'arc $\widehat{S_1 S_2}$. Par conséquent, P_o est situé sur la projetante $S_o Q(S_o)$ d'un certain point S_o de l'arc $\widehat{S_1 S_2}$ et il est donc (contre l'hypothèse) un P_i .

8. Quant à l'énoncé A, considérons un $P_o = P_e$ sans P_e voisins. D'après l'énoncé B, démontré au numéro précédent, il n'y a pas de P_s non plus dans un assez petit cercle C autour de P_o . Donc toute projetante p d'un point P intérieur à C qui n'est pas située sur une droite passant par P_o , est une partie de la projetante d'un point $\bar{P}$ de la circonférence de C . S'il y avait de tels points P arbitrairement voisins de P_o , il y aurait parmi eux

(1) Et de même près d'un point de la frontière de E .

une suite de points pour lesquels les $\bar{P}$ correspondants tendraient vers une limite $\bar{P}_0$, de façon que P_0 se trouverait sur la projetante de $\bar{P}_0$ et serait (contre l'hypothèse) un point ordinaire. Donc chaque point près de P_0 doit être situé sur une projetante de P_0 . Mais alors la circonférence du cercle d'appui $K_0 = K(P_0)$ appartient entièrement à E : c'est le cas exceptionnel des P_e mentionné en A.

§ 4. - 9. Avec cela, toutes les assertions du théorème II (des cas A, B et C) concernant la nécessité d'existence sont établies. Il n'est pas difficile à trouver des exemples vérifiant les assertions sur les existences facultatives.

Maintenant, retournons à la démonstration du théorème I. Si, pour l'ensemble donné E , il n'y a aucun P_e , il n'y a pas de P_s non plus (d'après l'énoncé B du théorème II), donc chaque P_0 extérieur à E est un P_i . Il s'en suit d'après les considérations du § 2 qu'un tel P_0 appartient à un demi-plan ouvert $\Pi(P_0)$ extérieur à E , de sorte qu'aucun P_0 ne peut être situé sur un segment dont les extrémités appartiennent à E ; c'est-à-dire que E est convexe.

10. Le complément de l'ensemble fermé E se décompose, comme on sait, en des domaines (ouverts) D étrangers l'un à l'autre, dont nous désignerons (s'ils existent) les bornés par G , les autres par F . Si l'on forme la réunion E^* de E avec un ou plusieurs (même un nombre infini) des domaines D , un point P_0 des domaines restants sera évidemment un point P_e, P_s ou P_i relatif à E^* suivant qu'il était P_e, P_s ou P_i respectivement relatif à E .

La réunion E^* peut être formée de manière qu'elle contienne tous les points du plan excepté ceux d'un seul domaine complémentaire D_0 de E arbitrairement donné. Si un E^* ainsi construit n'est pas convexe, ce qui est certainement le cas si D_0 est un des G , le théorème I appliqué à E au lieu de E nous assure de l'existence d'un P_e (au moins) dans le domaine D_0 . Si on joint à cette remarque l'énoncé A du théorème II, on se convainc facilement de la vérité du

THÉORÈME III. — *Tout domaine complémentaire D d'un ensemble plan fermé E contient une infinité de points P_e extraordinaires relatifs à E , avec les exceptions suivantes: 1° D (étant un G) se réduit à un cercle (alors D ne contient qu'un seul P_e); 2° le complément (dans tout le plan) de D (D étant un F) forme un ensemble convexe (alors D ne contient aucun P_e du tout).*

11. On peut se demander quelle est la structure des ensembles E qui donnent lieu à des domaines D rentrant au cas 2 du théorème précédent. S'il existe, pour un certain E , deux domaines F , disons F_1 et F_2 , ayant chacun un complément convexe, alors choisissons parmi les demi-plans

ouverts contenus (nécessairement) dans F_1 et F_2 deux demi-plans arbitraires Π_1 (dans F_1) et Π_2 (dans F_2). Comme F_1 et F_2 sont étrangers l'un à l'autre Π_1 et Π_2 le sont aussi. En laissant Π_2 fixe et en faisant Π_1 décrire tous les demi-plans contenus dans F_1 , on voit que ceux-là doivent être inclus les uns dans les autres. Mais le complément d'un ensemble convexe est la réunion de tous les demi-plans qu'il contient: F_1 se réduit donc lui-même à un demi-plan. Il en est de même pour F_2 . Cela nous conduit au

THÉORÈME IIIa. — *Aucun ensemble E ne donne lieu à trois (ou plus) domaines F de l'espèce mentionnée au théorème III sous 2°; et même deux tels F ne se présentent que dans le seul cas où E contient deux droites parallèles (identiques ou non), les autres points de E (s'ils existent) se trouvant dans la bande limitée par les parallèles.*

§ 5. — 12. On peut déduire des résultats analogues à ceux obtenus dans les paragraphes précédents en remplaçant, dans les définitions — et dans l'analyse des notions y introduites — les circonférences des cercles (comme K et C) par des courbes K qui s'obtiennent par un déplacement parallèle (nul ou non nul) avec ou sans dilatation (mais sans rotation) d'un ovale fixe centré ⁽¹⁾ Γ d'une certaine espèce. *Ovale* signifie la frontière d'un ensemble convexe borné.

Plus explicitement: pour déterminer le caractère d'un point P_0 extérieur à l'ensemble donné E relatif à E, nous décrirons maintenant autour de P_0 comme centre au lieu des circonférences des cercles les ovales sus-mentionnés K; il y aura parmi eux un ovale *maximum* $K_0 = K(P_0)$ qui ne contient aucun point de E dans son intérieur. À l'aide des points communs $Q_0 = Q(P_0)$ de K_0 avec E, nous obtiendrons les notions analogues à celles de projection, de projetante, de point ordinaire etc. définies au n. 1.

13. En ce qui concerne la distance $\overline{P_0 E}$ du point P_0 à l'ensemble E, considérée au n. 3, elle sera — par définition — égale à la distance $\overline{P_0 Q_0}$ de P_0 à sa projection Q_0 , si l'on convient de mesurer la distance entre deux points arbitraires du plan selon une métrique de Minkowski ⁽²⁾, Γ étant la courbe d'étalon (et les courbes K étant les *cercles relatifs*) de cette métrique. Cette convention faite, la vérité de la remarque (au n. 3), importante dans la démonstration des théorèmes I-III, sur la dépendance continue de la projection Q_0 de P_0 sur E et de la direction de la projetante $P_0 Q_0$, pour P_0 variable, sera conservée. On s'en convaincra facilement en tenant compte de ce que l'« inégalité du triangle » subsiste.

14. Examinons maintenant les conditions nécessaires pour l'efficacité d'une construction analogue à celle des nos 4 et 5. D'une part, pour que

(1) MINKOWSKI, *Géométrie des Nombres*.

(2) Pourrait-on, ici, se passer de la symétrie à l'égard du centre?

les cercles relatifs K par Q_0 centrés sur q_0 (qui proviennent l'un de l'autre par une homothétie à centre Q_0) recouvrent un demi-plan entier, il faut évidemment qu'ils n'aient en Q_0 qu'une seule droite d'appui a_0 . D'autre part, il faut que ces courbes n'aient qu'un seul point commun avec a_0 afin qu'elles soient (exception faite au point Q_0) incluses au sens strict les unes dans les autres, de sorte que la projection des points sur q_0 , voisins de Q_0 , sera unique. En somme, nous voyons que la courbe d'étalon Γ ne doit avoir ni des portions rectilignes ni des angles; elle doit être *toute ronde*.

Avec cette restriction, les raisonnements des §§ 1-4 ⁽¹⁾ se transposent sans difficulté (on modifiera, au no. 7, la borne $\frac{\pi}{6}$ pour ϵ d'une façon appropriée). Malgré que les points P , extérieurs à l'ensemble donné E , n'auront pas, en général, le même rôle de P_e, P_s, P_i qu'ils avaient avec la métrique ordinaire, nos résultats sur la distribution des points extraordinaires etc., à savoir le théorème II avec les théorèmes I et III qui s'en déduisent, continuent à être vrais (au théorème III, 2^o lire cercle relatif au lieu de cercle).

15. Nous ajoutons ici encore deux énoncés du théorème 1, dont l'un met en évidence une propriété des ensembles fermés convexes formant un pendant de celle qui sert à leur définition usuelle (remplacer K par « segment linéaire »), tandis que l'autre implique un attribut intuitif des ensembles fermés non-convexes.

THÉORÈME I a. — *Un ensemble fermé plan est convexe dans le seul cas où chaque K sur lequel sont situés deux points (au moins) de E , contient un point de E dans son intérieur (K appartenant à un système quelconque fixe de cercles relatifs tous ronds, p. e. au système des cercles ordinaires).*

THÉORÈME I b. — *Étant donné un ovale centré tout rond Γ (en particulier un cercle) et un ensemble plan fermé non convexe E , on peut trouver un ovale K , semblable et situé parallèlement à Γ , ne contenant aucun point de E dans son intérieur et passant par plus d'un point de E (pour ainsi dire, on peut faire glisser Γ , aggrandi selon la situation, dans les « enfoncements » de E , jusqu'à devenir un ovale K d'appui double, au moins).*

En concluant, nous pouvons remarquer qu'il suffit, pour la vérité du théorème I, que la courbe d'étalon Γ soit dépourvue de coins, et pour la vérité de son inverse (l'impossibilité de l'appui double à un ensemble convexe) que Γ soit dépourvue de portions rectilignes.

(1) Seulement pour la généralisation de la note (2) du no. 2, on obtiendra une condition plus restrictive pour la courbe d'étalon: à savoir, la réciprocity de la relation d'un diamètre σ et du diamètre τ parallèle aux droites d'appui dans les extrémités de σ .

Matematica. — *Sopra un fascio sizigietico di superficie cubiche.* Nota II di E. CIANI, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Analisi). — *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo.* Nota I di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Analisi). — *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo.* Nota II di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Analisi). — *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili.* Nota I di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Analisi). — *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili.* Nota II di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Considerazioni sul rendimento propulsivo.* Nota di N. W. AKIMOFF, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il concetto del rendimento della propulsione interessa tanto il costruttore navale come pure il progettista di velivoli ad elica oppure a reazione.

Sarebbe quindi di attualità presentare un'analisi elementare della definizione stessa del concetto, nonchè accennare a certi scogli da evitarsi nelle sue applicazioni talvolta troppo promiscue che non possono che impedire il progresso della tecnica di propulsione.

Conforme alla definizione comune⁽²⁾ il rendimento propulsivo è il rapporto del lavoro eseguito all'energia assorbita. Ad esempio il prodotto della spinta per la velocità di cammino diviso per la potenza sull'albero risulta una frazione, sia 0,75, che rappresenta *secondo la sopradetta definizione* il rendimento propulsivo. Ritengiamo di massima importanza dimostrare che un tale concetto è inadeguato e non rappresenta che una convenzione.

La corda per rimorchio di una barca è sollecitata da una certa trazione: è quindi assolutamente chiaro che il prodotto dello sforzo trattivo sulla velocità di avanzamento rappresenta il lavoro della propulsione per unità di tempo.

Il caso della propulsione interna è un problema assai diverso: quando la resistenza viene bilanciata dalla spinta il corpo cammina alla velocità costante, corrispondente alla resistenza *senza produrre nè assorbire energia*. Dove si consuma l'energia è proprio nel creare la spinta $M(V - v)$ ⁽³⁾.

L'energia teoricamente necessaria è $= M \left(\frac{V^2 - v^2}{2} \right)$.

Dividendola per quella sull'asse si ha un rapporto < 1 , che potrebbe esser chiamato *rendimento propulsivo*. La velocità di cammino vi entra solo in un modo indiretto, ma non già come fattore (moltiplicatore) dell'espressione sbagliata del « Lavoro », $M(V - v)v$.

Ora, teoricamente, il rendimento

$$(1) \quad \left[M \left(\frac{V^2 - v^2}{2} \right) \right] \div \left[\text{energia} \right]_{\text{sull'asse}}$$

non possiede un valore massimo; però qualora si tratti di un'elica si deve tener presente che ogni sezione della pala è un profilo aerodinamico; quindi,

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) Quale risulta anche da ottimi e recenti trattati come p. es. PISTOLESI, *Aerodinamica* (Torino « U. T. E. T. », 1932), p. 445; SILLA-TEOFILATO, *Lezioni di aerodinamica* (Pavia, Fusi, 1933), p. 189.

(3) Essendo M la massa scaricata per $1''$, v — la velocità di cammino è V quella di scarico, per esempio a valle del disco dell'elica.

riferendosi alla relativa polare, si può immaginare la curva che rappresenta P/R (cioè, il rapporto della portanza alla resistenza, per un dato valore dell'angolo di incidenza); l'ordinata di questa curva possiede un valore massimo (come p. es. 16 o 18 ecc.); è quindi chiaro che anche l'andamento della curva corrispondente alla (1), *nel caso dell'elica*, dovrebbe presentare un massimo. Da ciò, però, non segue che la curva del vero rendimento sia la solita curva che si vede nei trattati di eliche, costruita nell'ipotesi del « lavoro » $M(V - v)v$.

La differenza sarebbe come segue: il rendimento convenzionale è

$$(2) \quad [M(V - v)v] \div \left[\begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{sull'asse} \end{array} \right].$$

Dividendo per il vero rendimento (1) si ha

$$(3) \quad \frac{2v}{V + v}$$

quale rapporto teorico, *globale*, che indica l'ordine del divario nel caso del propulsore ideale. Qualora il propulsore sia un'elica comune, vi dovrebbero esser introdotte delle correzioni dovute al rapporto P/R , come anche alla rotazione della scia ecc.

Sembrerebbe che la teoria delle eliche nonchè i metodi di presentazione dei risultati di prove dovessero essere rifatti conforme a quanto sopra, il che probabilmente non sarà difficile: eliminando V dall'espressione (1) mediante la spinta, si ha il vero rendimento globale, sempre $< (1)$; come ascisse si può prendere o $\gamma = \frac{v}{nD}$ oppure il regresso.

Passiamo oramai al vero scopo di questa Nota: la propulsione a getto di reazione, alla quale risulta veramente dannosa la teoria ordinaria del rendimento e della *velocità migliore* del moto. Secondo tale teoria, il razzo, nel volo orizzontale, a velocità uniforme v , spinto dalla reazione costante MV , assorbirebbe il lavoro MVv (1).

Dalla considerazione di energia scende il cosiddetto rendimento (lo si trova in tutti i libri, trattati e memorie sulla reazione)

$$(4) \quad \eta = \frac{2\left(\frac{v}{V}\right)}{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Qualora $v = V$, il valore del « rendimento » viene $= 1$. È facile dimostrare che questo risultato è assolutamente insoddisfacente: aumentando v (per esempio mediante la diminuzione della sezione maestra, oppure me-

(1) In questa esposizione schematica non si tiene conto della diminuzione del peso totale, dovuta allo scarico della massa M per 1".

dante qualche miglioramento della forma del razzo, a parità di peso e di volume) si può eseguire un dato percorso in un tempo minore, così anche risparmiando il combustibile. In tale modo, spostandosi dalla condizione del *rendimento massimo* si ottiene un risultato migliore; quindi il rendimento (4) non rappresenta un criterio; e non esiste nessun criterio di questo genere nel problema della propulsione a reazione. L'unico rendimento, è quello termico, nella camera di combustione. Sappiamo già che vi saranno sempre perdite, di modo che per esempio per ogni 10.000 calorie (contenuto termico di 1 Kg. di combustibile) non si può convertire in energia cinetica più di 7.000 calorie; quindi il rendimento termico avrà il valore massimo di 70 %. La velocità del corpo sarà sempre — e automaticamente — quella corrispondente alla condizione *resistenza = spinta*; non c'è quindi ragione di dire che « la propulsione a reazione è poco vantaggiosa alle basse velocità »: la velocità di cammino non c'entra affatto nell'espressione della reazione (1).

Quello che è rovinoso è il periodo di accelerazione, per la quale è poco adatta la propulsione a reazione, ma questo non possiamo studiare nella presente comunicazione. Quindi l'inventore oppure il costruttore non deve tener nessun conto di questo cosiddetto difetto, e può continuare le sue ricerche senza preoccuparsi della limitazione, non esistente, nella scelta di velocità di marcia.

È altrettanto specioso il ragionamento seguente, concernente l'energia disponibile: siccome il « lavoro della reazione » è $= M \cdot V \cdot v$, e l'energia massima disponibile è $= \frac{MV^2}{2}$, non sarebbe possibile ottenere $M \cdot V \cdot v > \frac{MV^2}{2}$, ossia $v > \frac{V}{2}$, senza violare la legge di conservazione dell'energia. Noi invece riteniamo possibilissimo ottenere proprio un tale risultato mediante (come sopra) un miglioramento della forma del corpo, oppure la riduzione della sezione maestra (sempre a parità di peso e di volume); la velocità sarà superiore al supposto limite « massimo » $\frac{V}{2}$, senza nessuna infrazione delle leggi di meccanica; l'equivoco risulta dal concetto di « lavoro della reazione » $M \cdot V \cdot v$, non esistente nelle condizioni del volo orizzontale e uniforme, nel campo resistente ma non gravitante.

CONCLUSIONI. — 1° Tanto nella teoria delle eliche come in quella della propulsione a reazione si deve tener conto della non esistenza del « lavoro di avanzamento ». 2° Trattandosi della propulsione a reazione, dal fatto che la velocità di scarico è vicina a m/sec. 4.000, non segue che la velocità di cammino debba anch'essa essere dello stesso ordine: potrà essere superiore, uguale od inferiore, a seconda di altre condizioni del problema.

(1) La reazione non è precisamente $= MV$; v., p. es., ESNAULT-PELTERIE, *L'Astronautique*, p. 119.

Meccanica. — *Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.* Nota di C. TOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. *Introduzione.* — In una mia precedente Nota ⁽²⁾ ho dato la forma che le equazioni gravitazionali di Einstein assumono per gli universi simmetrici attorno ad un centro. La sola ipotesi (*a priori* arbitraria), che allora ammettemmo per la deduzione di quelle equazioni, fu la esistenza di opportune coordinate rispetto alle quali sussistesse la isotropia della propagazione della luce. In questa Nota noi ci porremo in condizioni più restrittive; precisamente supporremo che quella isotropia valga rispetto a coordinate sostanziali (cioè collegate alla materia in moto), e che in tali coordinate la velocità della luce risulti indipendente dal posto. Sono queste le ipotesi introdotte dal Tolman nella sua Nota: *Effect of inhomogeneity on cosmological models* ⁽³⁾, per un primo studio di tipi particolari di modelli cosmologici non omogenei.

Nostro argomento sarà il mostrare che, in queste condizioni, le equazioni gravitazionali riportano necessariamente ai modelli dotati di completa omogeneità. Cosicché, volendo uscire da questa classe di modelli, almeno se si suppone di mantenere la simmetria attorno ad un particolare centro, non è possibile continuare ad ammettere la indipendenza della velocità della luce dal posto; il Tolman, che così fa, applica ad universi non omogenei equazioni che riguardano gli universi omogenei. Questa osservazione è sfuggita al geniale scienziato americano a causa della complessità delle formule da lui usate, che non tengono conto del fatto che, per la ipotesi di completa simmetria attorno ad un centro, il dl^2 spaziale è rappresentabile conformemente su una metrica euclidea. Colle nostre equazioni più semplici, quel risultato è invece di facile dimostrazione.

2. *Forma delle equazioni gravitazionali.* — Vediamo anzitutto di interpretare, coi simboli introdotti nella mia precedente Nota per la impostazione più generale lì considerata, le particolari ipotesi in cui abbiamo detto volerli qui porre col Tolman. La ipotesi, che le coordinate spaziali assunte

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) C. TOLOTTI, *Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.* «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XXI, 1^o sem., 1935.

(3) Nota pubblicata in «Proc. of the National Academy of Sciences». Washington, vol. 20, n. 3, pp. 169-176, marzo 1934.

x_1, x_2, x_3 siano sostanziali, comporta l'annullarsi del parametro λ^1 (e quindi anche ⁽¹⁾ del momento λ_1) della linea oraria del generico elemento materiale. E per quanto riguarda la indipendenza della velocità della luce dal posto, ove si ricordi ⁽²⁾ che questa velocità, in un ds^2 in cui manchino i termini rettangoli in dx_0 (x_0 parametro temporale), è rappresentata dal coefficiente di dx_0^2 , se ne ricava di conseguenza che V deve essere funzione della sola x_0 e può quindi essere assunta, senza perdita di generalità, eguale ad uno.

Ciò premesso, per ottenere la forma delle equazioni gravitazionali nel caso del Tolman, non abbiamo che da porre $\lambda_1 = 0$ e $V = 1$ nelle equazioni (9), (10), (11), (12) della mia Nota citata. Procederemo per gradi; precisamente, sembrandoci degne di esser segnalate alcune equazioni di aspetto più semplice che da quelle si deducono per $\lambda_1 = 0$, cominceremo coll'introdurre questa ipotesi soltanto. Con questa assunzione e se (come ci conviene fare ai nostri scopi) eseguiamo la sostituzione

$$V = e^v, \quad H = e^h,$$

le predette equazioni (9), (10), (11), (12) si trasformano nelle seguenti ⁽³⁾:

$$(1) \quad 2 \left(h'' + \frac{h'}{\rho} \right) + v'' + v'^2 - v' h' - e^{2h-2v} (\ddot{h} + 3 \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}) + \\ + e^{2h} \left(\lambda - \kappa p + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) = 0,$$

$$(2) \quad h'' + h'^2 + 3 \frac{h'}{\rho} + \frac{v'}{\rho} + v' h' - e^{2h-2v} (\ddot{h} + 3 \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}) + \\ + e^{2h} \left(\lambda - \kappa p + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) = 0,$$

$$(3) \quad v'' + v'^2 + v' h' + 2 \frac{v'}{\rho} - 3 e^{2h-2v} (\ddot{h} + \dot{h}^2 - \dot{h} \dot{v}) + \\ + e^{2h} \left(\lambda - \kappa p - \frac{1}{2} \kappa \varepsilon \right) = 0,$$

$$(4) \quad \dot{h}' - \dot{h} v' = 0.$$

Possiamo semplificare alquanto. Sottraendo la (2) dalla (1), si ha

$$(5) \quad h'' - h'^2 - \frac{h'}{\rho} + v'' + v'^2 - \frac{v'}{\rho} - 2 v' h' = 0;$$

(1) Ved. la formula (3) della mia Nota già citata.

(2) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. Bologna, Zanichelli, 1928, p. 59.

(3) Cfr. le espressioni delle G_{ik} in termini di v, h date nella mia Nota: *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale*. «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XXI, 1^o sem., 1935, pp. 326-332.

la (2) sommata con la (3) dà, una volta sottratta la (5),

$$(6) \quad h'^2 + 2 \frac{h'}{\rho} + 2 \left(\frac{v'}{\rho} + v' h' \right) - e^{2h-2v} (2\ddot{h} + 3\dot{h}^2 - 2\dot{h}\dot{v}) + \\ + e^{2h} (\lambda - \kappa p) = 0;$$

segnaliamo infine l'equazione che si ottiene sottraendo la (3) dalla somma della (1) col doppio della (2),

$$(7) \quad 2h'' + h'^2 + 4 \frac{h'}{\rho} - 3e^{2h-2v}\dot{h}^2 + e^{2h}(\lambda - \kappa p + \kappa \varepsilon) = 0.$$

Le equazioni (4), (5), (6), (7) costituiscono un sistema equivalente a quello di partenza, ottenuto facendo $\lambda_1 = 0$. Se introduciamo ora anche l'altra ipotesi $V = 1$ (cioè $v = 0$), esse divengono

$$(8) \quad \dot{h}' = 0,$$

$$(9) \quad h'' - h'^2 - \frac{h'}{\rho} = 0,$$

$$(10) \quad h'^2 + 2 \frac{h'}{\rho} - e^{2h} (2\ddot{h} + 3\dot{h}^2) + e^{2h} (\lambda - \kappa p) = 0,$$

$$(11) \quad 2h'' + h'^2 + 4 \frac{h'}{\rho} - 3e^{2h}\dot{h}^2 + e^{2h} (\lambda - \kappa p + \kappa \varepsilon) = 0.$$

3. *Integrazione delle equazioni.* — La (8) ci dice che è

$$(12) \quad h(x_0, \rho) = h_1(x_0) + h_2(\rho),$$

con h_1, h_2 funzioni *a priori* arbitrarie. Ciò tenendo presente, la (9) si può scrivere

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} h'_2 e^{-h_2} \right) = 0;$$

di qui, con due successive integrazioni, si ha

$$\frac{de^{-h_2}}{d\rho^2} = a$$

e

$$(13) \quad H_2 = e^{h_2} = \frac{1}{a\rho^2 + b},$$

dove a e b denotano due costanti arbitrarie.

Ne segue che, a meno di un fattore H_1 dipendente dal solo tempo, il dl^2 spaziale ha la forma

$$(14) \quad dl^2 = \frac{dt_0^2}{(a\rho^2 + b)^2}.$$

Ora, se $b \neq 0$, questa non differisce che per una costante dalla nota forma canonica di Riemann di un dl^2 spaziale a curvatura costante ⁽¹⁾. E se $b = 0$, basta eseguire il cambiamento $\rho^2 = \frac{1}{r^2}$, perchè il dl^2 (14) acquisti la solita espressione euclidea in coordinate polari.

Del resto che la espressione (13) corrisponda ad un universo isotropo ed omogeneo risulta anche dalla materiale sostituzione di $h = h_1 - \log(a\rho^2 + b)$ nelle altre due equazioni (10), (11). Eseguiti i calcoli, la (10) diviene

$$(15) \quad 4ab + e^{2h_1}(2\dot{h}_1 + 3\ddot{h}_1) - e^{2h_1}(\lambda - \kappa p) = 0,$$

e la (11), una volta detratta la (10),

$$(16) \quad 8ab - 2e^{2h_1}\ddot{h}_1 - e^{2h_1}\kappa\varepsilon = 0$$

Il fatto che in esse, oltre p, ε , compaiono solo quantità indipendenti da ρ , ci dice appunto che anche p, ε devono esser tali.

4. *Esame della questione inversa.* — Ad inquadrar meglio la nostra ricerca, mostriamo qui da ultimo come la formula (4) ci permetta di ritrovare il noto risultato ⁽²⁾ della indagine inversa di quella da noi eseguita: se in un universo isotropo ed omogeneo la velocità della luce possa dipendere dalle coordinate di spazio (ferma restando, s'intende, la ortogonalità del ds^2). Il risultato è che la dipendenza dal posto si può avere solo nei modelli statici.

E difatti, poichè in un universo omogeneo la forma dello spazio varia col tempo restando simile a se stessa, i coefficienti $H(x_0, \rho)$, che compaiono nell'espressione del dl^2 spaziale, devono differire nei vari istanti solo per un fattore indipendente da ρ ; in altri termini, deve $H(x_0, \rho)$ scindersi nel prodotto (ed h nella somma) di due funzioni, una della sola x_0 e l'altra della sola ρ . Ne segue $\dot{h}' = 0$, e la (4) diventa

$$\dot{h}v' = 0,$$

donde si vede appunto che nel caso dinamico ($\dot{h} \neq 0$) deve essere necessariamente $v' = 0$.

Resta così pienamente chiarito che, nella classe degli universi dinamici dotati di simmetria attorno ad un centro, la condizione dell'indipendenza della velocità della luce dal posto non solo introduce, ma caratterizza gli universi isotropi ed omogenei.

(1) Cfr., per es., LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Roma, Stock, 1925, cap. VIII, § 7.

(2) Cfr. W. DE SITTER, *The astronomical aspect of the theory of relativity*. « Univ. of California Publ. in Mathematics », vol. 2, n. 8, p. 156, giugno 1933.

Astronomia (Astrofisica). — *Sulle atmosfere dei pianeti*⁽¹⁾.
Nota di G. PICCARDI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Eccettuato Mercurio (che non ha atmosfera) i pianeti prossimi al Sole, possiedono com'è noto atmosfere caratterizzate da composti ossigenati, mentre quelli lontani possiedono atmosfere caratterizzate da composti dell'idrogeno e del carbonio (metano) i quali appaiono in quantità sempre maggiori, coll'aumentare della distanza del Sole.

Questa variazione progressiva della composizione colla distanza si può spiegare immaginando che nel distacco dei materiali planetari dal Sole sia avvenuta una selezione dei materiali stessi e che masse imponenti di idrogeno e di carbonio siano state spinte verso le zone più lontane del sistema solare, dando origine a corpi celesti di composizione centesimale diversa da quella dei corpi originati nelle zone più interne.

Carbonio ed idrogeno possono infatti migrare insieme non solo come atomi isolati, ma anche come molecola non satura CH , capostipite di tutti gli idrocarburi. Questa molecola è molto stabile ad alta temperatura e, se vi è un certo eccesso di idrogeno, è una delle prime molecole che si possono formare in una atmosfera di gas monoatomici in via di raffreddamento. Molecola leggerissima ed agilissima, leggera più di un atomo di ossigeno, capace di assorbire radiazioni di lunghezza d'onda relativamente grande, essa può allontanarsi anche sotto la spinta della radiazione insieme agli atomi degli elementi leggeri per costituire le parti lontane ed estreme di un sistema di mondi in formazione.

Con questa ipotesi si evita di spiegare la presenza del CH_4 mediante la riduzione del CO_2 a CH_4 , realizzabile, com'è noto, solo in condizioni particolarissime.

Studi spettroscopici e termodinamici sulle stelle di bassa temperatura (M ed N) fanno ritenere che il fenomeno osservato per i pianeti (e come sopra interpretato) non sia di carattere locale e che almeno, per quanto riguarda i composti del carbonio e dell'ossigeno si siano stabilite delle effettive differenze nella composizione dei corpi celesti su nominati.

D'altra parte se vi sono delle differenze effettive nella composizione delle atmosfere delle stelle di bassa temperatura, in base alla suggestiva teoria dell'evoluzione stellare dovuta al Russell, si deve ammettere che queste

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 28 aprile 1935.

differenze possano esistere anche in quelle dei corpi celesti di alta e di altissima temperatura e che l'unità di composizione dei corpi celesti, sovente ammessa nelle ricerche astrofisiche, sia da considerare come una prima approssimazione, valida solo quando l'atmosfera di uno di questi è costituita da gas monoatomici.

Anche l'origine delle comete, costituite, com'è noto, da composti del carbonio potrebbe esser spiegata coll'ipotesi ora prospettata.

Fisica. — *La diffusibilità del deuterio nei metalli.* Nota di T. FRANZINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. AMERIO.

La possibilità di spostare nei metalli e per mezzo di un campo elettrico l'idrogeno in essi occluso⁽²⁾ mi ha condotto, dopo la scoperta del deuterio, a tentar di ottenere nei metalli stessi l'occlusione e lo spostamento dei deutoni. Nella presente ricerca mi sono servito di fili di palladio essendo in questo metallo più facile che in ogni altro lo spostamento dei protoni e supponendo quindi che, se esiste una spostabilità dei deutoni nei metalli, era possibile constatarla in questo più che in ogni altro metallo.

Come sorgente di deuterio ho usato una soluzione molto concentrata di ossido di deuterio in acqua. Tale campione fu da me ottenuto partendo dalla soluzione di una vecchia batteria di accumulatori già relativamente ricca di D_2O . La soluzione distillata e alcalinizzata con KOH era elettrolizzata a lungo in vari voltametri ad elettrodi di nichel, in modo da ridurre a circa 5 cc. di acqua gli iniziali Kg. 36.5 di soluzione distillata di accumulatori.

Il dispositivo usato per studiare lo spostamento dei protoni e dei deutoni nei fili di palladio è indicato nella fig. 1.

A due supporti A, B di filo di platino da mm. 0.2 è unito mediante saldatura all'arco elettrico, un filo di palladio da mm. 0.1 la cui parte centrale C è affondata nel vetro del tubo che lo contiene ed ivi strozzato. Al solo scopo di evitare che la fragilità del tubo nel punto C potesse essere causa di facili rotture, le due parti del tubo di prova sono riunite dal giunto di rinforzo R mediante masticiatura del tratto chiuso di sinistra con quello aperto di destra. Alla camera di sinistra è poi unito un tubo provvisto di elettrodi di alluminio per l'esame spettrale del gas contenuto in essa. La camera di destra può contenere circa 3 cc. della soluzione di acqua pesante ottenuta resa conduttrice mediante KOH. La camera di sinistra insieme con il tubo di rinforzo e quello per l'esame spettrale del gas, sino ad una chiusura non indicata in figura, ha la capacità di circa 8 cc. Può quindi

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

(2) « Rend. R. Acc. Lincei », 1934, XIX, 584.

essere occupata, alla pressione di mm. 0.5 di Hg, usata per la scarica, da gr. $4.7 \cdot 10^{-7}$ di H_2 .

Due cilindri M, N di nichel del raggio interno di mm. 2.5 e lunghi cm. 2, cioè un po' meno dei due fili di palladio ad essi coassiali, sono posti nelle due concamerazioni e muniti ciascuno di un conduttore in comunicazione con l'esterno.

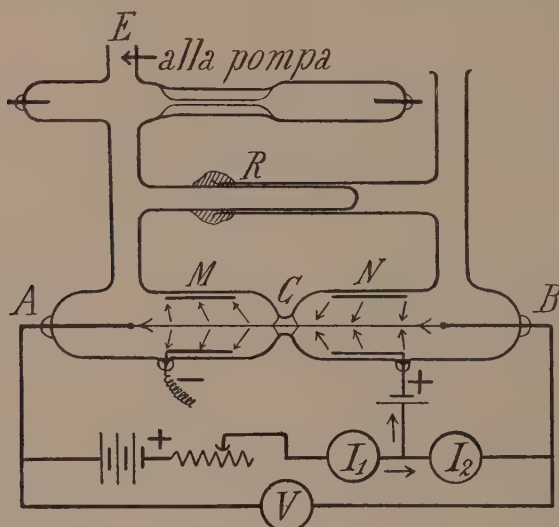


Fig. 1.

Applicando una batteria di accumulatori da 4 volt tra il cilindro ed il filo si può far svolgere su questo una certa quantità di idrogeno e di deuterio. Una seconda batteria (8 volt) permette di sottoporre il filo ad un campo elettrico longitudinale avente il senso convenzionale $B \rightarrow A$ e sufficiente a determinare, in accordo alle esperienze mie⁽¹⁾ e di A. Coehn⁽²⁾, uno spostamento verso A dei protoni occlusi nel tratto BC.

Il cilindro M posto nella camera di sinistra può essere portato al potenziale (positivo o negativo) di varie migliaia di volt rispetto al filamento posto a terra, in modo da facilitare l'emissione dei nuclei occlusi sia mediante il campo elettrico generato (che alla superficie del filamento può raggiungere i 100.000 volt/cm.) sia mediante il riscaldamento del filo per effetto del bombardamento elettronico dal catodo M.

Va notato che per effetto del potenziale, normalmente positivo per la placca N e negativo per la M, esternamente al filo si genera un campo

(1) T. FRANZINI, «Rend. R. Ist. Lomb.», 1931, 709; «N. Cim.», 1931, fasc. 9.

(2) A. COEHN, «ZS. f. Phys.», 62, 1; 71, 79; 83, 291.

elettrico le cui linee di forza nei due tratti sono approssimativamente indicate in figura. La differenza di potenziale applicata agli estremi del filamento e misurata dal voltmetro V non è quindi uniformemente distribuita lungo il filamento stesso, ma lungo il tratto centrale di esso si stabilisce un valore massimo del gradiente, ciò che contribuisce ad esaltare l'effetto cercato.

Le esperienze sono state condotte nel seguente ordine.

Ottenuto con la pompa una forte rarefazione nella camera di sinistra e saldato alla fiamma l'estremo E della stessa, mettevo in funzione tutto il dispositivo descritto, ma applicando tra A e B un campo elettrico opposto di quello adatto per ottenere il risultato aspettato.

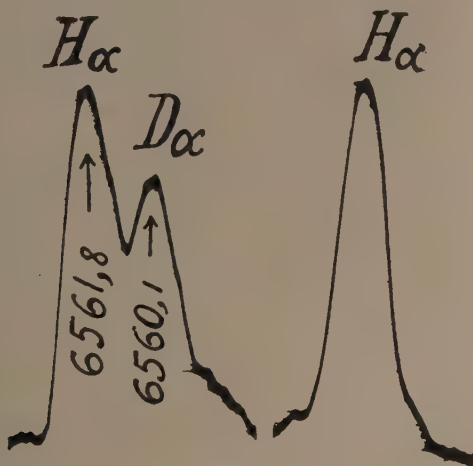


Fig. 2.

Pur portando al calor rosso incipiente il tratto AC del filo di palladio non riuscivo a stabilire spettroscopicamente la presenza della riga H_α come del resto di nessun'altra dell'idrogeno.

Invertito invece il campo stabilito fra A e B dopo alcuni minuti compaiono le righe dell'idrogeno. Esaminata in particolare la H_α mediante un sistema ottico a forte potere risolutivo applicato allo spettroscopio (lamina di Lummer e Gehrcke oppure campione di Fabry e Perot) la riga stessa appare del tutto priva della 6560.1⁽¹⁾ (che chiamerò D_α) dovuta al deuterio; cioè invece del doppietto di baricentro 6510.1 e di quello 6561.8 compare solo quest'ultimo dovuto all'isotopo leggero.

I risultati appaiono più evidenti dalle spettrografie eseguite mediante uno spettrografo grande di Hilgher (mod. E 52) e analizzate mediante un micro-

(1) H. C. UREY e G. K. TEAL, «Rev. of Mod. Phys.», 1935, 7, 34. Una estesa bibliografia sull'argomento è riportata in questo articolo recentissimo.

fotometro di Kipp e Zonen a coppia termoelettrica, capace di ingrandire 50 volte la distanza fra due righe. Naturalmente in queste spettrografie tanto la H_{α} quanto la D_{α} non sono risolte nelle loro componenti.

Allo scopo di accertare che sul tratto BC del filo si svolgesse effettivamente deuterio, ho raccolto opportunamente tale gas svolto e l'ho analizzato spettrograficamente. La microfotometria della H_{α} così ottenuta è indicata nella fig. 2 A. In essa si ha un rapporto $D_{\alpha} : H_{\alpha}$ delle intensità delle due righe eguali a 0.8 ciò che rivela un abbondante svolgersi di deuterio sulla superficie del filo. Infatti pur non potendo affermare una esatta proporzionalità tra la concentrazione molecolare relativa dei due isotopi e la intensità delle loro righe, il rapporto di due delle prime grandezze non può essere molto diverso dal rapporto dei corrispondenti valori delle seconde.

Può quindi essere annunciata una delle seguenti ipotesi:

1^a Il deuterio è adsorbito (superficialmente) dal palladio, ma non assorbito (nella massa nel metallo).

2^a Il deuterio non è ne adsorbito ne assorbito.

3^a Il deuterio è anche assorbito ma non è spostabile nel metallo.

Riserbandomi di controllare in ulteriori ricerche quale di queste possibilità è verificata, noto intanto che le esperienze descritte non solo vengono ad aggiungere un'altra prova a quelle già portate da me, da Coehn e da altri ricercatori sulla spostabilità dell'idrogeno occluso per mezzo di un campo elettrico, ma provano inoltre la mancanza di un effetto analogo per il deuterio.

Spettrograficamente l'assenza del deuterio nella camera di sinistra è provata dalla fig. 2 B nella quale è riprodotta la microfotometria della H_{α} ottenuta eccitando il tubo di prova, annesso alla camera di sinistra, nella quale è raccolto il gas trasportato da B verso A ed evaporato nel tratto CA del filamento. Spettrografie eseguite ad intervalli di tempo diversi (da 10' dell'applicazione del campo opportuno sino a 24 ore dopo) e asportando successivamente con la pompa l'eccesso di idrogeno emesso, diedero risultati del tutto analoghi.

Noto che l'influenza della grana della lastra su queste microfotometrie è del tutto annullata con l'uso di una fenditura esploratrice molto stretta per riuscire a risolvere la H_{α} dalla D_{α} , ma alta circa 3 mm. in modo da investire un numero considerevole di granuli.

Fisica. — *Un nuovo metodo ottico per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli.* Nota di C. SCHAEFER e L. BERGMANN, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sullo spettro Raman dei nitrotoluoli isomeri.* Nota di R. MANZONI ANSIDEI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio M. BETTI.

In un pregevolissimo lavoro apparso qualche anno fa Kohlrausch, Dadiou e Jele ⁽²⁾ studiarono lo spettro Raman dell'orto, meta, para nitrotoluolo giungendo a risultati interessanti. Kohlrausch e collaboratori si trovano, salvo alcune riserve, in discreto accordo con i valori pubblicati un anno prima da Mlodzianowska ⁽³⁾ in un lavoro che integrava le precedenti ricerche di Venkateswaran e Ganesan ⁽⁴⁾ sugli spettri Raman dei nitrotoluoli, ricerche che davano risultati incompleti ed incerti.

Dopo la pubblicazione di Kohlrausch e collaboratori uno sperimentatore americano M. E. High ⁽⁵⁾ pubblicò nuovi spettri di questi nitrotoluoli giungendo a risultati non sempre coincidenti con quelli degli autori della scuola di Graz.

Frattanto le posizioni delle righe Raman pubblicate da High sono più alte talvolta anche di 20-25 numeri d'onda rispetto a quelle della scuola di Graz tantochè alcune righe caratteristiche del nucleo benzenico nei citati composti vengono negli spettri pubblicati da High ad assumere valori alquanto curiosi il cui controllo può essere interessante per lo studio della struttura dei corpi aromatici attraverso allo spettro Raman. Così per esempio la classica riga intensa dei metabisostituiti del benzolo che coincide con la riga dell'oscillazione totalsimmetrica dell'anello a 992 cm^{-1} manca nello spettro del metanitrotoluolo di High ed è sostituita con una riga intensa a 1011 cm^{-1} che è del tutto anomala per un meta derivato. Dall'altra parte manca negli spettri di High la riga a 1520 cm^{-1} che è una caratteristica del gruppo NO_2 nei nitro derivati aromatici.

Queste ed altre incongruenze per le quali gli spettri di High non confermano quelli di Kohlrausch hanno attirato la mia attenzione nel largo lavoro di revisione degli spettri Raman delle sostanze a carattere aromatico che da due anni sto compiendo in questo laboratorio in collaborazione con il prof. Bonino e mi hanno consigliato a ripetere queste misure onde trarre una plausibile ragione delle discrepanze tra i valori trovati da High e quelle di Kohlrausch ed allievi.

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) KOHLRAUSCH, DADIEU, JELE, « Wien. Ber. », 140, 1931, p. 293.

(3) « Zts. f. Phys. », 65, 127, 1930.

(4) « Indian J. of Phys. », vol. IV, 196, 1929.

(5) M. E. HIGH, « Phys. Rev. », [2], 38, 1931, p. 1837.

Ho ripetuto perciò gli spettri Raman dei tre nitrotoluoli:

O. Nitro Toluolo (Kahlbaum) Distillato 2 volte nel vuoto p. eb._{80mm} 145°

M. Nitro Toluolo (Kahlbaum) Distillato 2 volte nel vuoto p. eb._{10mm} 107°

P. Nitro Toluolo (Kahlbaum) Purificato per ripetute cristallizzazioni da alcool metilico assoluto p. f. 54°. Lo spettro Raman fu eseguito su soluzioni sature in acetone.

L'apparecchiatura Raman usata è quella già impiegata in altre ricerche recentemente pubblicate (1).

Riassumo i miei risultati nella seguente tabella riferendoli per comodità del lettore alle misure di High e di Kohlrausch.

O. NITROTOLUOLO.

HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI	HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI
150 (3)	150 (6)	—	1167 (2)	1151 (2 d.)	1145 (1 d.)
—	237 (4)	—	—	—	1159 (2 d.)
—	293 (3 d.)	—	1214 (3)	1200 (4)	1199 (4 d.)
—	389 (3 d.)	—	1360 (10)	1342 (10)	1342 (10 d.)
—	476 (2)	—	—	—	1380 (1 1/2)
—	—	529 (1)	—	1409 (1/2)	1421 (1 d.)
555 (4)	546 (4)	548 (1)	—	1519 (3)	1517 (3)
—	571 (4)	—	1592 (4)	1576 (5)	1577 (5)
673 (1)	659 (1/2)	659 (1)	—	1605 (1)	1607 (2)
—	—	726 (1)	2918 (1)	2937 (1/2 d.)	2938 (2 d.)
—	746 (0)	—	—	—	2981 (1 d.)
—	794 (5)	787 (5)	—	—	3034 (1 d.)
—	854 (1)	852 (2)	3051 (2)	3047 (4)	—
1062 (4)	1049 (5)	1046 (5)	—	—	3081 (2 d.)
1098 (1)	1080 (2)	1079 (2)			

(1) BONINO, MANZONI, ANSIDEI, «Z. Phys. Chem.» (B) 25, 1934, p. 327; BONINO, MANZONI, ANSIDEI, PRATESI, «Z. Phys. Chem.» (B) 25, 1934, p. 348.

M. NITROTOLUOLO.

HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI	HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI
—	172 (4)	—	1364 (10)	1343 (20)	1339 (7 d)
—	225 (4)	—	—	—	1371 (1)
—	354 (3)	—	—	—	1392 (0)
—	396 (1/2)	—	—	—	1413 (0)
—	506 (4)	504 (0)	—	1459 (2)	1452 (1 1/2)
—	673 (3)	669 (1/2)	—	1523 (4)	1520 (3)
—	798 (6)	798 (3)	—	1579 (8)	1577 (5 d.)
—	—	902 (0)	1602 (3)	—	—
1011 (2)	998 (6)	999 (3)	—	1618 (0)	1612 (1)
1103 (2)	1091 (5)	1090 (3)	—	—	2874 (1 1/2 d.)
—	1156 (3)	1162 (1)	2920 (0)	2925 (2)	2928 (3 d)
—	1210 (6)	1209 (3)	3057 (2)	3043 (2)	3047 (1 d.)
1231 (2)	—	—	—	3073 (2)	3077 (3 d.)

P. NITROTOLUOLO.

HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI	HIGH	KOHLRAUSCH	MANZONI
—	226 (1/2)	—	—	—	967 (1/2)
281 (2)	—	278 (1 d.)	1117 (8)	1108 (4)	1105 (7)
—	—	350 (1/2)	—	1172 (1/2)	1174 (1)
—	362 (3)	—	1217 (3)	1208 (3)	—
—	—	379 (0)	1360 (10)	1340 (20)	1341 (10)
—	—	493 (1/2)	—	—	1368 (2 d.)
—	537 (1)	—	—	1416 (1/2)	1418 (1 d.)
—	590 (1/2)	—	—	1493 (2)	1470 (1)
—	—	614 (1)	—	1519 (1/2)	1516 (1 1/2)
643 (3)	638 (3)	633 (3)	1613 (7)	1595 (5)	1596 (7)
682 (1)	—	—	2915 (1)	2931 (1)	2927 (4 d.)
—	785 (1/2)	—	3053 (3)	3048 (2)	3056 (1)
806 (2)	—	—	—	3080 (1/2)	3087 (2 d.)
869 (5)	860 (4)	856 (5)	—	—	—

Come risulta dalle tabelle, le mie misure confermano pienamente le misure di Kohlrausch, Dadiou e Jele dato che ritrovo pressochè lo stesso numero di righe in posizioni coincidenti con quelle degli autori della scuola di Graz.

In particolare ritrovo normale la riga 990 cm^{-1} circa caratteristica dei metabisostituiti e riconfermo la riga del gruppo NO_2 a 1520 cm^{-1} circa non registrata dagli spettri di High.

Chimica. — *Sullo spettro dell'ossido di neodimio allo stato di vapore.* Nota ⁽¹⁾ di G. PICCARDI presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Alcuni anni fa riuscii ad ottenere per la prima volta, in opportune condizioni di fiamma, lo spettro dell'ossido di neodimio allo stato di vapore e ne misurai le principali bande ⁽³⁾. Oggi, migliorate le condizioni sperimentali, adottando un dardo di fiamma di circa cm. 50 di lunghezza, di cui potevo regolare abbastanza bene le condizioni di temperatura, ho ottenuto uno spettro assai più completo ed intenso costituito da oltre duecento bande, quasi tutte confusamente disposte nella regione visibile dal rosso al verde; solo poche bande compaiono nella regione violetta; nessuna nella ultravioletta. Le bande non sono risolubili in righe; molte di esse sono talmente sottili da potersi confondere con righe atomiche. Le misure di lunghezza d'onda hanno dimostrato che le coincidenze fra righe del Nd e bande dell'ossido sono così scarse che non si può pensare alla sovrapposizione dello spettro atomico e di quello molecolare. Riporto nella tabella seguente le lunghezze d'onda nell'aria date in unità internazionali, i numeri d'onda nel vuoto, le intensità secondo una scala arbitraria e le osservazioni abbreviate come segue: *l* = larga; *ll* = larghissima; *s* = sfumata; *ss* = sfumatissima; *n* = nitida; *f* = fine; *ff* = finissima; *o* = ombra diffusa ⁽⁴⁾.

Ho usato spettrografo Higer E. L. montato in vetro denso per la regione visibile ed in quarzo per quella ultravioletta. Lastre pancromatiche Cappelli. Posa 6 ore.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(3) G. PICCARDI, *Band Spectra of the Oxide of Praseodymium, Neodymium and Samarium*. « Nature », 24, 618, 1929.

(4) La sig.na Bruna Peroni laureanda nel nostro Istituto mi ha validamente aiutato nell'esecuzione delle misure e dei calcoli relativi.

TABELLA.

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
6750 ?	14810	—	o	6521	15330	6	ss
6724 ?	14867	—	o	6517.7	15338.6	4	ls
6705	14909	2	s	6509.7	15357.4	2	ls
6695	14934	3	ls	6500.0	15379.1	7	ff
6684	14936	3	s	6497.5	15385.5	7	ff
6680.1	14965.0	4	f	6493	15396	4	s
6674.7	14977.9	2	f	6489	15405	1	s
6664.6	15000.6	3	fn	6484	15417	1	s
6654.9	15022.0	6	ff	6478	15432	1	s
6651	15030	2	—	6470	15451	4	s
6647.7	15038.7	3	fn	6464.6	15464.5	5	s
6637.5	15061.6	2	fn	6457.3	15482.2	5	s
6629.6	15079.5	8	f	6451	15496	2	f
6624.6	15091.1	8	f	6446.0	15506.7	7	f
6620.2	15101.1	7	s	6442.6	15517.3	7	f
6614.6	15113.9	5	—	6436 ?	15532	—	o
6611.6	15120.8	5	—	6432 ?	15542	—	o
6606.7	15131.0	10	l	6428 ?	15552	—	o
6602.4	15141.9	10	l	6425.6	15558.3	3	s
6598.3	15151.4	10	l	6417 ?	15578	1	
6590.8	15173.1	5	s	6411	15595	7	ls
6585.2	15181.4	15	ll	6404.5	15609.6	2	f
6580	15192	2	ss	6399.5	15621.8	2	f
6574	15206	2	ss	6395.0	15633.0	1	f
6568.6	15219.7	3	s	6388.9	15647.7	7	f
6562.6	15233.6	3	s	6381.9	15664.9	7	f
6558.7	15242.7	3	s	6375	15681	2	o
6555.4	15250.4	3	s	6370.9	15691.9	8	ff
6552.6	15256.7	3	s	6368.6	15697.6	8	ff
6544.3	15276.2	3	s	6364.7	15707.2	2	ff
6539.6	15287.2	3	s	6360.6	15717.3	1	ff
6532.3	15304.3	3	ls	6353.5	15734.9	9	f

Segue TABELLA.

λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.
6349.9	15743.8	10	f	6156 ?	16241	1	—
6338	15772	3	s	6139 ?	16248	1	os
6332	15788	2	s	6133 ?	16300	1	os
6327	15800	1	s	6116 ?	16347	1	os
6322	15812	1	s	6106 ?	16372	1	os
6317	15825	2	s	6093 ?	16406	1	os
6313	15835	3	s	6088 ?	16420	1	os
6305	15855	3	l	6078	16448	2	f
6299	15873	3	l	6071	16466	1	o
6286.4	15902.8	5	f	6068	16474	1	o
6282.2	15913.4	3	f	6064	16485	1	o
6279.7	15919.9	3	f	6057	16506	1	o
6274.0	15934.4	2	f	6053.0	16516.1	2	f
6269.4	15945.9	5	f	6048	16530	2	f
6263	15961	1	o	6045	16537	1	o
6257	15977	1	o	6040	16550	1	o
6251	15995	1	o	6035.9	16562.8	5	f
6247	16002	1	o	6033.4	16579.7	5	f
6240	16025	3	f	6027.9	16584.8	5	f
6236	16030	3	f	6021	16606	1	—
6231	16043	1	s	6019	16609	5	f
6223.1	16064.8	2	f	6015.2	16620.1	5	f
6220.2	16072.0	2	f	6011.6	16630.0	5	f
6215 ?	16087	2	ss	6006.6	16643.6	1	ff
6206 ?	16110	2	os	6002	16658	8	s
6199 ?	16129	2	os	5999	16663	8	s
6187	16160	1	s	5996	16672	8	s
6180	16176	1	s	5993.6	16680.0	2	ff
6173	16197	2	f	5990.7	16687.8	10	fn
6170	16204	2	f	5986	16700	2	s
6164 ?	16218	1	—	5980	16716	2	sl
6160 ?	16228	1	—	5975	16730	10	sl

Segue TABELLA.

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
5971.1	16742.8	8	fn	5719.2	17480.0	3	f
5963 ?	16764	2	lls	5715	17494	3	s
5955	16787	2	os	5711.0	17505.2	3	f
5953.2	16792	2	f	5707.2	17517.1	1	fn
5950	16801	2	o	5705.3	17522.9	4	fn
5947	16809	2	o	5701.2	17535.2	4	fn
5943	16820	2	o	5699.0	17542.0	4	fn
5939	16832	2	o	5693.9	17577.7	4	s
5932	16854	2	o	5689	17571	4	s
5927	16866	1	o	5684.4	17587.0	2	f
5920.9	16884.4	1	ff	5682.2	17595.1	4	ff
5913 ?	16909	—	o	5679.6	17601.9	4	f
5909	16917	2	f	5676	17613	2	—
5905	16929	2	f	5674	17620	2	—
5901	16940	—	o	5578.9	17919.5	1	f
5860	17061	2	sl	5569.3	17950.7	1	f
5857.8	17078.2	4	f	5554.4	17998.8	3	f
5846	17099	1	o	5539	18050	2	s
5837	17126	4	sl	5529	18083	2	s
5831	17144	2	s	5517.0	18117.5	3	f
5828	17155	1	s	5511.2	18139.6	3	f
5823	17167	1	s	5499	19178	4	s
5800~	—	—	o	5488.2	18215.9	3	f
5777	17304	1	s	5476.3	18255.5	2	f
5773	17317	1	s	5447.7	18350.9	3	f
5769	17331	1	s	5406.0	18492	2	sl
5765	17343	3	s	5390.6	18545.6	3	ffn
5759	17361	3	s	5387.5	18556.3	3	ffn
5752	17380	—	o	5377.1	18592.2	4	f
5747	17395	—	o	5350.4	18684.9	2	f
5744.7	17402.5	3	f	5333.5	18744.1	5	l
5725.8	17459.9	4	f	5313.5	18814.7	7	f

Segue TABELLA.

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
5308.5	18832.4	2	sl	4620.0	21638.9	8	l
5303.4	18850.5	2	f	4595.3	21755.2	2	s
5250.2	19041.4	6	f	4578.9	21833.5	2	f
5214	19174	2	s	4577.5	21839.7	2	f
5209	19192	2	s	4560.6	21924.5	2	f
5189	19266	2	s	4554.8	21948.6	2	n
5183	19287	2	s	4529.2	22073.0	1	f
5148	19419	2	s	4510.8	22163.1	3	f
5127	19499	2	s	4493	22249	1	s
5065	19735	1	ff	4492	22256	1	s
5040.5	19833.8	2	f	4483.1	22299.9	1	f
4998.1	20002.0	1	f	4478.4	22324.9	1	s
4973.4	20101.3	1	f	4474	22345	1	s
4964.0	20139.3	1	f	4458	22425	1	s
4959.0	20159.6	3	nf	4452.2	22454.2	2	f
4942.1	20228.5	2	f	4449	22469	2	ls
4938.8	20242.5	2	s	4446.3	22484.0	2	f
4881.9	20482.1	3	f	4427.3	22580.5	2	s
4768.7	20964.4	4	sl	4423.4	22607.0	2	sl
4643.5	21529.4	2	sl	4418.2	22626.9	2	sl
4637.2	21568.7	3	f	4413.5	22650.9	3	f
4630	21588	2	s	4319.2	23964.4	1	—

Chimica. — *Sullo spettro dell'ossido di samario allo stato di vapore.* Nota⁽¹⁾ di G. PICCARDI presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Valendomi del dispositivo di fiamma recentemente modificato ed usato nel caso dell'ossido di neodimio⁽³⁾, ho ripreso nuovi spettrogrammi dell'ossido di samario allo stato di vapore mediante uno spettrografo Hilger E. I. Lo spettro dell'ossido di samario era già stato ottenuto da me, e misurato in parte, per la prima volta alcuni anni fa⁽⁴⁾; oggi, date le migliorate condizioni sperimentali, lo spettro è risultato assai più completo e più complesso; si tratta di circa duecento bande confusamente disposte nella regione visibile, le più brillanti delle quali si trovano nella regione rossa. Pochissime bande nella regione azzurra e violetta, nessuna in quella ultravioletta, analogamente a quanto si osserva per l'ossido di neodimio. Le bande non sono risolubili in righe alla dispersione dello spettrografo usato.

Riporto qui per ragioni di brevità i soli dati numerici, rimandando ad altra Nota il risultato del confronto degli spettri di bassa eccitazione del neodimio e del samario. Nella prima colonna della seguente tabella sono riportate le lunghezze d'onda nell'aria, date in unità I. A., i numeri d'onda nel vuoto, le intensità secondo una scala arbitraria e le osservazioni abbreviate come segue: *l* = larga; *ll* = larghissima; *s* = sfumata; *ss* = sfumatissima; *n* = nitida; *f* = fine; *ff* = finissima ed *o* = ombra diffusa⁽⁵⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(3) G. PICCARDI, questi « Rendiconti ».

(4) G. PICCARDI, *Band Spectra of the Oxide of Praseodymium, Neodymium and Samarium*. « Nature », 24, 618, 1929.

(5) La sig.na Bruna Peroni, laureanda nel nostro Istituto mi ha validamente aiutato nell'esecuzione delle misure e dei calcoli relativi.

TABELLA.

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
6759	14790	—	o	6485.5	15414.7	7	f
6752	14806	—	o	6479.3	15429.5	2	f
6744	14824	—	o	6474.2	15441.4	2	f
6728	14858	—	o	6469.1	15453.8	2	f
6718	14882	—	o	6463	15466	1	s
6706	14907	—	o	6457.8	15480.5	6	f
6699	14923	—	o	6451.2	15496.6	2	f
6690.5	14942.5	3	f	6440	15524	4	ls
6681	14965	—	o	6431	15545	4	s
6668.3	14993.0	2	f	6421	15574	4	ls
6664	15001	—	o	6408.7	15599.4	5	s
6661	15009	—	o	6405.7	15606.7	5	s
6657	15017	—	o	6395.9	15630.6	6	n
6650.3	15033.7	4	f	6390.9	15642.8	4	f
6619.8	15101.7	4	ff	6387.6	15650.1	4	f
6612.0	15119.9	3	s	6380.0	15669.5	3	n
6606.3	15132.7	3	s	6374.5	15683.0	3	f
6599.7	15148.0	3	s	6371.5	15689.2	3	f
6588	15174	4	lss	6366.2	15703.5	3	s
6570.1	15216.0	6	f	6361.7	15714.6	3	s
6567	15223	5	ls	6355.7	15729.5	4	ls
6561.2	15236.9	5	f	6349.5	15747.7	8	f
6557.2	15246.2	8	f	6338.8	15771.3	4	f
6541.8	15281.9	4	ls	6334.4	15782.5	1	f
6533.5	15301.5	9	ll	6331.6	15789.5	1	f
6524.9	15321.6	1	f	6328.8	15796.6	1	f
6520.5	15332.0	1	f	6322.2	15816.7	4	s
6510.9	15354.6	10	ll	6291	15890	1	s
6503	15372	1	ff	6273	15936	1	s
6500	15379	1	ff	6265	15956	1	s
6495	15391	1	ff	6259	15971	3	s
6488	15406	2	s	6257	15977	3	s

Segue TABELLA.

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
6254	15984	3	s	6014.6	16621.8	2	ff
6249.5	15996.9	4	ff	6008	16639	1	s
6243.9	16011.0	4	f	6003	16653	1	s
6238.2	16025.9	2	f	5997	16760	3	s
6234	16036	1	f	5994	16676	1	ff
6230.0	16046.8	4	f	5988.4	16694.2	4	f
6225.5	16059.5	2	f	5986	16701	1	ff
6221.1	16069.9	2	f	5981.5	16713.9	4	f
6217	16080	1	f	5976	16729	2	s
6209	16102	—	llss	5970	16745	4	ls
6195.1	16137.3	3	ff	5963.0	16770.0	4	l
6190.2	16149.8	1	f	5953.6	16797.4	3	f
6185.6	16162.1	1	f	5948.3	16806.7	5	l
6169.4	16204.5	3	f	5944.0	16818.8	4	f
6165	16215	2	ss	5939	16833	4	s
6157	16236	2	ls	5935	16843	4	s
6150	16254	1	ff	5930.8	16856.6	2	f
6147	16262	1	ff	5927.4	16866.2	2	f
6140	16281	2	lls	5924.1	16875.3	2	f
6134.3	16297.2	2	f	5920	16887	1	ss
6126	16318	1	ss	5914.2	16904.4	2	sl
6113.4	16352.9	3	f	5881	16999	2	sl
6089.3	16417.6	3	s	5875	17014	2	sl
6078.6	16446.5	4	l	5869.2	17033.4	4	f
6072.1	16464.1	5	f	5865.4	17044.4	1	ff
6065.5	16482.1	4	l	5862.0	17051.2	1	ff
6051.8	16519.3	3	s	5858.4	17064.8	1	ff
6047.2	16532.2	5	f	5855.0	17074.7	1	ff
6034.4	16567.2	6	ls	5852.0	17085.1.2	4	ff
6025	16594	1	s	5847.9	17095.4	2	f
6019.6	16607.7	2	f	5845.0	17104.2	2	f
6517.6	16613.5	2	ff	5839.5	17120.0	4	f

Segue TABELLA.

λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.
5833.0	17139.1	2	s	5252.9	19028.1	2	f
5828.4	17152.6	2	s	5201.3	19220.7	4	f
5822.4	17170.3	7	hn	5176.1	19314.4	1	ff
5818.5	17181.8	4	f	5173.3	19324.3	1	ff
5814.5	17193.6	3	f	5122.5	19516.4	2	f
5810.4	17205.7	3	f	5117.5	19535.0	3	f
5804.6	17223.0	2	f	5071.8	19711.4	2	f
5795	17249	3	sl	5044.5	19818.0	2	f
5787	17274	3	sl	4976.2	20090.0	1	f
5781	17292	2	f	4919.3	20322.3	2	s
5767	17336	2	f	4910.8	20357.5	3	f
5747	17396	2	f	4884.2	20468.3	3	ff
5729.4	17448.9	4	ff	4848.7	20618.5	2	f
5715	17490	—	o	4842.0	20647.0	3	f
5711.2	17504.5	3	s	4786.2	20887.7	2	f
5706	17519	2	sl	4783.5	20899.5	3	f
5698	17542	—	o	4760.6	20999.9	3	f
5685.4	17587.8	3	l	4746	21063	1	o
5680	17599	3	l	4728.6	21141.6	3	f
5550.7	18010.5	3	sl	4700~	—	2	o
5517.1	18120.5	3	ff	4689.2	21319.7	2	f
5498.6	18181.1	1	ff	4670.9	21403.2	3	f
5493.8	18197.9	2	ff	4649.8	21500.3	2	ff
5484.2	18228.9	1	s	4645.7	21519.2	2	ff
5461.1	18306.3	1	f	4615	21661	3	ssl
5452.6	18334.6	1	f	4598.2	21741.5	2	ff
5417.3	18456.6	1	ls	4588.9	21785.5	3	f
5405.5	18494.5	2	s	4503.8	23197.5	2	f
5341.7	18715.3	2	f	4499.3	22219.3	2	f
5321.3	18787.5	1	—	4483.9	22295.5	1	f
5283.2	18922.8	1	f	4471.1	22359.8	3	f
5271.9	18963.1	3	f	4459.4	22418.0	2	f

Segue TABELLA.

λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.
4445.2	22490.1	2	f	4380.4	228 2.7	2	
4442.1	22505.3	4	l	4362.5	22916.3	3	f
4429.8	22568.2	3	f	4336.2	23055.3	3	f
4419.4	22621.3	3	f	4330.1	23087.7	3	f
4411.6	22661.3	2	f	4319.7	23142.2	2	f
4403.2	22704.6	3	f	4296.9	23266.1	3	f

Biologia. — *Sulla natura degli ultravirus.* Nota di C. ACQUA, presentata⁽¹⁾ dal Socio P. R. PIROTTA.

La quistione della quale ci occupiamo è una delle più interessanti e discusse nel campo della biologia. Com'è noto, vi sono oltre cento malattie infettive, che riguardano l'uomo, animali diversissimi, vegetali, nonchè il noto batteriofago di d'Hérelle, nelle quali l'agente non è stato potuto mettere in evidenza con la comune visione microscopica. I liquidi provenienti da cellule malate, o da batteri in via di *lisi*, sono capaci di attraversare, senza perdere i loro caratteri, i comuni filtri usati in batteriologia; si tratta adunque di *virus* filtrabili, atti a riprodurre la malattia, senza MAI presentare forme visibili al microscopio, e che sono designati con il nome speciale di *ultravirus*. Si distinguono per ciò dai comuni *virus* costituiti da batteri, e fra questi anche da quelli che hanno *solo* una fase filtrabile.

Un altro carattere netto di distinzione è dato dall'impossibilità di coltivarli nei comuni mezzi usati in batteriologia; essi si incrementano soltanto in presenza di cellule viventi che siano in grado di attaccare. V'è poi un carattere accessorio che è quello di provocare in genere la formazione di speciali corpi, i così detti corpi X, che sono inclusioni di origine citoplasmatica o nucleare. Furono questi corpi, spesso assai piccoli, che originarono non di rado l'equivoco della presenza di microrganismi in talune malattie.

Il fatto di un *virus*, capace di attraversare filtri compatti, nel quale non si riscontra al microscopio nessuna forma figurata, ma che è pure capace di riprodurre il contagio, suggerì al Beijerinck nello studio della malattia del mosaico del tabacco (1898) l'idea di un «contagium vivum fluidum».

(1) Nella seduta del 7 aprile 1935.

L'Hunger ammise (1905) che l'agente di tale malattia non fosse altra cosa che una tossina, la quale si origina in genere nei processi metabolici della pianta senza recare danno, ma che, accumulandosi, porta all'alterazione caratteristica. Essa inoltre, venendo in contatto con cellule sane, può esercitare un'azione patologica, che riproduce la malattia, mentre altra tossina si forma. Idee consimili erano già state enunciate un anno prima dal Centanni a proposito della peste aviaria.

Così sorse la teoria degli *ultravirus ad azione autocatalitica* ⁽¹⁾. Opposta a questa si sviluppò l'altra teoria, dai più accettata, secondo la quale gli *ultravirus* sarebbero costituiti da elementi viventi, e non si differenzierebbero dai *virus* comuni, il cui agente è un microrganismo visibile al microscopio, se non per l'estrema piccolezza dei loro elementi, che costituirebbero il gruppo dei microrganismi *subvisibili*. Ma un argomento di grande valore contro tale concezione fu posto in evidenza, quello che gli *ultravirus* non sono coltivabili nei comuni mezzi usati in batteriologia, ma hanno sempre bisogno di cellule viventi, che essi siano in grado di attaccare. Questo carattere generale rende molto ardua l'ipotesi che si tratti di microrganismi, che si differenzierebbero dagli altri comunemente coltivabili solamente per la minore grandezza, mentre molto bene si accorda con la teoria dell'*autocatalisi*.

Il mondo dei biologi è anche oggi nettamente diviso in due campi, nelle opposte concezioni di ritenere o no gli *ultravirus* costituiti da forme viventi. Un progresso notevolissimo si è avuto in questi ultimi anni, specialmente per le ricerche compiute nel « National Institute for Medical Research » di Londra, e nell' « Institut für Kolloidforschung » di Francoforte diretto dal prof. Bechhold. Questi espone chiaramente i risultati nel periodico *Umschau* da lui diretto ⁽²⁾ « La soluzione della quistione — egli scrive — se si tratti di forme viventi o di fermenti, è in prima linea un problema di dimensioni ». Nel secondo caso dell'alternativa (ipotesi dei fermenti) i corpi elementari dovrebbero essere dell'ordine di grandezze da 2 a 4,5 μ . È difficile concepire corpi viventi così piccoli che possano esercitare le complesse funzioni inerenti alla vita, quindi, se fosse dimostrata l'esistenza di tali dimensioni, la quistione sarebbe risolta nel senso di escludere la natura di forme viventi.

Su tale base è impostata la ricerca, e tre metodi sono seguiti per determinare la grandezza degli elementi in parola. Questi sono: *microfotografia all'ultravioletto*, *ultrafiltrazione*, *centrifugazione*. È quest'ultimo metodo spe-

(1) L'espressione di *virus* è stata in genere adoperata nel senso di ammettere l'esistenza di elementi viventi. Con il concetto di cui parliamo conviene allargare il significato dell'espressione, che può essere mantenuta con la considerazione che anche un *virus ad azione autocatalitica* si comporterebbe in ogni caso analogamente agli altri costituiti da elementi viventi.

(2) Vedi: 38 Jahr., H. 21, n. 22, 1934.

cialmente che nelle mani del Bechhold, con l'ausilio di apparecchi perfezionati, dà i migliori risultati. Le dimensioni delle particelle di alcuni *ultravirus* sarebbero, calcolate in $m\mu$, sempre molto superiori a quelle sopra indicate per le grandezze dei corpi elementari (molecole) dei fermenti. Così da dimensioni, determinate con il metodo della centrifugazione, che si avvicinano per alcuni *virus* al limite della visibilità (200 per il vaccino, per l'erpete), si passa a dimensioni inferiori (110 per la peste dei polli), e a minori ancora per diversi batteriofagi (fra 90 e 20). Per il mosaico del tabacco le dimensioni si aggirano sui 50 $m\mu$.

Si ha, secondo il Bechhold, una serie ininterrotta per varie grandezze, che va dai microrganismi visibili (le cui dimensioni si possono calcolare all'incirca in 500 $m\mu$) a un minimo, come in un batteriofago, di 20, mentre in altri batteriofagi la cifra sale a 50, 75, 90. Non è possibile ritenere in tali casi, nei quali si hanno sempre aggregati abbastanza complessi senza che mai si verifichi una divisione molecolare, che trattisi di una semplice sostanza con carattere di fermento, ma piuttosto deve concludersi in favore dell'ipotesi di formazioni di natura organizzata. Ma poichè queste si *riproducono da generazione a generazione, in eguali strutture, grandezze e funzioni, non possono essere considerate nè fermenti, nè prodotti di cellule malate*. Non resta altro che *attribuire loro la natura di forme viventi che si moltiplicano in senso autonomo*.

Così si esprime il Bechhold, di cui abbiamo brevemente seguite le argomentazioni e riportate alla lettera le conclusioni.

Vediamo ora se e fino a qual punto tali conclusioni siano giustificate.

È fuori dubbio che le ricerche suesposte inducono ad ammettere l'esistenza di aggregati complessi, anzichè quella di una sostanza con caratteri di fermenti o tossine; ma tali aggregati possono logicamente ascriversi a due gruppi: 1° entità viventi autonome; 2° prodotti di alterazioni patologiche della cellula, i quali possono ancora conservare il carattere dell'organizzazione⁽¹⁾. Il Bechhold esclude questa seconda ipotesi con la considerazione che tali aggregati *si riproducono da generazione a generazione con uguale grandezza e funzione*. Ma questo argomento non è convincente.

Supponiamo che nella disaggregazione o demolizione della cellula si arrivi a dei corpuscoli, i quali siano all'ultimo limite dell'organizzazione, quindi a dei corpuscoli ancora *viventi ma non autonomi*, e supponiamo ancora, con piena verosimiglianza che detti corpuscoli, venendo in contatto con altre cellule sane, possano indurre analoghi perturbamenti patologici. Noi potremo così giungere per questa via ad una spiegazione esauriente, senza il bisogno di ricorrere alla presenza di microrganismi. Anzi con tale ipotesi si spiega benissimo perchè mai riesca la coltura con i comuni mezzi; non riesce

(1) Non possiamo occuparci per ragioni di spazio della teoria del Wolman, che considera le entità in parola come fattori ereditari.

perchè tali corpuscoli, sebbene con molta probabilità *organizzati*, non sono *autonomi*, ossia non sono *microrganismi* e non possono quindi moltiplicarsi in un mezzo di coltura. Essi però possono indurre alterazioni similari in altre cellule sane, provocando così la formazione di altri corpuscoli, di uguale costituzione e carattere, e dando così l'illusione che in questo caso possa avvenire una loro propria moltiplicazione, mentre in realtà l'incremento del *virus* avviene per produzione di altri corpuscoli derivanti da nuove cellule in demolizione, e non per moltiplicazione di quelli preesistenti.

Esclusa adunque l'ipotesi — dopo le ricerche suddette, — di un semplice fermento o di una tossina nelle sostanze costituenti il *virus*, resta sempre di fronte alla costituzione di aggregati complessi la domanda: forme *viventi* o *non viventi*, intendendo con la designazione di *viventi* le forme autonome, quali sono rappresentate da microrganismi?

La risposta non può darsi con l'esame delle dimensioni; la *morfologia*, nella quale detto esame pure rientra, ha in questo caso esaurito il suo compito; spetta ora completare la ricerca con lo *studio fisiologico*, ossia con lo studio del modo col quale possono presentarsi, e con quali caratteristiche, le alterazioni costituenti le malattie. E a questa seconda ricerca si è rivolta da tempo una schiera di sperimentatori.

È stato constatato che in parecchie malattie ad *ultravirus* le cause ambientali le più diverse (comprendendo in questa anche eccitazioni varie, diverso regime nell'alimentazione ecc.) influiscono in strano modo nell'insorgere della malattia, tantochè in alcuni casi essa appare prevalentemente od esclusivamente dovuta alle cause suddette. Bene inteso che poi il *virus*, proveniente da cellule malate, facilita grandemente il propagarsi del processo patologico.

Sono note le ricerche del Carrel su taluni tumori maligni (sarcomi di Rous) provenienti da spennellature con catrame, dall'azione dei raggi X ecc. « Questi nuovi fatti, scrive il Carrel, ci spiegano in una certa misura la natura del principio filtrante di Rous. È evidente che la sostanza estratta da un sarcoma del catrame (che si comporta come un *ultravirus* atto a riprodurre l'alterazione sarcomatosa) non è un organismo ultramicroscopico ».

Analoghe ricerche, impiegando particolari eccitazioni, sono state compiute in altri casi. Anche nella *lisi* dei batteri (batteriofagia) sono state sperimentate condizioni speciali che sembrano dimostrare la possibilità di una comparsa spontanea dell'alterazione. Ora è evidente che tali risultati avrebbero un valore decisivo in favore della teoria autocatalitica, se risultassero realmente provati.

Ma questa prova è stata per il passato effettivamente raggiunta?

Sarebbe inverosimilmente molto arduo affermarlo poichè una critica costante è stata rivolta a simili esperienze, quella cioè che i fatti suddetti possano anche spiegarsi con la teoria parassitaria, ammettendo ad esempio che gli individui sottoposti all'esperienza fossero dei portatori di germi, lo sviluppo dei quali fu reso possibile dalle eccitazioni o dalle alterate funzioni.

Un solo caso bene constatato di un'alterazione che insorgesse sperimentalmente senza la partecipazione di un *ultravirus* preesistente, avrebbe senza dubbio un grande interesse per la interpretazione della fenomenologia di tali malattie.

Ora chi scrive queste linee, studiando da molti anni una tipica malattia ad *ultravirus* in un lepidottero di grande valore nell'industria, il baco da seta⁽¹⁾, ha potuto trovare che esso costituisce un materiale favorevolissimo per la nostra quistione. Tale malattia è nota sotto il nome comune di *giallume*, mentre un nome scientifico più appropriato è quello di malattia dei poliedri (*poliedria*), per il fatto che i corpi X (le caratteristiche inclusioni) prendono in questo caso una forma poliedrica regolarissima di rombododecaedri.

È noto come si manifesta la malattia. Le larve si rigonfiano, la pelle assume un colore giallo sporco (nelle razze gialle), indi si rompe lasciando uscire un liquido giallo denso, che il microscopio rivela contenere innumerevoli corpi rombododecaedrici. L'esame istologico mostra che l'alterazione si presenta principalmente nei tessuti ipodermici, peritracheali e grassi. I nuclei cominciano a mostrare un'ipertrofia, la cromatina si altera, si frammenta, e in fine dà luogo alla formazione di innumerevoli corpi di forma poliedrica, che con lo sfacello della cellula finiscono per versarsi nell'emolinfa.

La malattia è altamente infettiva. L'emolinfa e la poltiglia di tessuti pestati in acqua sono capaci di attraversare le candele di Berchefeld o di Chamberlandt di media compattezza senza perdere la virulenza. Si tratta quindi di un *virus* filtrabile, che per il fatto poi di non presentare mai forme visibili, di non essere coltivabile nei comuni mezzi usati in batteriologia, e di provocare la formazione delle caratteristiche inclusioni (corpi X), deve essere ascritto alla famiglia degli *ultravirus*. Si è poi constatato nei nostri studi che il periodo più propizio per l'attecchimento della malattia è quello delle mute larvali, che sono in genere in numero di quattro, e che dall'inizio del processo patologico al suo pieno sviluppo, decorrono alla temperatura di 25° C. circa sette giorni. Inoltre si deve tenere bene presente che la poliedria non è ereditaria, come è stato dimostrato in modo non dubbio.

Accennato per sommi capi a questi punti fondamentali, veniamo ora all'influenza delle cause ambientali. Queste sono decisive sulla comparsa della malattia. Regioni basse ed umide sono le regioni nelle quali il *giallume* attecchisce largamente e fa strage, mentre in regioni elevate ed aerate si ha di solito una completa sanità, e ciò indipendentemente dalla recettività delle razze.

Ma noi abbiamo potuto influire sulla comparsa della malattia, modificando opportunamente l'alimento. È noto che questo deve essere di regola

(1) Studi compiuti nella R. Stazione di Ascoli con il concorso della Fondazione per la Sperimentazione Agraria, presso il Ministero di Agricoltura e Foreste.

costituito da foglia di gelso, ma possono esservi dei surrogati che permettono di compiere meno favorevolmente, e spesso solo per un dato periodo, l'allevamento stesso. Uno di tali surrogati è dato dalle foglie della comune lattuga (*Lactuca sativa* L.), con la quale l'allevamento si compie benissimo, anche in stagioni fredde, fino all'inizio della terza età, quando sopraggiunge di regola una larga mortalità che distrugge in pochi giorni la quasi totalità dell'allevamento. Ora una constatazione singolare è stata fatta ed è che questa mortalità è data esclusivamente dalla malattia della poliedria o giallume.

Quanto ora abbiamo esposto ha offerto l'opportunità per un'esperienza che potrebbe ritenersi decisiva.

Si trattava di vedere se, compiendo un allevamento sperimentale con la lattuga e in condizioni da escludere possibilmente l'azione di un *ultravirus* preesistente, non fosse possibile assistere alla comparsa simultanea della malattia nella quasi totalità delle larve sottoposte all'esperienza. È evidente che, se questo esperimento fosse riuscito, un grande argomento ne sarebbe derivato contro la teoria parassitaria.

La prova fu tentata nel 1931 con buoni risultati e ripetuta nell'anno decorso 1934 con risultati molto migliori, che si possono ritenere decisivi.

Le condizioni nelle quali furono condotti gli allevamenti erano le seguenti.

1. *Stagione*: inverno, quando non c'erano altri allevamenti, nè lepidotteri selvatici, vaganti per la campagna e in grado di portare eventualmente dei germi.

2. *Uova* (seme bachi): derivante da genitori sanissimi senza traccia di malattia.

3. *Materiale usato per l'allevamento*: tutto nuovo; ossia padiglioni in muratura allora costruiti, suppellettili e attrezzi vari tutti nuovi.

4. *Alimento*: lattuga proveniente da terreno con concime minerale e foglie lavate prima della somministrazione.

In queste condizioni veramente eccezionali furono compiute le esperienze. Tralasciando quelle già a suo tempo descritte del 1931, che dettero buoni risultati, mi fermo all'ultima del 1934, le cui risultanze furono molto migliori e si possono ritenere decisive.

Si impiegò un lotto di razza gialla indigena, le cui uova schiusero il 21 febbraio; l'allevamento procedè in perfetta sanità fino al 6 marzo, epoca nella quale le larve stavano per entrare nella 3^a età. Allora in due giorni, e cioè nel 6-7 marzo, il lotto fu pressochè distrutto, poichè su 1939 larve che lo componevano se ne riscontrarono morte, o prossime a morire della forma tipica della malattia, ben 1799, ossia il 92 %.

Credo che sia cosa ben ardua negare l'importanza decisiva di tali risultati. Per farlo bisognerebbe ammettere: o che l'infezione parassitaria fosse venuta dall'esterno, o che le larve destinate a morire simultaneamente fossero delle portatrici di germi, i quali a un dato momento trovarono l'oppor-

nità per svilupparsi. Ma la prima ipotesi è insostenibile per le condizioni nelle quali si svolse l'allevamento e per la simultaneità dell'esplosione della malattia: la seconda è del pari insostenibile per la provenienza degli individui da genitori assolutamente sani e perchè in ogni caso la trasmissibilità da una generazione all'altra resta esclusa da una serie indubbia di esperienze.

Non resta che l'ipotesi di una comparsa spontanea, o sperimentale se vuoi, della malattia per disordine originatisi nelle speciali condizioni di nutrizione durante l'allevamento. Con ciò si spiega anche come la mortalità si sia mostrata simultaneamente all'inizio della terza età; essendo noto che quello delle mute è un periodo critico per l'attecchimento della malattia, si deve ritenere nel nostro caso che l'inizio del processo abbia avuto luogo durante la prima muta (della durata di poco più di un giorno), mentre il pieno sviluppo si ebbe dopo il periodo consueto di sette giorni, cioè all'inizio della terza età.

Tale origine della malattia, senza l'intervento di germi, ho da tempo designata come « *genesì primaria* » mentre ho chiamata « *genesì secondaria* » la malattia provocata dall'azione del *virus* venuto in contatto con cellule fino ad allora sane.

Nel caso adunque della *poliedria* del *Bombyx mori* è evidente che si debba escludere la presenza di microrganismi *subvisibili*, quali agenti del processo, il quale può insorgere per disordini metabolici, indipendentemente da un'azione parassitaria, mentre nei fenomeni degenerativi, che ne seguono, si origina nelle cellule ammalate un *virus* a elementi corpuscolari, ma non viventi, atto a propagare in cellule sane l'alterazione patologica e ad incrementarsi.

Se poi per le innegabili analogie che esistono nelle varie malattie ad *ultravirus* vogliamo cercare di raggrupparle tutte — non ostante immancabili differenze — in una sola grande famiglia e vogliamo tentare una larga generalizzazione delle idee suesposte, potremo dire che la *genesì primaria* è sempre ammissibile, ma che mentre in alcuni casi si manifesta con grande facilità, in altri è talmente rara da fare ritenere nella pratica impossibile la produzione spontanea della malattia, che resta allora sempre legata all'azione di un *virus* (*genesì secondaria*). Ma poichè la fenomenologia generale è uguale per tutti, non sembra verosimile invocare in alcuni casi i microrganismi *subvisibili* ed in altri escluderli, ma ci pare che si debba ritenere costituito l'*ultravirus* in tutti i casi da elementi non viventi, secondo i concetti che abbiamo sopra esposti. E poichè tali corpuscoli, per quanto non viventi, possono pure provocare con la loro presenza il ripetersi delle perturbazioni patologiche, dalle quali poi il *virus* automaticamente s'incrementa, così sembra opportuno di mantenere la designazione di *ultravirus ad azione autocatalitica*.

Botanica. — *Del potere organizzatore del legno e del cribro primari* ⁽¹⁾. Nota di A. MESSERI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. NEGRI.

Sul funzionamento del cambio si potrebbe citare una bibliografia assai ampia, in cui si illustra il differenziamento del legno e del cribro, tessuti definitivi a cui dà luogo. Il fenomeno di differenziazione di cribro e legno secondario da un cambio non è però così schematico come potrebbe pensarsi.

Se si osserva, per esempio, una giovane plantula di conifera (*Abies cephalonica*) nel tratto radicale ed ipocotilare, dove i fasci cribrolegnosi sono ancora alternati fra loro, troveremo, specialmente nell'ipocotile, che il cambio si abbozza molto precocemente sul lato interno di ciascun fascio cribroso ⁽³⁾. Alle volte queste cellule particolarmente seriate, con aspetto meristemato, sono riconoscibili fino dagli inizi dello sviluppo della plantula e in questo caso si potrebbe parlare di vero meristema primario; in altri casi, molto più frequentemente, la zona di tessuto interna al cribro primario, agli inizi dello sviluppo della plantula, è formata da cellule con aspetto di giovane parenchima come quelle del midollo e dei raggi midollari, e soltanto in un secondo tempo (come ho detto, precocissimo) alcune di queste cellule parenchimatiche si moltiplicano per divisioni tangenziali, dando luogo a una banda di cellule rettangolari, seriate regolarmente, aventi cioè tutti gli aspetti caratteristici del cambio: in questo caso questo meristema sarebbe secondario.

Questo tessuto cambiale, limitato soltanto alla parte interna dei fasci di cribro, in un primo tempo differenzia esternamente, verso il fascio cribroso primario, serie regolari di elementi cribrosi secondari, misti a elementi secretori e cellule a citoplasma abbondante e grande nucleo, cioè a cellule compagne del cribro (fig. 1).

Che il funzionamento del cambio sia unilaterale, verso il cribro soltanto, risulta chiaro dai numerosi preparati che ho osservato. Le cellule del cambio funzionante, sono internamente a contatto col parenchima midollare, non hanno cioè differenziato ancora nessun tessuto verso l'interno.

Ai lati del fascio cribroso, formato, a questo stadio, da elementi di origine primaria e secondaria, si può osservare come molto spesso il sot-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Firenze, diretto dal prof. Giovanni Negri.

(2) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(3) Dalle numerose figure riportate nelle diverse Memorie sull'anatomia delle piante di Gimnosperme e Dicotiledoni, risulta come il cambio, di regola, si abbozzi internamente ai fasci cribrosi primari.

tile strato di cambio si allunghi fuori dai limiti del fascio, estendendosi, per breve tratto, nel parenchima laterale dei raggi midollari. Esso è riconoscibile facilmente dalle grandi cellule parenchimatiche per la forma e la seriazione dei suoi elementi, ha lo stesso spessore e lo stesso grado di differenziazione morfologica di quello fascicolare, ma ancora non è funzionante, perchè in corrispondenza di esso non si è differenziato nessun tessuto secondario.

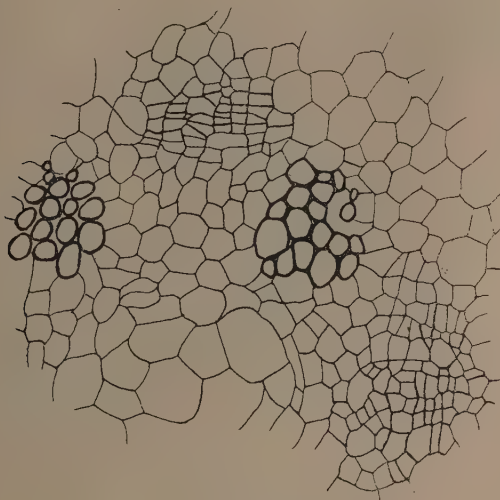


Fig. 1 ($\times 270$).

L'estensione di queste ali di cambio estra-fascicolare arriva, a destra e a sinistra rispettivamente, fino a livello dei protoxilemi dei rispettivi fasci legnosi alternati coi cribrosi, però gli elementi cambiali ne sono separati da grandi cellule parenchimatiche.

Osserviamo le stesse strutture ad un livello superiore nell'ipocotile, dove l'attività cambiale è molto progredita (fig. 2).

I cambiamenti che si osservano ad un livello lievemente più alto sono molti. Il cambio, che al livello inferiore aveva uno spessore minimo, ora è rappresentato da più strati di cellule seriate, cui sovrasta un fascio di elementi cribrosi assai ben differenziati.

È impossibile comprendere quale strato di cellule meristematiche sia quello veramente cambiale, cioè quello generatore, e quindi se il cambio sia più vicino al cribro o situato nel mezzo della fascia di cellule cambiali o dal lato interno di queste. Comunque osserviamo come si è trasformato a questo livello il tessuto legnoso e quali contatti ha preso col cambio.

La zona cambiale differenziasi sotto il fascio cribroso primario, e da cui subito è cominciata la differenziazione del cribro secondario, si è andata

allargando, differenziando a poco per volta un fascio cribroso di forma triangolare che si allarga sempre più internamente, finchè con la sua base cambiale non raggiunge i due fasci legnosi con esso alternati. Intanto i fasci legnosi alterni hanno differenziato due ali di legno laterali, che si mettono in rapporto più o meno ampiamente colla faccia interna del cambio. Lungo questa linea di contatto fra cambio e legno primario comincia la differenziazione di legno secondario. Nel preparato riprodotto si può osservare facilmente come gli elementi seriatì indifferenziati della zona cambiale cominciano a lignificarsi nella zona di contatto del cambio col legno primario e come nella parte centrale di ciascuna zona cambiale, dove non arrivano le ali di legno primario, non sia ancora cominciata la lignificazione degli elementi cambiali.

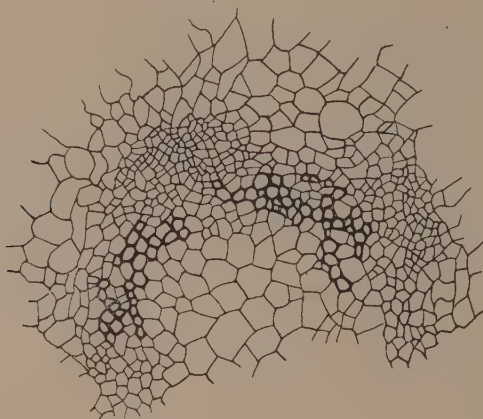


Fig. 2 ($\times 270$).

È assai difficile distinguere il legno primario dal secondario, dato che gli elementi secondari lignificati si trovano sempre a diretto contatto con gli ultimi elementi primari, e poichè non se ne sono differenziate diverse serie, non è facile stabilire dove termina la lignificazione delle cellule del procambio e dove comincia quella delle cellule del cambio. Non si osservano però mai elementi legnosi di origine cambiale già differenziati, isolati o distanziati dai corrispondenti elementi di origine primaria. C'è una continuità perfetta fra elementi legnosi alterni primari e elementi legnosi sovrapposti sia primari che secondari, soprattutto fra elementi legnosi sovrapposti primari e secondari.

Infatti in corrispondenza della parte mediale di ciascun fascio cribroso, dove le ali legnose primarie, rispettivamente provenienti dal fascio di destra e di sinistra, non si sono ricongiunte e lasciano per un certo tratto il cambio a contatto del parenchima, non ho osservato mai nessuna lignificazione degli elementi cambiali più interni.

Ad un livello ancora più alto (fig. 3) tutte le strutture suddette hanno raggiunto uno sviluppo maggiore, l'anello cambiale è completo o quasi e così pure l'anello di legno interno. Osservando quest'ultima formazione, si distinguono ancora bene i quattro punti, cui più in basso corrispondevano i quattro fasci legnosi alterni primari, ed anche l'estensione che raggiungono le ali di legno primario sotto il cribro. Il legno secondario comincia a dif-

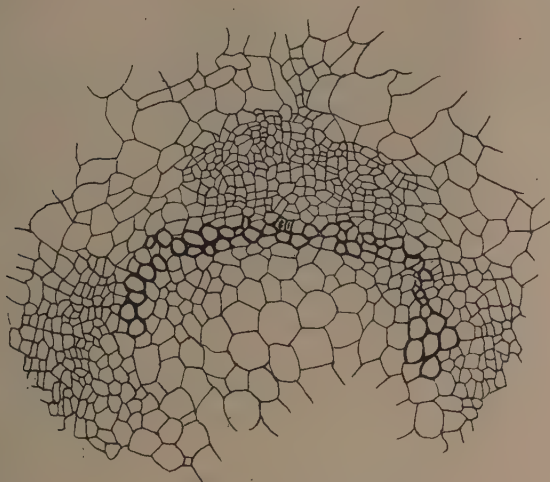


Fig. 3 ($\times 270$)

ferenziarsi su tutto l'anello cambiale, però si osserva ancora una notevole differenza fra i diversi punti del cilindro legnoso; anche se la differenziazione di elementi legnosi di origine cambiale è abbozzata ovunque, essa è molto più arretrata nelle zone corrispondenti alla parte mediale di ogni fascio cribroso, cioè ai punti più lontani del legno primario, dove il cambio non si è trovato probabilmente mai a contatto diretto con tracheidi legnose primarie.

Fra tutte le germinazioni di Abietacee da me osservate, *Abies cephalonica* è quella che presenta più schematicamente e più chiaramente tale fenomeno. Ma anche negli altri generi, in cui le strutture primarie sono minori e l'attività cambiale precocissima, c'è sempre lo stesso rapporto e la stessa relazione fra legno primario e differenziazione del legno di origine cambiale ⁽¹⁾.

Dalla breve descrizione dei fatti suesposti scaturisce una prima conclusione e cioè che la genesi dei tessuti conduttori secondari dal meristema

(1) Con modalità del tutto simili si ripete nel tempo la stessa successione di fenomeni che abbiamo seguito nello spazio. Cioè, prendendo in considerazione varie plantule di età diverse e osservando in ciascuna di esse le strutture di uno stesso livello, ci troveremmo davanti ad una successione del tutto simile a quella sopradescritta.

cambiale è un fatto assai complesso. In primo luogo il cambio, sia primario che secondario, che appare sempre localizzato in continuità con un tessuto conduttore primario (in particolare col cribro), si estende in seguito anche al di fuori della regione del fascio conduttore primario corrispondente e si segmenta regolarmente per divisioni radiali delle sue cellule, che ne aumentano il perimetro, e per numerose divisioni tangenziali, che portano alla produzione di anelli concentrici di elementi seriatati rispetto al cambio che li produce.

Il tessuto che si produce per le divisioni tangenziali del cambio, sia esternamente che internamente all'anello cambiale, è un tessuto indifferenziato, di natura parenchimatosa, facilmente riconoscibile dal parenchima di origine primaria, con cui può trovarsi a contatto, per la caratteristica serializzazione delle sue cellule.

Questo parenchima secondario *relativamente indifferenziato* si differenzia in tessuto legnoso e cribroso soltanto quando venga in contatto col relativo tessuto conduttore (cribroso o legnoso) primario.

Questa osservazione ci porta alla conclusione che alla formazione del legno e del cribro secondario, differenziati come tessuti definitivamente funzionanti, occorrono almeno due tappe: 1°) la generazione di un tessuto secondario dal cambio; 2°) la organizzazione di questo tessuto indifferenziato in tessuto definitivo legnoso e cribroso. Al primo fenomeno presiede il cambio, meristema le cui possibilità sono limitate alla generazione di un tessuto eminentemente plastico del tutto simile a se stesso; al secondo presiedono il cribro e il legno primario, che sembrano determinare la differenziazione del tessuto di origine cambiale nei relativi tessuti definitivi, atti a funzionare come tali.

Se si dà uno sguardo ai problemi riguardanti lo sviluppo dell'embrione e delle sue varie parti negli animali, ci troviamo davanti ad una vasta letteratura soprattutto sperimentale, letteratura che non trova riscontro nei vegetali. Alludo in modo particolare alla teoria degli organizzatori che venne formulata dallo Spemann, e che è stata confermata e convalidata da ricerche successive di lui, dei suoi collaboratori e di altri embriologi (cfr. in proposito Chiarugi G., *Embriologia*, vol. II, p. 149).

In base a queste ricerche: *è stato sperimentalmente dimostrato negli anfibii che lo sviluppo degli abbozzi embrionali primari, che si formano nelle diverse regioni dell'uovo, non avviene in generale per un processo di autodifferenziazione, ma per la induzione esercitata da speciali materiali organizzatori che sono in origine localizzati in una determinata regione dell'uovo, il centro di organizzazione...* È possibile, anzi sembra probabile, che nello sviluppo normale gli organizzatori si trasmettano dall'uovo gradualmente alle parti che per le prime si differenziano ed agli organi fondamentali ed ai loro derivati, con limitazioni progressive nella sfera e nelle modalità della loro influenza. (Chiarugi G., loc. cit., p. 166 e p. 163). L'azione degli organizzatori sarebbe, con tutta verosimiglianza, di natura chimica.

Anche nel caso del legno e del cribro secondario *non* siamo davanti ad un processo di autodifferenziazione. Il meristema, che è la matrice di questi tessuti, è il generatore di un tessuto indifferenziato, mentre il legno e il cribro primario *inducono* in questo tessuto indifferenziato la differenziazione rispettivamente in legno e cribro secondario. Il legno e il cribro primario ricordano in questa loro funzione gli *organizzatori* degli organi e tessuti animali i quali: *oltre a possedere una loro propria capacità di sviluppo, determinano la particolare evoluzione di altre parti del germe per l'innanzi relativamente indifferenziate*. (Chiarugi G., loc. cit., p. 154).

Questo fenomeno riguardante l'evoluzione e la differenziazione di un apparato nuovo in giovani plantule ci fa supporre che probabilmente leggi analoghe regolino la differenziazione nei tessuti animali e nei vegetali. Nel nostro caso ci troveremmo davanti ad organizzatori vegetali di un grado assai alto (Chiarugi G., loc. cit.) limitatissimi nella sfera e nelle modalità della loro influenza, in proporzione alla distanza, nel tempo e nello spazio, che li separa da un primitivo *centro di organizzazione*, in cui tutte le possibilità realizzate ulteriormente si troverebbero raccolte.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE
PRESSO LA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO REALE PER *LA MINERALOGIA E LA GEOLOGIA*

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio lire 10.000).

I., ALOISI PIERO. — 1. « Osservazioni sui pirosseni di Campiglia Marittima (Toscana) » (st.). — 2. « Rocce della Colonia Eritrea raccolte dalla Missione Corni-Calciati-Bracciani » (st.). — 3. « Determinazione approssimativa di 2 V nelle sezioni sottili dei minerali » (st.). — 4. « Contributo allo studio dei pirosseni manganiferi » (st.). — 5. « Diagramma per la determinazione dei plagioclasti, per mezzo dei geminati doppi albite-Carlsbad » (st.). — 6. « Rocce della Somalia raccolte dalla seconda Missione Stefanini » (st.). — 7. « I minerali delle rocce e la loro determinazione per mezzo del microscopio » (st.). — 8. « Sulle probabili provenienze delle serpentine nel coronamento dei cippi tombali etruschi » (st.). — 9. « Deduzione semplificata della formula di Fresnel, in due casi particolari » (st.). — 10. « Gli studi petrografici sull'Eritrea, sulla Somalia e sulla Libia » (st.). — 11. « Alcuni diamanti medicei » (st.). — 12. « Le gemme » (st.). — 13. « Sopra un geminato di andalusite » (st.). — 14. « Le rocce (Himalaia, Caracorum, Turchestan cinese) » (st.). — 15. « Sul carburo di silicio raccolto nella Migiurtinia (Somalia settentrionale) » (st.). — 16. « Veduta di Livorno in una tavola di pietre dure dei primi del Seicento » (st.). — 17. « Questioni di geologia toscana, particolarmente elbana » (st.).

2. DESIO ARDITO. — 1. « La Grotta Azzurra di Castelrosso (Mar di Levante) » (st.). — 2. « La creta nel bacino di Firenze » (st.). — 3. « Per lo studio sismologico del Dodecaneso » (st.). — 4. « La frana di Peghera in Val Taleggio (Alpi Bergamasche) » (st.). — 5. « La costituzione geologica delle Alpi Giulie Occidentali » (st.). — 6. « Appunti morfologici sui dintorni di Courmayeur (Val d'Aosta) » (st.). — 7. « Il Giura nel Dodecaneso » (st.). — 8. « Note illustrative della carta geologica delle Tre Venezie. Foglio " Pontebba " » (st. in collab., carta). — 9. « Faune triassiche e giurassiche delle Alpi Giulie Occidentali » (st.). — 10. « Un lago alpestre nell'isola di Coo (Dodecaneso) » (st.). — 11. « Le variazioni dei ghiacciai del Canin nell'ultimo quarantennio » (st.). — 12. « Appunti ed osservazioni sui ghiacciai del Gruppo Ortles-Cevedale » (st.). — 13. « Sulla presenza del Miocene nei dintorni di El-Abiar (Cirenaica) » (st.). — 14. « Nuove ricerche sui ghiacciai del gruppo Ortles-Cevedale (Campagna del 1927) » (st.). — 15. « Indizi di bradisismi recenti nell'isola di Tèlendo (Egeo) » (st.). — 16. « La morfologia carsica dell'isola di Castelrosso (Mar di Levante) » (st.). — 17. « Risultati scientifici della Missione alla Oasi di Giarabùb (1926-27). Parte I. La Morfologia » (st.). — 18. « Risultati scientifici della Missione alla Oasi di Giarabùb (1926-27). Parte II. La Geologia » (st.). — 19. « Prime notizie sulla costituzione geologica della Sirtica (Libia) » (st.). — 20. « Risultati scientifici della Missione alla Oasi di Giarabùb (1926-27). Parte III. La Paleontologia » (st.). — 21. « Sugli spartiacque della Cirenaica » (st.). — 22. « Studi geologici sulla regione dell'Albania (Prealpi Bergamasche) » (st.). — 23. « L'orografia

del bacino della Fella (Friuli) in rapporto con la costituzione geologica » (st.). — 24. « Itinerari percorsi durante la Spedizione Geografica Italiana nel Karakorum (1929). Appunti geologici e geografici » (st.). — 25. « Sulla presenza del siluriano fossilifero nell'isola di Coe (Egeo) » (st.). — 26. « Il Carbonifero nell'isola di Rodi (Egeo) » (st.). — 27. « Sulla presenza dell'Oligocene in Sirtica (Libia) » (st.). — 28. « Le isole italiane dell'Egeo (Studi geologici e geografico-fisici) » (st.). — 29. « Osservazioni geologiche e geografiche compiute durante un viaggio nella Sirtica » (st.). — 30. « Risultati scientifici della Missione alla Oasi di Giarabùb (1926-27). Parte IV. La Idrologia » (st.). — 31. « Sulla presenza dell'Eocene nel Fezzan Orientale (Tripolitania) » (st.). — 32. « Osservazioni geografiche e geologiche compiute dalla spedizione della R. Accademia d'Italia nel Deserto Libico e nel Fezzan Orientale (1931) » (st.). — 33. « Nuovi dati sulla geologia della Libia » (st.). — 34. « Schizzo geologico della Libia alla scala di 1 : 4.000.000. Note illustrative » (st.). — 35. « Lamellibranchi Paleogenici della Sirtica e del Fezzan Orientale » (st.). — 36. « Faune neogeniche della Sirtica (Cirenaica) » (st.). — 37. « Sull'esistenza di piccoli ghiacciai nella Persia Occidentale » (st.). — 38. « Relazione preliminare sullo studio idrologico-glaciologico del Ghiacciaio del Careser (Gruppo Ortles-Cevedale) » (st.). — 39. « Appunti geografici e geologici sulla catena dello Zardeh Kuh in Persia » (st.). — 40. « Sull'età delle « pietre da coti » della Val Seriana » (st. in collab.). — 41. « Sull'esistenza di falde tettoniche in Val Taleggio (Prealpi Bergamasche) » (st.). — 42. « Studi geologici sulla Cirenaica » (ms.).

3. SERRA AURELIO. — 1. « Rilievi sulle relazioni che intercedono fra le forme cristalline e le proprietà fisiche e chimiche dei minerali » (st.). — 2. « Un nuovo giacimento e i suoi minerali in provincia di Sassari » (st.). — 3. « Ulteriori notizie su alcuni minerali della provincia di Sassari » (st.). — 4. « Osservazioni sulla sistematica delle rocce » (st.). — 5. « Il ferro nativo a Bolotana e Silanus in Sardegna » (st.). — 6. « Osservazioni sulla cristallizzazione. La teoria del Kucarenko esaminata sotto il punto di vista chimico-fisico » (st.). — 7. « Cristallografia chimica. Osservazioni sulla cristallizzazione: influenza della fase disciolta nei fenomeni del polimorfismo » (st.). — 8. « Diffusione allo stato cristallino a temperatura ordinaria con la pressione e l'azione dei raggi ultra-violetti » (st.). — 9. « Notizie petrografiche e mineralogiche su rocce della provincia di Nuoro (Bolotana-Silanus) » (st.). — 10. « Studio lito-mineralogico riguardante le provincie di Sassari e Nuoro » (st.). — 11. « Reazioni allo stato solido ed a temperatura ordinaria » (st.). — 12. « Rocce vulcaniche di Silanus e Bolotana (Nuoro): confronto delle medesime con altre analoghe della Sardegna » (ms.). — 13. « Contributo alla conoscenza dei giacimenti minerari di Alghero (Sassari) » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI

AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE MATEMATICHE

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio lire 4.000).

1. BIGLIARDI PASQUALINA. — « Trasformazione asteroidale » (ms.).

2. DARBI GIULIO. — 1. « Problemi di analisi indeterminata di 2° e 3° grado » (st.). — 2. « Riducibilità e gruppi delle equazioni del tipo: $x^{m+1} + \alpha_1 x^m + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0$ » (ms.).

3. MERCOGLIANO DOMENICO. — 1. « Sul numero delle equazioni quadratiche sufficienti a rappresentare una curva razionale C_r normale » (ms.). — 2. « Sul numero delle equazioni sufficienti a rappresentare in S_r le superfici rigate razionali normali di data specie » (ms.). — 3. « Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché due cubiche binarie abbiano due radici comuni » (st.). — 4. « I complessi contenenti la svilup-

pabile delle tangenti di una cubica gobba » (ms.). — 5. « Sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché due biquadratiche binarie abbiano una, due, tre radici comuni ecc. » (ms.). — 6. « Sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché tre cubiche binarie abbiano una o due radici comuni ecc. » (ms.). — 7. « Sull'insegnamento dinamico della Matematica nella scuola media » (ms.).

4. REGHINI ARTURO. — « Per la restituzione della geometria pitagorica » (st.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE FISICHE

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio lire 4.000).

1. BUGINI ENRICO. — 1. « Il processo di recisione con utensili rotanti » (st.). — 2. « Note di metrologia tecnologica » (st.).

2. GLIOZZI MARIO. — « Storia dell'elettricità e del magnetismo dalle origini fino all'invenzione della pila » (ms.).

3. MAYR GIOVANNA. — 1. « Introduzione alla termodinamica » (st.). — 2. « Dimostrazione didattica razionale dalla forza centrifuga » (st.). — 3. « Il secondo principio della termodinamica dal punto di vista statistico » (st.). — 4. « I sistemi di misure elettriche (Teorie classiche) » (ms.). — 5. « I sistemi di misure elettriche (unità e teorie odierne) » (ms.). — 6. « Sopra una anomalia magnetica » (ms.). — 7. « Sui metodi usati per determinare il coefficiente di magnetizzazione di sostanze para e dia-magnetiche » (ms.).

4. SCARDINA MARIANO. — « Le esperienze di interferenza e diffrazione della luce » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE CHIMICHE

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio lire 4.000)

1. COMELLA GIUSEPPE. — « Sulle variazioni quantitative delle miscele di tre sali omogenei e su un conseguente metodo di simultanea determinazione dei tre sali » (ms.).

2. LODI GIULIO. — « L'azione del solfato di calcio nella conservazione delle sanse » (st.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio L. 4.000)

1. FEDELE MARCO. — 1. « Ricerche sulla natura dei ritmi muscolari negli invertebrati » (st.). — 2. « I nervi del tronco arterioso nel quadro della innervazione cardiaca nei rettili e il problema del "depressore" nei vertebrati » (ms., tavole).

2. GASPARRINI ORESTE. — « Studio fisico sul labirinto umano considerato come organo del senso dell'equilibrio » (st.).

3. MOLA PASQUALE. — « Geografia Sarda peschereccia » (ms. e atlante).

4. MORETTINI ALESSANDRO. — 1. « La fecondazione nel pesco » (st.). — 2. « Contributo allo studio dell'impollinazione nell'albicocco e nel ciliegio » (st.). — 3. « L'andamento del sistema radicale nel pesco in relazione alla profondità di piantagione » (st.).

5. MORI ALBERTO. — 1. « Note sulla pesca a Zara e a Lagosta e sull'emigrazione peschereccia nell'Adriatico » (st.). — 2. « L'approvvigionamento di Zara » (st.). — 3. « Grotte nelle breccie costiere del Monte Argentario » (st.). — 4. « La localizzazione delle industrie di Zara » (ms.). — 5. « Le variazioni recenti della linea di spiaggia lungo il litorale della Toscana meridionale » (ms., con atlante).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO MINISTERIALE (ISTRUZIONE NAUTICA)
PER LAVORI SOPRA ARGOMENTI DI NATURA
PEDAGOGICO-PROFESSIONALE

(Scadenza 31 dicembre 1934 - Premio lire 5000).

1. MASDEA ANTENORE. — « Elementi di architettura e di costruzione navale » (litogr.).

2. POPPI GIORGIO. — « Avviamento allo studio delle macchine termiche » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO MINISTERIALE (ISTRUZIONE NAUTICA)
PER LAVORI SOPRA ARGOMENTI DI SCIENZE NAUTICHE

(Scadenza 31 dicembre 1934 - Premio lire 5000)

1. SIMEON GIUSEPPE. — 1. « Elementi di cosmografia e navigazione astronomica » (st. e tavv.). — 2. « Su di un nuovo metodo per determinare il punto in volo con osservazioni astronomiche » (st.). — 3. « Apparato meccanico per il calcolo dell'altezza e dell'azimut » (st.). — 4. « Metodo grafico e rapido per determinare la retta di altezza in volo » (st.). — 5. « Meridiana solare per l'orientamento in volo » (st.). — 6. « Della costruzione di un nuovo regolo per il calcolo dell'altezza e dell'azimut » (st.). — 7. « Di alcune proiezioni cilindriche conformi adatte alla determinazione della retta di altezza » (st., in collab.). — 8. « Sulla determinazione della rotta iniziale nelle carte gnomoniche polari » (st.). — 9. « Della costruzione di una tavola per il calcolo dell'altezza » (st.). — 10. « Diagrammi per il calcolo della semiconvergenza dei meridiani » (st.). — 11. « Appendice al corso di cosmografia e navigazione astronomica » (litogr.). — 12. « Lezioni di navigazione » (litogr.). — 13. « Lezioni di astronomia nautica » (litogr.). — 14. « Sulla determinazione del punto in volo con rette di altezza » (st.). — 15. « Studio del cerchio massimo in vicinanza dei nodi » (st.). — 16. « Tavole per il calcolo degli elementi della retta di altezza » (st.). — 17. « Sulla rappresentazione dei moduli di riduzione lineare e confronto con l'ellisse indicatrice delle deformazioni lineari » (st.). — 18. « Considerazioni sul cinema-derivometro Gatty » (st.). — 19. « Comportamento della bussola magnetica nella virata alle varie latitudini » (st.). — 20. « Sestante a bolla d'aria per aviazione » (st.). — 21. « Tavole di navigazione aerea » (st.). — 22. « Norme da seguire nella compensazione delle bussole magnetiche per aviazione » (st.). — 23. « Trattato di navigazione aerea: I. Navigazione aerea piana » (st.). — 24. « Azione dei campi magnetici terrestre permanente e temporaneo sulla bussola di un aeromobile in virata » (ms.). — 25. « Nuovi calcolatori di navigazione astronomica per aeromobili » (ms.).

2. VANNI MASSIMO. — « Navigazione sferica » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO BATTISTA GRASSI

(Scadenza 31 dicembre 1934 — Premio lire 6.000).

1. GANORA R. — « Fotosintesi vitali » (st.).

2. JERACE FRANCESCO. — 1. « Ricerche sulla morfologia dei parassiti della febbre estivo-autunnale » (st.). — 2. « L'azione sterilizzante della plasmochina sui gameti dei parassiti malarigeni e sua importanza profilattica » (st.). — 3. « La formula leucocitaria negli individui adulti normali » (st.). — 4. « Metodi per il conteggio dei parassiti malarici » (st.). — 5. « La colorazione dei parassiti malarici » (st.). — 6. « Sul *Dactylosoma ranarum* (Kruse 1890) » (st.). — 7. « Modificazioni della formula leucocitaria nella malaria umana sperimentale » (st.). — 8. « Osservazioni ecc., sulla malaria umana indotta con anofeli o con sangue » (st.).

3. LA FACE LIDIA. — 1. « Alcune osservazioni morfologiche e biologiche sulla *Aclerda Berlesei Buffa* » (st.). — 2. « La metamorfosi dell'*Aclerda Berlesei Buffa* » (st.). — 3. « La *Formica Argentina* » (st.). — 4. « Osservazioni morfologiche e biologiche sull'*Antonina Phragmitis Marchal* » (st.). — 5. « Osservazioni biologiche sull'*Iridomyrmex humilis* » (st.). — 6. « Osservazioni sulla fondazione delle colonie nell'*Iridomyrmex humilis* » (st.). — 7. « La *Dorifora della Patata* » (st.). — 8. « Osservazioni sulla nutrizione del *Culex pipiens* » (st.). — 9. « Ricerche sulla Biologia del *Culex pipiens*. L'alimentazione e l'ibernamento » (st.). — 10. « Revisione degli Anofelini Italiani » (st.). — 11. « Revisione degli anofelini italiani. Nota II: Osservazioni sugli anofelini del Ferrarese » (st.). — 12. « La zooprofilassi nella lotta antimalarica secondo le concezioni di B. Grassi » (st., in collab.). — 13. « Sulla resistenza delle larve degli Anofelini alla salinità » (st.). — 14. « Faune Anofeliniche » (st.). — 15. « Morfologia delle larve Anofeliche e descrizione delle specie Italiane » (st.). — 16. « Sull'esistenza di razze diverse di *Anopheles maculipennis* » (st.). — 17. « Contributo allo studio della biologia delle diverse razze di *Anopheles maculipennis* » (st.). — 18. « Studies on the bionomics of *Aedes aegypti* » (ms.).

4. PALOMBI ARTURO. — 1. « *Bacciger bacciger* (Rud.), trematode digenetic ecc. » (st.). — 2. « Gli stadi larvali dei Trematodi del golfo di Napoli » (st.). — 3. « *Cercaria pectinata* Huet e *Bacciger bacciger* (Rud.) » (st.). — 4. « *Bacciger bacciger* (Rud.) Nicoll 1914 forma adulta di *Cercaria pectinata* Huet 1891 » (st.). — 5. « Rapporti genetici tra *Cercaria setifera* Monticelli (non Joh. Müller) ed alcune specie della famiglia *Allocreadiidae* » (st.). — 6. « Rapporti genetici tra *Lepocreadium album* Stossich e *Cercaria setifera* (non J. Müller) Monticelli » (st.). — 7. « *Stylochus inimicus* sp. nov. » (st.). — 8. « La copulazione nei Trematodi » (st.). — 9. « Per una migliore conoscenza dei Trematodi endoparassiti dei pesci del golfo di Napoli » (st.). — 10. « Il ciclo biologico di *Diptherostomum brusinae* Stossich. Considerazioni sui cicli evolutivi delle specie affini e dei trematodi in generale » (st.). — 11. « *Diptherostomum brusinae* Stossich 1888 » (tavola). — 12. « Il ciclo evolutivo di *Diptherostomum brusinae* Stoss » (st.). — 13. « Il ciclo biologico di *Diptherostomum brusinae* Stossich » (st.). — 14. « Il polimorfismo nei Trematodi » (st.). — 15. « Turbellari della Nuova Guinea » (st.).

5. VANNI VITTORIO. — « Ricerche sulla sarcosporidiosi » (st.).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 maggio 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano prof. G. CASTELNUOVO.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sulle grandezze meccaniche fondamentali.* Nota ⁽¹⁾
del Corrisp. G. GIORGI.

Quali e quante fra le grandezze meccaniche ⁽²⁾ sono da assumere come fondamentali dal punto di vista dimensionale?

È superato il tempo in cui si tendeva a riguardare la terna $[L][M][T]$ come obbligatoria o quasi. Lord Kelvin, Tait e Maxwell, avevano abituato i fisici all'idea che le tre fondamentali classiche si possono, volendo, ridurre a due sole, mediante accorgimenti convenzionali diversi: in questi accorgimenti era fatta sotto qualche forma intervenire la costante di gravitazione per far dipendere l'unità di $[M]$ dalle altre due. Altre volte è stato additato che qualche altra grandezza geometrica o meccanica, già riguardata come numero puro, può considerarsi dotata di dimensioni; e allora le fondamentali sarebbero più di tre. Nel senso della riduzione al minimo, un passo ulteriore è stato fatto invece da quando la fisica relativistica ci ha abituato a misurare lunghezze come tempi; così si avrebbe una sola dimensione fondamentale. Questa dimensione sparirebbe a sua volta se si ricavasse dai fenomeni atomici o dai granuli elementari un'unità naturale di misura; il che in fondo era stato suggerito anche da Maxwell; e condurrebbe a un sistema di misura completamente adimensionale.

Noi siamo così più abituati che i nostri predecessori a riconoscere che la scelta delle dimensioni fondamentali dipende da arbitrio, e le ragioni di

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1935.

(2) Nel dire grandezze « meccaniche » intendo incluse quelle geometriche e quelle di origine puramente matematica in generale.

preferenza a favore della terna classica, sono principalmente ragioni di opportunità pratica. Ma fino a quale punto deve accettarsi questo asserto? È realmente tutto arbitrario? Vi è qualche cosa a questo riguardo su cui si discute, e che ritengo opportuno, in questa sede, cercare di mettere a posto.

Si può dire che definendo la velocità di un corpo come il rapporto tra lo spazio percorso dal corpo e quello percorso simultaneamente dalla luce, la velocità diviene un numero puro; e allora le lunghezze si misurano in tempi: cioè quando è assunta ad arbitrio l'unità di tempo, p. es., il secondo, ogni lunghezza è misurata dal numero di secondi che la luce impiega a percorrerla. Allora le dimensioni $[L]$ e $[T]$ divengono la stessa cosa: ma lo divengono convenzionalmente; cioè in un sistema impostato a quel modo, i tempi sono fondamentali, e le lunghezze non divengono tempi, ma intervengono come grandezze derivate, a cui con un artificio convenzionale è stata attribuita la dimensione $[T]$. Noi siamo abituati a riconoscere che negli schemi comuni, p. es. le aree e i volumi non sono veri quadrati e cubi di lunghezze, ma sono grandezze derivate, con dimensioni assimilate convenzionalmente a $[L^2]$, $[L^3]$. Nello stesso modo si deve riconoscere che in uno schema di tipo einsteiniano $[L]$ deve essere riguardata come una dimensione fisicamente diversa da $[T]$ ma convenzionalmente eguagliata a una $[T]$. Mi sembra che questo modo di esprimersi metta a posto la questione fra chi ritiene inaccettabile l'assimilazione fra $[L]$ e $[T]$, e chi volesse asserire che lunghezze e tempi possono identificarsi del tutto. In ogni schema prendiamo certe dimensioni fondamentali: le grandezze di altra natura hanno dimensioni che per definizione convenzionale vengono eguagliate ad alcune di quelle o a loro combinazioni; ma in questa identificazione non si deve pretendere di vedere un'uguaglianza fisica.

Accettato questo, la risposta viene naturalmente anche per la questione sull'angolo. Se l'angolo si definisce come rapporto tra l'arco e il raggio, nessun dubbio che l'angolo è un numero puro; cioè indicando con $[\theta]$ la dimensione di esso, si ha $[\theta] = [L^0 M^0 T^0]$. Ma anche questa è una convenzione, non è una relazione obbligatoria. Invece di accettare quella definizione, possiamo riserbarci la libertà di misurare gli angoli in gradi o in radianti o in angoli retti ecc.; allora un angolo diviene una grandezza che viene misurata da un'altra della stessa specie assunta arbitrariamente come unità; e quindi è una grandezza da considerare alla stessa stregua delle altre grandezze concrete; e $[\theta]$ si presenta come quarta dimensione fondamentale, da accettare a lato di $[L]$, $[M]$, $[T]$. Questo modo di ragionare può sorprendere a prima vista, quando si è abituati a certe formulazioni classiche: ma in realtà è corretto; per la grandezza angolo vale lo stesso come per la grandezza velocità; entrambe sono numeri puri se rispettivamente il radiante e la velocità della luce si fanno intervenire come unità naturali e fisse; divengono grandezze di un tipo o di un altro, se si fanno

altre convenzioni; in realtà sono grandezze concrete, la cui assimilazione a numeri puri è effetto di convenzione.

La tendenza moderna è non di ridurre, ma di moltiplicare le grandezze fondamentali. Così è conveniente accettare [θ] perchè in questo modo si evita l'assimilazione artificiale fra coppia e lavoro⁽¹⁾. Similmente per essere completi converrebbe inscrivere tra le fondamentali l'unità di angolo solido, quella di frequenza ecc.; più particolarmente interessa mettere in evidenza un'altra grandezza, l'*avvolgimento*, la cui unità sarebbe nell'uso più comune la *spira*: l'elaborazione degli schemi di unità elettriche ha fatto riconoscere (al prof. Bottani) l'opportunità di far figurare la spira nelle formole dimensionali: ciò evita di assimilare forza magnetomotrice con intensità di corrente, impulsione elettromotrice con flusso magnetico; e se non si vuol fare questo, bisogna accettare di denominare *ampere* l'unità nota sotto il nome di *amp-spira*; il che altra volta avevo fatto, ma senza incontrare il favore generale. L'unità spira è suggerita dall'elettrotecnica, ma è fra le unità geometriche.

Un'altra grandezza che si tende a considerare come riferibile a unità arbitraria, quantunque di origine aritmetica, è la *attenuazione*, che si presenta quando si studia la trasmissione dei segnali. Sarebbe una grandezza numerica, ma poichè viene misurata talvolta in « neper » talvolta in « decibel » e altre unità, viene a presentarsi come entità fisica dotata di dimensione « sui generis ».

Si potrebbe proseguire in questa enumerazione.

Riassumendo, noi dobbiamo dire che la riduzione dimensionale di svariate grandezze fisiche ad alcune fondamentali non dipende da dettami teorici. Scientificamente sarebbe più corretto riconoscere tante dimensioni fondamentali quante sono le diverse qualità di grandezze da misurare. Per ragioni solamente di convenienza pratica, si stabiliscono certe convenzioni in base a cui le dimensioni e le unità di tante grandezze si fanno dipendere da alcune poche fondamentali. Ma la pratica stessa mostra che non è opportuno ridurre di troppo il numero delle fondamentali: quanto minore è il numero di esse fondamentali, tanto più vengono assimilate dimensionalmente fra loro certe grandezze che hanno natura fisica diversa. Anche senza oltrepassare il campo delle grandezze meccaniche, si vede che le tre classiche [L], [M], [T], sono troppo poche, e che riconoscendo un maggior numero di fondamentali si guadagna in chiarezza di rappresentazione, e in semplicità di calcoli. Ridurre a due, a una sola o a nessuna dimensione è possibile, e

(1) Il *Bureau of Standards* americano in un suo resoconto ufficiale si è mostrato esitante ad accettare nel quadro del mio sistema d'unità il *joule* quale unità di coppia meccanica. Accetto volentieri la distinzione fra lavoro e coppia, ma per fare così bisogna riconoscere all'angolo una dimensione fisica sua propria, perchè

$$[\text{lavoro}] = [\text{coppia}] \times [\text{angolo}]$$

e se l'angolo si riguarda come numero puro, la medesima unità rimane in comune per le altre due grandezze.

può essere cosa interessante come studio, ma non sarebbe un progresso, nè per la teoria nè per la pratica.

Volendo però dire di questa riduzione, osserviamo che facendo intervenire le proprietà della cosiddetta « fisica dell'etere » ⁽¹⁾ si fa la riduzione a una dimensione sola. Già col riferire gli angoli piani e solidi, gli avvolgimenti, le attenuazioni ecc. a unità definite in astratto (radiante, steradiante, spira, neper ecc.), le dimensioni del gruppo meccanico erano ridotte a tre; la costante di gravitazione k ne elimina una; la velocità della luce c ne elimina un'altra. Però, a parte la questione concettuale, ciò avviene attraverso due obiezioni gravi: una è che k, c non sono conoscibili con numero sufficiente di decimali, e quindi condurrebbero a un sistema metrologicamente inservibile; un'altra è che nè l'una nè l'altra vengono additate dalla teoria come costanti assolute.

Anche prescindendo da obiezioni simili, la « fisica dell'etere » non fornisce mezzo, che noi conosciamo, per fissare a priori l'unità residua che occorre; e questo fatto, secondo me, è interessante a rilevare per chi voglia discutere le proprietà fisiche dello spazio vuoto ⁽²⁾. Si ha invece in mille modi un'unità naturale ulteriore se si fa intervenire la materia, atomica o elettronica. La massa del neutrone basta p. es. per avere un'unità naturale di massa, nello stesso modo come il cosiddetto raggio nell'orbita normale dell'atomo d'idrogeno sarebbe un'unità normale di lunghezza. Gli studi fatti in questo senso, come quelli recenti dell'ing. Laboccetta, interessano per mettere in evidenza ravvicinamenti istruttivi.

(1) Dico « fisica dell'etere » e « fisica della materia » nel significato tradizionale; sono due campi che fino a un certo piano dei studi rimangono distinti nettamente; ma la distinzione comincia a divenire dubbia nella fisica subatomica e quantistica.

(2) V. quanto ho scritto in *Les idées nouvelles sur la structure de l'éther*. « Revue générale d'Electricité », 14 aprile 1928, to. XXIII, pp. 643-653.

Astronomia. — *Sulla possibilità di nuovi indirizzi della teoria della refrazione astronomica e di occasionali contributi alla fisica dell'atmosfera.* Nota I ⁽¹⁾ del Corrisp. V. NOBILE.

La costruzione di una soddisfacente teoria della refrazione astronomica alla quale gli astronomi richiedono una formola per correggere le direzioni osservate degli astri è gravemente ostacolata, come è noto, dalla insufficienza delle nostre cognizioni sulla costituzione fisica dell'atmosfera e tale insufficienza permane anche dopo la introduzione di alcune ipotesi atte a semplificare i termini del problema e tali da dar luogo a dubbi e riserve di qualche rilievo. Riguardo a queste ipotesi notiamo, in primo luogo, che la teoria semplificata ammette uno stato di equilibrio meccanico che non può, a rigore, coesistere col meccanismo dei moti convettivi per cui nella troposfera, si realizza la stabilizzazione del miscuglio dei vari gas costituenti l'aria atmosferica. Quei moti sono, del resto, anche necessariamente irregolari perchè tale è la distribuzione della irradiazione termica sugli strati superficiali terrestri e, di conseguenza, la trasmissione da questi agli strati atmosferici vicini; sorgono così anche, naturalmente, fondate presunzioni di una imperfetta isotropia ottica dell'atmosfera intorno alla verticale e della conseguente possibile esistenza di una refrazione in azimut. Ma non sono, notoriamente, obiezioni di tal natura le più gravi fra quelle che possono muoversi sull'assetto attuale della teoria della refrazione astronomica: anche semplificato il problema colle ipotesi anzidette quella teoria non può costruirsi su basi solide per insufficienza di dati fisici, come subito si rende manifesto e come è necessario ricordare qui esplicitamente per lo scopo particolare del presente studio.

Consideriamo infatti la formola che fornisce la correzione di refrazione:

$$(1) \quad R = \zeta - \zeta_0 = \int_c^a \frac{\frac{a}{r} d\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}^{(2)}$$

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) In questa formola ζ_0 e ζ sono rispettivamente le distanze zenitali apparente (alterata dalla refrazione) e corretta, a è il raggio della Terra (considerata, nell'intorno della regione considerata, come sferica), r la distanza dal centro della Terra dello strato sferico a cui corrisponde l'indice assoluto di refrazione $\mu(r)$, μ_0 l'indice analogo per $r = a$ e $k = 1/\sin \zeta_0$.

Notiamo, incidentalmente, che tale formola si può con procedimento meno artificioso e più elegante di quello generalmente seguito, desumere da principi variazionali: consi-

vediamo che il calcolo dell'integrale non può farsi senza conoscere la relazione che lega μ e r . Essendo impossibile assegnare *a priori* tale relazione, gli astronomi si son visti costretti a rivolgersi, per la conoscenza di altri

derando cioè la linea che segue il raggio luminoso nell'atmosfera come una delle estremali corrispondenti al problema di minimizzare l'integrale

$$\int_C \mu ds$$

(cammino ottico, secondo Fermat), dove μ ha il significato innanzi indicato e ds è l'elemento della linea da determinare.

Se immaginiamo stabilito nel piano verticale passante per la stella considerata un sistema di coordinate polari avente il polo nel centro della Terra e l'asse polare diretto verso lo zenit, sarà, detta r' la derivata del raggio vettore rispetto alla coordinata θ ,

$$\int_C \mu ds = \int_C \mu(r) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

Non dipendendo la funzione integranda esplicitamente dalla variabile θ , l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial}{\partial r} \mu \sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial}{\partial r'} \mu \sqrt{r^2 + r'^2} = 0$$

ammette l'integrale primo

$$(a) \quad \frac{\mu^2}{r^2 + r'^2} = c$$

che conduce con una quadratura alla definizione delle estremali

$$(a_1) \quad d\theta = \frac{c dr}{r \sqrt{\mu^2 r^2 - c^2}}.$$

La (a) può intanto scriversi, introducendo l'espressione del ds e indicando con φ l'angolo del raggio vettore colla tangente, nell'una o nell'altra delle due forme

$$(b) \quad \mu r^2 \frac{d\theta}{ds} = c \quad ; \quad \mu r \sin \varphi = c$$

e se chiamiamo ζ l'angolo che la tangente alla traiettoria luminosa nel punto $P(r, \theta)$ fa colla verticale del punto di osservazione e notiamo che $\zeta = \varphi + \theta$, avremo, differenziando e tenendo conto della (a₁) e della (b),

$$d\zeta = d \arcsen \frac{c}{\mu r} + \frac{c dr}{r \sqrt{\mu^2 r^2 - c^2}}$$

e poichè la prima parte del secondo membro può scriversi

$$-c (\mu dr + r d\mu) = -\frac{c dr}{r \sqrt{\mu^2 r^2 - c^2}} - \frac{c d\mu}{\mu^2 r \sqrt{1 - \frac{c^2}{\mu^2 r^2}}},$$

si ha subito

$$d\zeta = -\frac{c d\mu}{\mu^2 r \sqrt{1 - \frac{c^2}{\mu^2 r^2}}} = \frac{\frac{c}{r} d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\mu^2 r^2}}}$$

e pertanto, dopo aver notato che per la seconda delle (b) si ha $c = \mu_0 a \sin \zeta_0$ e dopo aver posto $k = 1/\sin \zeta_0$ si ricade sulla (1).

dati, alla fisica, ma i vantaggi immediati sono stati poco rilevanti, perchè le nuove relazioni che fornisce la fisica se portano ad ampliare, non senza interesse, il campo delle indagini, non agevolano la soluzione del problema concreto e determinato che interessa l'astronomia. Ciascuna di quelle relazioni introduce infatti una nuova variabile incognita, onde la indeterminazione non è tolta, mentre il problema si trasforma in quello della fisica dell'atmosfera, supposta in stato di equilibrio. Infatti, mentre fra il potere refrangente $\mu - 1$ e la densità ρ e fra pressione, densità e temperatura assoluta T sussistono le relazioni

$$(2) \quad \rho = c_1 (\mu - 1) \quad , \quad p = c_2 \rho T,$$

la meccanica fornisce l'altra

$$dp = -g\rho dr$$

nonchè una quarta, sufficientemente esatta per lo scopo, cioè

$$g_0 a^2 = g r^2.$$

La eliminazione di g fra le ultime due permette quindi di aggregare alle (2) la relazione differenziale

$$(3) \quad dp = g_0 a \rho d\left(\frac{a}{r}\right)$$

e si vede allora che fra le cinque variabili ρ, μ, T, p, r sussistono le sole relazioni (2) e (3), le quali non bastano per esprimere le prime quattro delle dette variabili in funzione della quinta: ciò anche astraendo dalle varie obiezioni che possono muoversi sulla piena validità delle relazioni medesime e che sono di qualche entità.

Urgendo per la pratica astronomica, come si è detto, la necessità di pervenire ad una formola per la correzione dell'errore di refrazione, si è tentato di supplire alla scarsezza dei dati con ipotesi e ripieghi diversi, coll'aiuto dei quali si è giunti a caratterizzare dal punto di vista fisico i coefficienti che si presentano nello sviluppo in serie della funzione R secondo le potenze di $\operatorname{tg} \zeta_0$ ed anche a valutare approssimativamente il loro ordine di grandezza.

Non è mio intendimento di indugiarmi qui in discussioni sulla attendibilità di quelle ipotesi e sulla legittimità dei procedimenti di calcolo adoperati, tanto più che sulla validità della teoria costruita su quelle basi gli astronomi non si fanno eccessive illusioni e delle formole ottenute fanno un uso molto cauto e limitato (in generale le adoperano per la correzione di piccole distanze zenitali o di differenze di coordinate di stelle). Noto solamente che le relazioni fisiche sussidiarie (2) e (3), una volta riconosciute insufficienti al fine di un calcolo rigoroso dell'integrale R , non entrano più in gioco in maniera essenziale per la costruzione della attuale teoria della refrazione

astronomica, mentre esse potrebbero, appena fosse possibile di completarle con una quarta, compendiare, sia pure attraverso uno schema semplificato e sotto alcune riserve, la fisica dell'atmosfera. Ora, poichè noi abbiamo nell'epoca presente, per un numero considerevole di stelle, posizioni di alta precisione dalle quali ogni residuo di errori imputabili alla refrazione può ritenersi eliminato, si comprende come, calcolate in base alle dette coordinate le distanze zenitali (meridiane o extra-meridiane) di tali stelle per un determinato istante, il paragone delle distanze calcolate con quelle osservate e corrette da tutti gli errori diversi da quello di refrazione permetta di dedurre il valore numerico dell'effetto R per le singole stelle.

Sorge quindi in modo naturale l'idea di *affrontare coi dati così acquistati il problema inverso di quello della refrazione come è stato innanzi posto*: quello, cioè, di dedurre da una tavola ampia e accurata dei valori di R in funzione dell'argomento ζ_0 la determinazione dei primi termini di una serie che possa rappresentare, in strettissimo accordo colle osservazioni e *indipendentemente da qualsiasi ipotesi a priori*, la funzione $\mu_0/\mu(r)$. Tale concetto mi ha guidato nel presente studio, il quale mi ha permesso di accertare che non solo il problema è teoricamente determinato e praticamente accessibile, ma che esso è inscindibilmente connesso con quello di valutare l'altezza dell'atmosfera terrestre, ciò che rende possibile di pervenire alla determinazione di questo altro dato, importantissimo anche per la geofisica, con mezzi mai prima tentati e suscettibili di ogni perfezionamento in futuro.

Passo dunque a far qui dei risultati ottenuti un rapido e sintetico cenno senza entrare, per ora, in particolari sulla organizzazione più conveniente delle osservazioni nè sui criteri per la scelta delle stelle e per la deduzione dei valori più attendibili delle loro coordinate: questioni tutte delle quali sarebbe qui prematuro e fuor di luogo l'esame ⁽¹⁾.

Posto, in conformità di notazioni oramai abituali,

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{a + \zeta} = 1 - x \quad \text{e quindi} \quad \mu_0/\mu(r) = \varphi(x)$$

e in luogo di $k^2 \cdot 1 + \cot^2 \zeta_0$, sarà, detta h l'altezza totale dell'atmosfera e σ il valore di x corrispondente a $\zeta = h$,

$$(4) \quad \sigma = 1 - \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{-1}, \quad \frac{h}{a} = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

(1) È peraltro evidente la necessità che le osservazioni siano numerose, eseguite in un breve periodo di tempo e in condizioni atmosferiche ottime e quasi identiche nelle diverse serate. In tal caso i risultati raccolti potranno riferirsi, senza errore sensibile, ad uno stato medio dell'atmosfera (refrazione media). Lo studio dell'influsso dovuto a variazioni meteorologiche rilevanti potrà essere utilmente fatto in una fase più inoltrata delle ricerche.

e inoltre, posto

$$(5) \quad 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 = 1 - (1-x)^2 [\varphi(x)]^2 = 2t$$

si potrà scrivere la (1)

$$(6) \quad R = \int_0^\sigma \frac{(1-x) \varphi'(x) dx}{\sqrt{\cot^2 \zeta_0 + 2t}}$$

Si noti che questo numero è funzione di ζ_0 e inoltre dipende dalla forma della funzione $\varphi(x)$, che figura anche nella t . È importantissimo pel nostro scopo che tali elementi possano completamente separarsi nella espressione finale della R : a ciò si presta nel miglior modo uno sviluppo molto usato in passato nello svolgimento delle varie teorie che si è tentato di costruire, ma che presenta, di fronte al problema come è stato qui impostato, speciali e decisivi vantaggi. Tale sviluppo procede secondo le potenze dispari di $\operatorname{tg} \zeta_0$ e si ottiene immediatamente sviluppando il fattore irrazionale che figura nell'integrale (6) secondo la formola binomiale e integrando poi termine a termine: operazioni entrambe lecite se il valore assoluto di $2t \operatorname{tg}^2 \zeta_0$ è minore dell'unità, ciò che si verifica sicuramente se ζ_0 non supera 75° .

Avremo allora

$$\begin{aligned} (\cot^2 \zeta_0 + 2t)^{-\frac{1}{2}} &= \operatorname{tg} \zeta_0 (1 + 2t \operatorname{tg}^2 \zeta_0)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \operatorname{tg} \zeta_0 \left(1 - t \operatorname{tg}^2 \zeta_0 + \frac{3}{2} t^2 \operatorname{tg}^4 \zeta_0 - \frac{5}{2} t^3 \operatorname{tg}^6 \zeta_0 + \dots \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$(7) \quad R = A_0 \operatorname{tg} \zeta_0 - A_1 \operatorname{tg}^3 \zeta_0 + A_2 \operatorname{tg}^5 \zeta_0 - A_3 \operatorname{tg}^7 \zeta_0 + \dots$$

essendo

$$(8) \quad A_0 = I_0, \quad A_1 = I_1, \quad A_2 = \frac{3}{2} I_2, \quad A_3 = \frac{5}{2} I_3,$$

e, in generale,

$$(9) \quad I_r = \int_0^\sigma t^r (1-x) \varphi'(x) dx.$$

Questi coefficienti A_r sono *del tutto indipendenti da* ζ_0 ; essi dipendono solamente dalla costituzione fisica dell'atmosfera e della sua estensione, in quanto che nella (9) figurano la funzione $\varphi(x)$ e la derivata $\varphi'(x)$, ignote. I valori numerici dei coefficienti medesimi sono però determinabili con precisione certo grandissima, in quanto che in base ad una serie molto estesa di misure (valori numerici della R in corrispondenza a valori noti di ζ_0) si può, usando la (7) arrestata al quarto termine, formare un sistema di

equazioni normali che conduce ai valori più probabili delle incognite A_0, A_1, A_2, A_3 . Possono tali valori costituire un insieme di dati sufficiente per la risoluzione del problema innanzi accennato, cioè determinazione convenientemente approssimata di σ (e quindi dell'altezza h dell'atmosfera) e dei primi termini di uno sviluppo in serie della funzione $\varphi(x)$? È facile verificare che la risposta è affermativa. Consideriamo infatti i valori dei coefficienti A_r dati dalla risoluzione del sistema anzidetto come funzioni del limite superiore σ degli integrali e sviluppiamo tali funzioni in serie secondo le potenze di σ . Anzitutto questi sviluppi cominceranno tutti con potenze di grado eguale o superiore all'unità, perchè il termine di grado zero di A_r è, a parte un fattore costante, il valore che assume il corrispondente integrale I_r per $\sigma = 0$, cioè quando i due limiti di esso coincidono. In quanto ai termini ulteriori dei singoli sviluppi notiamo che le derivate prime rispetto a σ degli integrali predetti sono niente altro che le funzioni sotto il segno d'integrazione, poichè σ non figura *che nel limite superiore*. Queste derivate sono dunque della forma

$$(10) \quad \frac{\partial I_r}{\partial \sigma} = r (1 - \sigma) \varphi'(\sigma)$$

e sono tutte nulle, per $\sigma = 0$, sempre che è $r \geq 1$, perchè $t_0 = 0$, come mostra la (5), essendo $\varphi_0 = 1$. La derivata di I_r di ordine $r + 1$ è poi la prima fra i cui termini vi sia qualcuno che non contenga una potenza di t come fattore e che quindi non si annulli per $\sigma = 0$. Lo sviluppo in serie di I_r e quindi quello di A_r secondo le potenze di σ comincerà pertanto col termine in σ^{r+1} . I valori dei coefficienti A_r *andranno dunque rapidamente decrescendo* col crescere di r , dato che il valore di σ — di poco diverso dal rapporto fra l'altezza totale h dell'atmosfera e il raggio terrestre — è piccolo (per una altezza di 200 km. sarebbe all'incirca $\sigma = \frac{1}{32}$). Ci limiteremo pertanto, in questo primo studio, ad assegnare gli sviluppi di A_0, A_1, A_2 , potendosi presumere i valori dei coefficienti successivi evanescenti e, secondo ogni probabilità, impossibili a determinarsi numericamente per mezzo delle osservazioni col procedimento innanzi accennato.

Per le stesse considerazioni ci arresteremo, negli sviluppi di A_1 e A_2 , al secondo termine, il quale è dell'ordine di σ^3 , per A_1 e al primo, anche in σ^3 , per A_2 , ritenendo tali termini sufficienti, almeno in un primo esame del problema, a rappresentare A_1 e A_2 .

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo.* Nota I di N. SPAMPINATO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In questa Nota determino una classe di funzioni di una variabile in un'algebra reale o complessa, dotata di modulo, di ordine qualunque; classe che, per l'algebra ordinaria dei numeri complessi è costituita dalle funzioni monogene, per l'algebra dei numeri bicompleksi è costituita dalle funzioni bicomplesse olomorfe secondo Scorza Dragoni e per l'algebra dei numeri biduali è costituita dalle funzioni analitiche secondo Sobrero e Agostinelli. Tali funzioni vengono chiamate *differenziabili* o *derivabili totalmente a destra o a sinistra*.

Per le funzioni in un'algebra complessa di ordine n , dotata di modulo, ho già definito la derivata caratteristica destra o sinistra lungo un piano caratteristico dell' S_{2n} rappresentativo, uscente dal punto in cui si deriva. Le funzioni di variabile bicomplessa olomorfe secondo Scorza Dragoni e le funzioni di variabile biduale analitiche secondo Sobrero e Agostinelli, appartengono alla classe delle funzioni dotate di derivata caratteristica; dimostro che, fra queste funzioni, esse sono caratterizzate dall'essere dotate di *un'unica* derivata caratteristica.

I. FUNZIONI IN UN'ALGEBRA REALE O COMPLESSA, DOTATA DI MODULO, DERIVABILI TOTALMENTE. — Sia A un'algebra reale (complessa), dotata di modulo, ad n unità e siano $u_1, \dots, u_n$ gli elementi di un suo gruppo di unità ⁽²⁾. Un elemento y di A , dato da

$$(1) \quad y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n,$$

è funzione di un elemento

$$(2) \quad x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*. [Principato, Messina, 1921].

se le variabili reali (complesse) $y_1, \dots, y_n$ sono funzioni⁽¹⁾

$$(3) \quad y_m = y_m(x_1, \dots, x_n) \quad (m = 1, \dots, n)$$

delle variabili reali (complesse) $x_1, \dots, x_n$.

Supporremo sempre che la funzione y sia definita in un campo C dell' S_n (dell' S_{2n}) reale rappresentativo dell'algebra reale (complessa) A .

Una funzione y si dirà *differenziabile o derivabile totalmente a sinistra (a destra)* in un punto x del suo campo di esistenza C , se le funzioni $y_1, \dots, y_n$ sono derivabili, nel punto x , rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_n$ e se, posto

$$(4) \quad dx = dx_1 u_1 + \dots + dx_n u_n$$

$$(5) \quad dy = dy_1 u_1 + \dots + dy_n u_n$$

con

$$(6) \quad dy_m = \frac{\partial y_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} dx_n, \quad (m = 1, \dots, n)$$

esiste una funzione $\zeta(x)$ in A tale che sia, nel punto x ,

$$[1] \quad dy = dx \zeta(x) \quad (dy = \zeta(x) dx),$$

per qualunque dx .

La condizione [1], a destra, posto

$$(7) \quad \zeta(x) = \zeta_1(x_m) u_1 + \dots + \zeta_n(x_m) u_n,$$

per le (4) e (5), equivale a

$$(8) \quad \sum_m^{1 \dots n} dy_m u_m = \sum_{ij}^{1 \dots n} \gamma_{ijm} \zeta_i dx_j u_m,$$

avendo posto⁽²⁾

$$(9) \quad u_i u_j = \sum_m^{1 \dots n} \gamma_{ijm} u_m.$$

Dalle (8) si ricavano le relazioni

$$(10) \quad dy_m = \sum_{ij}^{1 \dots n} \gamma_{ijm} \zeta_i dx_j. \quad (m = 1, \dots, n)$$

(1) A proposito delle funzioni di una variabile x in un'algebra complessa dotata di modulo si vedano le mie Memorie *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità dotata di modulo*. [*«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»*, Memoria I, to. I.VII, 1933; Memoria II, to. LVIII, 1934; Memoria III, già presentata per la pubblicazione].

(2) Loc. cit. (2) a p. 621, parte II, n. 182.

Ma è per ipotesi

$$(11) \quad dy_m = \sum_{j=1}^{1 \dots n} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} dx_j, \quad (m = 1, \dots, n)$$

quindi, identificando le (10) con le (11), si ricavano, per l'indipendenza dei differenziali $dx_1, \dots, dx_n$, le relazioni

$$[2] \quad \sum_{i=1}^{1 \dots n} \gamma_{ijm} \zeta_m = \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \quad (j, m = 1, \dots, n)$$

La condizione [1] a destra equivale, dunque, alle condizioni [2]. Ora il primo membro di queste relazioni ci dà, al variare di j ed m , i parametri sinistri dell'elemento ζ di $A^{(1)}$ e la matrice

$$(12) \quad \mu'_\zeta = \|\zeta'_{jm}\|,$$

dove s'è posto

$$(13) \quad \zeta'_{jm} = \sum_{i=1}^{1 \dots n} \gamma_{ijm} \zeta_m,$$

è la matrice sinistra di $\zeta^{(2)}$. Sicchè, posto

$$(14) \quad J(y) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|,$$

cioè indicando con $J(y)$ la matrice jacobiana delle funzioni $y_1(x_m), \dots, y_n(x_m)$, coefficienti della funzione $y(x)$, le [2] equivalgono alla condizione

$$[3] \quad J(y) = (\mu'_\zeta)_{-1}.$$

Quando l'algebra A è commutativa non c'è luogo a distinguere la derivata destra dalla sinistra e la funzione si dirà, senz'altro, differenziabile o derivabile totalmente. Se l'algebra non è commutativa, ripetendo i ragionamenti fatti per la condizione [1] a destra, per quella a sinistra, si trova che la condizione

$$(15) \quad dy = dx \cdot \zeta(x)$$

equivale alla condizione

$$[3'] \quad J(y) = (\mu''_\zeta)_{-1}.$$

(1) Loc. cit. (2) a p. 621, parte II, n. 184.

(2) Loc. cit. (2) a p. 621, parte II, n. 185.

Raccogliendo si ha il

TEOREMA FONDAMENTALE. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $y(x) = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ della variabile $\bar{x} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ in un'algebra A reale (o complessa), ad n unità $u_1, \dots, u_n$, dotata di modulo, definita in un campo C dell' S_n (o dell' S_{2n}) reale euclideo rappresentativo, sia derivabile totalmente a destra (a sinistra) in un punto x di C , è che le funzioni $y_1(x_m), \dots, y_n(x_m)$ siano derivabili nel punto x rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_n$ e che esista in A una funzione $z(x) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + \dots + z_n u_n$ avente in x per trasposta della sua matrice sinistra μ'_z (destra μ''_z) la matrice jacobiana delle funzioni $y_1(x_m), \dots, y_m(x_m)$ calcolata in x .*

Se $y(x)$ è derivabile totalmente a destra (a sinistra) si ha:

$$dy = z(x) dx, \quad (dy = dx z(x))$$

essendo $z(x)$ la funzione per la quale si ha:

$$J(y) = (\mu'_z)_{-1}, \quad (J(y) = (\mu''_z)_{-1}).$$

2. CASO DELL'ALGEBRA DEI NUMERI COMPLESSI. — Sia A l'algebra dei numeri complessi

$$(16) \quad x = x_1 + ix_2.$$

La matrice di un elemento

$$(17) \quad z = z_1 + iz_2$$

è

$$(18) \quad \mu'_z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

In questo caso, pertanto, posto

$$(19) \quad y(x) = y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2)i$$

la [3] ci dà la condizione:

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

e quindi deve essere

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = z_1 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = z_2. \end{cases}$$

Si ha pertanto:

I) *Le funzioni $y(x)$ di variabile complessa derivabili totalmente sono le funzioni monogene. Per una tale funzione si ha:*

$$dy = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} i \right) dx.$$

3. IL CASO DELL'ALGEBRA DEI NUMERI BICOMPLESSI. — Consideriamo ora l'algebra dei numeri bicomplessi. Se in essa fissiamo due unità u e v con la tabella di moltiplicazione

(22)

	u	v
u	u	v
v	v	$-u$

l'elemento corrente è dato da

(23)
$$x = x_1 u + x_2 v,$$

con x_1, x_2 numeri complessi. La matrice di un elemento $z = z_1 u + z_2 v$ è la stessa matrice (18) e quindi la condizione [3] ci dà, anche in questo caso, le (21). Si ha pertanto:

II) *Le funzioni $y(x) = y_1(x_1, x_2)u + y_2(x_1, x_2)v$ della variabile bicomplessa $x = x_1 u + x_2 v$ differenziabili totalmente, sono le funzioni i cui coefficienti y_1 ed y_2 sono funzioni delle variabili complesse x_1 ed x_2 derivabili rispetto ad x_1 ed x_2 e soddisfacenti alle condizioni:*

(*)
$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

Per una tale funzione si ha:

$$dy = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} u + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} v \right) dx.$$

Dal teorema II) si scorge che le funzioni bicomplesse, derivabili totalmente, sono le funzioni di variabile bicomplessa olomorfe secondo Scorza Dragoni ⁽¹⁾.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplessa*. [«Reale Accademia d'Italia», vol. V, 1934-XII, n. 10]. Si noti che la $F'(x + jy)$ della formola [9] della p. 609, è la nostra funzione $\gamma(x)$ soddisfacente alla relazione $dy = \gamma(x)dx$, e che le formole [5] dello Scorza di p. 608 sono le (*).

Matematica (Analisi). — *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili.* Nota I di N. SPAMPINATO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In una Nota precedente, pubblicata in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, ho dimostrato che per l'algebra dei numeri bicomplessi e quella dei numeri biduali, che sono le due sole algebre complesse doppie, dotate di modulo ⁽³⁾, si verifica la coincidenza delle funzioni a derivazione totale con quelle a derivata caratteristica unica, e che la funzione $\gamma(x)$, soddisfacente alla condizione $dy = \gamma(x) dx$ che lega il dy e il dx per definizione di funzione $y(x)$ a derivata totale, coincide con la derivata caratteristica unica della $y(x)$. Si verifica tale circostanza per una qualunque algebra complessa dotata di modulo? La risposta è affermativa e, quindi, si ha modo di caratterizzare le funzioni a derivata totale, fra quelle a derivata caratteristica, con la proprietà di ammettere la derivata indipendente dal piano caratteristico lungo cui si deriva.

Nella Nota citata ho determinato le funzioni differenziabili totalmente nelle due algebre doppie dotate di modulo, definite nel corpo dei numeri complessi o dei numeri reali. Quelle nell'algebra dei numeri bicomplessi coincidono con le funzioni olomorfe secondo Scorza Dragoni. Quelle nell'algebra dei numeri biduali coincidono con le funzioni analitiche secondo Sobrero e Agostinelli. Nella presente Nota, passando al caso successivo, determino le funzioni totalmente derivabili nelle 5 algebre complesse dotate di modulo.

I. LE FUNZIONI DERIVABILI TOTALMENTE COME FUNZIONI A DERIVATA CARATTERISTICA UNICA. — Sia A un'algebra complessa, di ordine n , dotata di modulo. Ho già dimostrato che lungo un piano caratteristico γ non c'è

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(2) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo*. [« Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », vol. XXX, 1935].

(3) Le algebre doppie, definite in un corpo qualunque, sono state determinate dal prof. G. SCORZA nella sua Nota: *Le algebre doppie*. [« Reale Accademia di Napoli », 1922]. Lo SCORZA ha determinato pure le algebre del 3° ordine, definite in un corpo numerico qualunque, nella sua Memoria: *Le algebre del 3° ordine*. [« Atti della Reale Accademia di Napoli », vol. XX, 1935].

Per le algebre complesse del 3° ordine, dotate di modulo, delle quali ci occuperemo in questa Nota, si veda pure: E. STUDY, *Ueber système complexer Zahlen* ecc. [« Monatshefte für Mathematik und Physik », 1890, pp. 283-355]; C. CARBONARO, *Sulle algebre complesse dotate di modulo*. [« Reale Accademia di Napoli, Rendiconti », ser. 4°, vol. III, 1933].

luogo a distinguere (anche quando l'algebra non è commutativa) un differenziale destro e sinistro, essendo questi coincidenti in un unico differenziale $d_{\gamma} y$ dato da ⁽¹⁾

$$(1) \quad d_{\gamma} y = y'_{\gamma}(x) \cdot d_{\gamma} x = d_{\gamma} x \cdot y'_{\gamma}(x)$$

con

$$(2) \quad d_{\gamma} x = \gamma d\rho,$$

ovvero con

$$(3) \quad d_{\gamma} x = (c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) d\rho = c_1 d\rho u_1 + \dots + c_n d\rho u_n.$$

Ora se indichiamo con x_0 il punto in cui si deriva, la variabile corrente nel piano caratteristico γ , uscente da x_0 , lungo cui si deriva, è data da $\gamma\rho + x_0$, cioè da

$$(4) \quad x = \rho c_1 u_1 + \dots + \rho c_n u_n + x_0$$

e quindi è

$$(5) \quad d_{\gamma} x = c_1 d\rho u_1 + \dots + c_n d\rho u_n.$$

Confrontando la (5) con la relazione

$$(6) \quad dx = dx_1 u_1 + \dots + dx_n u_n,$$

si ricava che, lungo il piano caratteristico γ , è

$$(7) \quad dx_1 = c_1 d\rho, \dots, dx_n = c_n d\rho.$$

Per la $\{1\}$ del n. 5 della Nota precedente, citata in ⁽²⁾ a p. 626, e la (2), la (1) ci dà:

$$(8) \quad d_{\gamma} y = \left\{ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} c_n \right) u_1 + \dots + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} c_n \right) u_n \right\} d\rho,$$

ovvero, per le (7),

$$(9) \quad d_{\gamma} y = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n \right) u_1 + \dots + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n \right) u_n.$$

Ne segue che è

$$(10) \quad d_{\gamma} y = dy_1 u_1 + \dots + dy_n u_n = dy,$$

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra ecc.* [«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», Memoria I, 1933; Memoria II, 1934; Memoria III, già presentata per la pubblicazione]. Vedasi § 7, n. 13 e § 10, n. 7.

con i differenziali $dy_1, \dots, dy_n$ dati dalle (6) del n. 1 della Nota citata in ⁽²⁾ a p. 626. Si ha pertanto che: il differenziale $d_\gamma y$ dato dalla (1) è il differenziale dy corrispondente al differenziale dx lungo il piano caratteristico γ .

Supponiamo ora che la funzione $y(x)$ sia differenziabile totalmente a destra in un punto x , cioè che esista una funzione $\zeta(x)$ per la quale sia, in x ,

$$(11) \quad dy = \zeta(x) dx$$

qualunque sia il differenziale dx . In particolare deve essere per $dx = d_\gamma x$, cioè per dx lungo il piano caratteristico γ ,

$$(12) \quad d_\gamma y = \zeta(x) d_\gamma x.$$

Confrontando la (12) con la (1) si ricava:

$$(13) \quad \zeta(x) = y'_\gamma(x).$$

Analogamente se $y(x)$ è differenziabile totalmente a sinistra nel punto x , cioè se esiste una funzione $\zeta(x)$ per la quale sia

$$(14) \quad dy = dx \cdot \zeta(x),$$

qualunque sia dx , si avrà, in particolare, per dx lungo γ , e quindi per $dy = d_\gamma y$,

$$(15) \quad d_\gamma y = d_\gamma x \cdot \zeta(x).$$

Confrontando con la (1) in questo caso si ricava

$$(16) \quad \zeta(x) = {}'y_\gamma(x).$$

La (13) e la (16) dimostrano che la derivata destra $y'_\gamma(x)$ [sinistra ${}'y_\gamma(x)$], se $y(x)$ è totalmente differenziabile a destra [a sinistra] non può variare al variare del piano caratteristico γ uscente dal punto x in cui si deriva, perchè deve essere, in quel punto, sempre eguale al valore che ivi assume la $\zeta(x)$. Concludendo si ha il seguente teorema:

I) Se $y(x)$ è una funzione della variabile x in un'algebra complessa A di ordine qualunque, dotata di modulo, definita in un campo C , differenziabile totalmente a destra (a sinistra) in un punto di C , essa ammette in quel punto un'unica derivata caratteristica destra (sinistra). Inoltre posto:

$$dy = \zeta(x) dx \quad [dy = dx \cdot \zeta(x)],$$

per definizione di funzione totalmente derivabile, la funzione $\zeta(x)$ è la derivata destra (sinistra) di $y(x)$ in quel punto.

Per una funzione totalmente derivabile si hanno, pertanto, le relazioni

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x) = dy \cdot dx^{-1} \\ 'y(x) = dx^{-1} \cdot dy. \end{cases}$$

Se, in particolare, l'algebra è commutativa, l'unica derivata destra coincide con l'unica derivata sinistra e questa si dirà semplicemente *la derivata* della funzione totalmente derivabile.

È evidente, viceversa, che se una funzione ammette un'unica derivata caratteristica destra (sinistra) essa è totalmente differenziabile. Possiamo pertanto concludere che:

I') *L'ammettere un'unica derivata caratteristica a destra (sinistra) è una proprietà caratteristica per le funzioni derivabili totalmente a destra (a sinistra), in una qualunque algebra complessa dotata di modulo.*

Resta così generalizzata una proprietà di cui godono, come abbiamo dimostrato nella Nota citata in ⁽²⁾ a p. 626, le funzioni di variabile bicomplessa olomorfe secondo Scorza Dragoni e le funzioni di variabile biduale analitiche secondo Sobrero e Agostinelli.

Per avere altri esempi di funzioni del tipo di quelle considerate dallo Scorza Dragoni, dal Sobrero e dall'Agostinelli, nei numeri seguenti determineremo le funzioni totalmente derivabili nelle 5 algebre complesse del 3° ordine, dotate di modulo.

2. L'ALGEBRA DEI NUMERI TRICOMPLESSI. — Consideriamo l'algebra dei numeri *tricomplessi* cioè l'algebra complessa del 3° ordine, somma diretta di tre algebre equivalenti all'algebra ordinaria dei numeri complessi. In essa si possono scegliere tre unità u_1, u_2, u_3 con la tabella di moltiplicazione

I)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	u_3

La matrice, sinistra o destra, di un elemento

$$(17) \quad z = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$$

dell'algebra è data da

$$(18) \quad \mu'_z = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix}.$$

La condizione ⁽¹⁾

$$(19) \quad J(y) = (u'_i)_{-1},$$

dove con $J(y)$ si indica la matrice jacobiana di una funzione $y(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile tricomplessa $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, ci dà le condizioni

$$(20) \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_m} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ z_n & \text{per } m = n \end{cases}$$

e quindi, come per i numeri bicomplessi, si ricava che:

A) *Le funzioni $y(x) = y_1(x_1, x_2, x_3) u_1 + y_2(x_1, x_2, x_3) u_2 + y_3(x_1, x_2, x_3) u_3$ della variabile tricomplessa $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, totalmente derivabili, o a derivata caratteristica unica, sono le funzioni del tipo*

$$y(x) = y_1(x_1) u_1 + y_2(x_2) u_2 + y_3(x_3) u_3,$$

con y_1, y_2, y_3 funzioni derivabili, rispettivamente, rispetto alle variabili complesse x_1, x_2, x_3 . La derivata di una tale funzione è data da:

$$y'(x) = y'_1(x_1) u_1 + y'_2(x_2) u_2 + y'_3(x_3) u_3.$$

Si noti che un analogo teorema si ha per le funzioni totalmente derivabili nell'algebra dei numeri n -complessi, cioè nell'algebra di ordine n , somma diretta di n algebre equivalenti all'algebra dei numeri complessi.

In proposito si osservi che per $n = 2^{s-1}$ si hanno i numeri s -complessi del Segre introdotti nella sua classica Memoria: *Sulle rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* ⁽²⁾.

3. L'ALGEBRA COMPLESSA DEL 3° ORDINE DEL TIPO II). — Consideriamo ora l'algebra complessa del 3° ordine con la tabella di moltiplicazione

II)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_1	0	0
u_3	0	0	u_3

(1) Loc. cit. (2) a p. 626, n. 1

(2) « Mathematische Annalen », XL. Band, 1892, pp. 413-467.

Anche quest'algebra è riducibile ed è somma diretta di un'algebra equivalente all'algebra I' dei numeri biduali e di un'algebra equivalente all'algebra dei numeri complessi. Le unità u_1, u_2 si riferiscono alla prima, l'unità u_3 alla seconda. Tenendo conto del teorema IV') della Nota precedente citata in ⁽²⁾ a p. 626 si ricava facilmente:

B) Le funzioni $\chi(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ nell'algebra complessa del 3° ordine del tipo II), totalmente derivabili, o a derivata caratteristica unica, sono del tipo

$$y(x) = y_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot y'_1(x_1) + f(x_1)] u_2 + y_3(x_3) u_3$$

con y_1, f funzioni derivabili di x_1 e y_3 funzione derivabile di x_3 . Per una tale funzione la derivata è data da:

$$y'(x) = y_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot y''_1(x_1) + f'(x_1)] u_2 + y'_3(x_3) u_3.$$

Matematica. — *Sopra un fascio sizigietico di superficie cubiche.*
Nota II di E. CIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

6. Per trovare, per ogni S_3 del fascio, i rimanenti 4 vertici di tale pentaedro, si osservi che la quadrica polare del punto $(1 - \lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ può rappresentarsi così $\lambda(x_2 + x_3 + x_4)^2 + 4\lambda^2 x_1(x_2 + x_3 + x_4) + (1 - \lambda)x_1^2 = 0$ il che dimostra che essa si spezza nei due piani

$$\begin{aligned} \lambda(x_2 + x_3 + x_4) + \alpha x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1 - \lambda}{\alpha} x_1 &= 0 \end{aligned}$$

dove α soddisfa alla condizione

$$\frac{\lambda(1 - \lambda)}{\alpha} + \alpha = 4\lambda^2$$

e quindi è radice della equazione di 2° grado in α

$$\alpha^2 - 4\lambda^2 \alpha + \lambda - \lambda^2 = 0.$$

Ecco dunque trovati i vertici richiesti che indicheremo come segue

$$\begin{aligned} M &\equiv (1 - \lambda, \lambda, \lambda, \lambda) & N &\equiv (\lambda, 1 - \lambda, \lambda, \lambda); \\ P &\equiv (\lambda, \lambda, 1 - \lambda, \lambda) & Q &\equiv (\lambda, \lambda, \lambda, 1 - \lambda). \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

Le facce del pentaedro saranno dunque le seguenti

$$\begin{array}{ll}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \text{--- contenente ---} \quad AA' BB' CC' \\
 -(\lambda + 1)x_1 + \lambda(x_2 + x_3 + x_4) = 0 & \text{»} \quad NPQBCA' \\
 -(\lambda + 1)x_2 + \lambda(x_3 + x_4 + x_1) = 0 & \text{»} \quad PQMC' A'B' \\
 -(\lambda + 1)x_3 + \lambda(x_4 + x_1 + x_2) = 0 & \text{»} \quad QMNAB' C \\
 -(\lambda + 1)x_4 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0 & \text{»} \quad MNPBC' A
 \end{array}$$

La conseguente rappresentazione analitica della S_3 generica del fascio sarà dunque del tipo seguente

$$\begin{aligned}
 & k \left(\sum_i^4 x_i \right)^3 + [-(\lambda + 1)x_1 + \lambda(x_2 + x_3 + x_4)]^3 + \\
 & + [-(\lambda + 1)x_2 + \lambda(x_3 + x_4 + x_1)]^3 + [-(\lambda + 1)x_3 + \lambda(x_4 + x_1 + x_2)]^3 + \\
 & + [-(\lambda + 1)x_4 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3)]^3 = 0.
 \end{aligned}$$

dove k dovrà essere determinato in modo che si annulli il coefficiente di $x_i^2 x_b$ e che il rapporto fra il coefficiente di $x_i x_b x_l$ a quello di x_i^3 sia uguale a $6h$ (e ciò dal confronto dell'ultima equazione con la (1) del n. 5).

Si trova così che queste due condizioni equivalgono all'unica per cui $k = -\lambda(2\lambda^2 + \lambda + 1)$.

Finalmente il calcolo della Hessiana conduce alle due forme equivalenti

$$\begin{aligned}
 & 4\lambda^4 \sum x_i^2 x_b x_k - 2\lambda^3 \left[\sum x_i^4 + \sum x_i^3 x_b + \sum x_i^2 x_b x_k + 4x_1 x_2 x_3 x_4 \right] + \\
 & + \lambda^2 \left[\sum x_i^3 x_b + 2 \sum x_i^2 x_b^2 \right] - x_1 x_2 x_3 x_4 = 0; \\
 & 2\lambda^3 \sum x_i^4 + \lambda^2 (2\lambda - 1) \sum x_i^3 x_b - 2\lambda^2 \sum x_i^2 x_b^2 + \\
 & + 2\lambda^3 (1 - 2\lambda) \sum x_i^2 x_b x_k + (1 + 8\lambda^3) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.
 \end{aligned}$$

7. Ogni S_3 del fascio è manifestamente invariante rispetto a tutte le collineazioni spaziali rappresentabili mediante la sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_i & x_b & x_k & x_l \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\}$$

dove i, b, k, l è una permutazione qualsiasi di $1, 2, 3, 4$. Esse tengono fissi il punto e il piano unità.

Dunque queste collineazioni compongono un gruppo di 24° ordine sottogruppo di quello totale sopra 5 elementi. Precisamente, quello dotato di un punto e un

piano invarianti (che nella rappresentazione analitica attuale costituiscono il punto e il piano unità). Esso è dunque il G_{24}^{II} della mia Memoria già citata *Sopra i gruppi finiti di collineazione* ecc. (n. 5). È però da avvertire che gli elementi di riferimento adottati ivi sono diversi dagli attuali. Questo G_{24}^{II} è dunque un gruppo ottaedrico, ma proiettivamente distinto da quello costituito dalle rotazioni in sè dell'ottaedro regolare.

Questo G_{24}^{II} contiene le seguenti 6 omologie armoniche

$(x_1 x_2)$	che ha per centro	$A \equiv (1, -1, 0, 0)$	e per piano fond. ^{le}	$x_1 - x_2 = 0$
$(x_3 x_4)$	»	»	$A' \equiv (0, 0, 1, -1)$	» » $x_3 - x_4 = 0$
$(x_2 x_3)$	»	»	$B \equiv (0, 1, -1, 0)$	» » $x_2 - x_3 = 0$
$(x_1 x_4)$	»	»	$B' \equiv (1, 0, 0, -1)$	» » $x_1 - x_4 = 0$
$(x_2 x_4)$	»	»	$C \equiv (0, 1, 0, -1)$	» » $x_2 - x_4 = 0$
$(x_1 x_3)$	»	»	$C' \equiv (0, 1, 0, -1)$	» » $x_1 - x_3 = 0$.

Contiene poi le seguenti tre involuzioni gobbe

$$(x_1, x_2)(x_3, x_4) \quad , \quad (x_2, x_3)(x_1, x_4) \quad ; \quad (x_3, x_1)(x_2, x_4)$$

di cui gli assi sono le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Le collineazioni a periodo tre come (x_1, x_2, x_3) sono assiali: esiste cioè un asse di punti uniti $(1, 1, 1, \lambda)$ e uno di piani uniti che è quello del fascio $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0$, ma il primo non è involuppo dei piani uniti, come il secondo non è luogo di punti uniti.

Finalmente le collineazioni a periodo 4, come (x_1, x_2, x_3, x_4) , hanno i 4 punti uniti

$$(1, 1, 1, 1) ; (1, -1, 1, -1) ; (1, i, -1, -i) ; (1, -i, -1, i)$$

formanti un tetraedro le cui facce sono i 4 piani uniti.

Quanto ai sottogruppi, è da notare il quatrínomio invariante costituito dalle tre involuzioni gobbe suddette e dalla identità (è il G_4^1 della mia Memoria più volte citata).

Vi sono naturalmente altri tre sottogruppi quadrinomi, ma nessuno è invariante. Essi sono del seguente tipo: $[(x_1, x_2) ; (x_3, x_4) ; (x_1, x_2)(x_3, x_4) ; \text{identità}]$ e appartengono alla specie G_4^{III} già descritta al n. 3.

La descrizione dei rimanenti sottogruppi si farebbe poi facilmente valendosi per la loro struttura del simbolismo adottato in un altro mio lavoro (1).

(1) CIANI, *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane*. « Ann. di Matematica », to. V, ser. III, pp. 8-9, 1900.

8. — Consideriamo alcune particolari superficie del fascio. Ad es. si potrebbe domandare se, nel fascio, ci sono superficie diagonali di Clebsch (n. 2). Siccome tutte passano per i 6 vertici AA', BB', CC' del pentaedro di Sylvester (n. 5), così basterà esigere il passaggio per i 4 rimanenti MNPQ (n. 6). Si è così condotti alla seguente equazione in λ

$$12\lambda^4 - 20\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

cioè

$$(2\lambda + 1)(6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 5\lambda - 1) = 0$$

quindi

$$2\lambda + 1 = 0$$

oppure

$$6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0.$$

Ma per $\lambda = -\frac{1}{2}$ si ha

$$S_3 = \left\{ \sum x_i^3 - 3(x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3) = 0 \right\}$$

cioè

$$\sum_i x_i \left(\sum_i x_i^2 - \sum_i x_i x_k \right) = 0$$

e allora S_3 si spezza nel piano $\sum x_i = 0$ e nella quadrica propria

$$\sum x_i^2 - \sum_i x_i x_k = 0.$$

Rimane quindi l'equazione di 3° grado

$$6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0$$

il cui discriminante non è nullo. Dunque *Le superficie diagonali irriducibili del fascio sono 3.*

9. Si cercano adesso le superficie del fascio che hanno per Hessiana un tetraedro (per analogia di linguaggio con le cubiche piane equianarmiche, si potrebbero chiamare le S_3 equianarmiche). Un caso ovvio lo si consegue per $\lambda = 0$ (n. 6). Altri due casi sono dati da $2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ che allora è $k = 0$ (n. 6) e nuovamente l'equazione di S_3 si riduce alla somma di 4 cubi (n. 6).

Dunque *Le S_3 equianarmiche del fascio sono tre.*

10 Altri casi particolari degni di osservazione si hanno per $\lambda = \infty$, o per $\lambda = \frac{1}{2}$. Nel primo caso

$$S_3 \equiv \{ x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 = 0 \}$$

e si trova la superficie cubica con 4 punti doppi conici (nei vertici del tetraedro fondamentale) che è la duale della superficie di Steiner ⁽¹⁾.

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha

$$S_3 \equiv \left\{ \sum_i^4 x_i^3 + 3 \sum_i^4 x_i x_b x_k = 0 \right\}$$

e accade che il punto (1, 1, 1, 1) ha per quadrica polare il piano $\sum_i^4 x_i = 0$ contato due volte. Esso è una faccia del pentaedro di Sylvester. Le altre quattro sono

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 & ; & & x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 & ; & & x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

e passano tutte per (1, 1, 1, 1). Si realizza così la superficie studiata nel n. 4 (nei suoi dettagli particolari più interessanti).

11. Merita qualche osservazione anche la curva base del fascio che manifestamente è del 9° grado. Ma, se ne distaccano le tre rette rappresentate parametricamente (al variare di μ) da

$$(1, -1, \mu, -\mu) \quad ; \quad (1, \mu, -\mu, -1) \quad ; \quad (1, \mu, -1, -\mu)$$

tutte esistenti nel piano $\sum_i^4 x_i = 0$ e formanti un triangolo che ha per vertici (1, -1, 1, -1) ; (1, 1, -1, -1) ; (1, -1, 1, -1).

La parte residua è dunque una sestica gobba. Ogni spigolo del tetraedro fondamentale è una sua corda.

Infatti, ad es., lo spigolo $x_3 = 0, x_4 = 0$, taglia tutte le superficie del fascio nei tre punti (1, α , 0, 0) dove α è radice cubica dell'unità negativa. Ma per $\alpha = 1$ si trova uno dei vertici dianzi nominati: dunque i due rimanenti appartengono alla sestica suddetta.

Dal momento che nel fascio c'è una S_3 composta del piano $\sum_i^4 x_i = 0$ e della quadrica $\sum_i^4 x_i^2 - \sum_i^4 x_i x_k = 0$ (n. 8) e che le tre rette facenti parte

(1) Vedi ad es., CIANI, *Introduzione alla Geometria algebrica*, p. 325. (Cedam, 1931).

della base del fascio esistono in $\sum_i^4 x_i = 0$, segue che la sestica in discorso può riguardarsi come intersezione completa della quadrica suddetta e di una qualunque altra S_3 del fascio, per esempio $\sum_i^4 x_i^3 = 0$ (il che può facilitare l'ulteriore studio della curva).

12. *Essa è irriduttibile.* Infatti si esclude facilmente che possa comporsi di 6 rette, giacchè esse dovrebbero appartenere (per $\lambda = \infty$) alla $S_3 \equiv \{x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 = 0\}$. Ora, le rette di quest'ultima si conoscono (vedi il n. 204 della mia citata « Introduzione ») e niuna appartiene alla quadrica $\sum_i^4 x_i^2 - \sum_i^4 x_i x_k = 0$. È anche da escludere che la sestica in parola sia composta di due cubiche gobbe, giacchè bisogna tener presente che essa deve essere invariante rispetto al $G_{2,4}^{II}$ già notato nel n. 7. Ora, in questo, ci sono delle omologie armoniche e poichè non c'è niuna cubica gobba irriduttibile invariante rispetto a una tale omologia, bisognerebbe che le due supposte cubiche gobbe fossero trasformate l'una nell'altra da ciascuna delle omologie suddette e per conseguenza dovrebbe, ognuna di tali cubiche, essere invariante rispetto alle tre involuzioni gobbe prodotto delle omologie nominate (a due, a due). Ma il G_4^I che tali involuzioni generano (n. 7) non è quello spettante ad una cubica gobba⁽¹⁾. Finalmente si esclude che la sestica si componga di tre coniche perchè i loro tre piani dovrebbero comporre un triedro invariante rispetto a $G_{2,4}^{II}$.

13. Chiuderò queste poche osservazioni facendo rilevare che l'equazione del fascio sizigetico, sin qui studiato, è caso particolare della seguente

$$c_1 x_2 x_3 x_4 + c_2 x_3 x_4 x_1 + c_3 x_4 x_1 x_2 + c_4 x_1 x_2 x_3 + \\ + c_5 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) = 0$$

(dove le c_i sono costanti). Quest'ultima è stata assegnata da A. Emch quale nuova forma canonica rappresentante una superficie cubica generica⁽²⁾. L'A. la ottiene mediante considerazioni iperspaziali (che però non sembrano inevitabili). Ma, in ogni caso, è indubbio che questa nuova forma, per una quaternaria cubica, è particolarmente interessante giacchè le sezioni delle facce e spigoli del tetraedro fondamentale danno le ben note forme canoniche della ternaria e

(1) Vedi la mia Nota *Sopra i gruppi di collineazioni spaziali dotati di cubica gobba invariante*. « Circ. Matematico di Palermo », to. XVI, 1902 (n. 3).

(2) A. EMCH, *On a new form of the general cubic surface*. « American Journal of Mathematics », vol. LIII, n. 4, october 1931.

binaria cubica. È anche probabile che il tetraedro fondamentale attuale abbia relazioni geometriche interessanti col pentaedro di Sylvester. Nè di queste relazioni è traccia nella citata pubblicazione. Così non vi risulta che questo tetraedro sia *unico*. Se ne esistessero vari, è certo che la loro configurazione dovrebbe riuscire interessante anche indipendentemente dalle sue eventuali relazioni col pentaedro in parola.

Mi permetto di osservare che ebbi già a proporre il piano di queste ricerche in forma di « Domanda » nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (anno XII, n. 3, giugno 1933) senza che finora sia pervenuta alcuna risposta.

Matematica. — *Sulla natura analitica delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Recentemente H. Bohr ⁽²⁾ ha introdotto nell'Analisi la nozione di *quasi periodicità* che costituisce una notevole generalizzazione del classico concetto di periodicità.

Sia $\varphi(t)$ una funzione, reale o complessa, della variabile reale t , continua in tutto il campo reale $-\infty < t < +\infty$. Se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero τ tale che la limitazione

$$|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$$

valga qualunque sia t , si dice che il numero τ è un *numero di trasporto* (Verschiebungszahl) di $\varphi(t)$ relativo ad ε .

La $\varphi(t)$ dicesi *quasi periodica* (fastperiodisch), se ad ogni numero $\varepsilon > 0$ scelto ad arbitrio si può coordinare un numero $l > 0$, tale che, in ogni intervallo (dell'asse t) di lunghezza l , cada almeno un numero di trasporto di $\varphi(t)$ relativo ad ε .

È ovvio che ogni funzione $\varphi(t)$ periodica, ovunque continua, è quasi periodica.

L'esempio più elementare di un'effettiva funzione quasi periodica è dato da una combinazione lineare del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^{i\lambda_1 t} + c_2 e^{i\lambda_2 t},$$

(1) Nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. « Acta Math. », to. 45, 1925, pp. 29-127; Fastperiodische Funktionen. « Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete », erster Band, J. Springer. Berlin, 1932; cfr. anche J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque périodiques*, Gauthier Villars. Paris, 1933; A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions*. « University Press ». Cambridge, 1931.

in cui λ_1, λ_2 sono due numeri reali qualunque tra loro incommensurabili ed è ovvio che la quasi periodicità compete alle funzioni

$$c_1 \cos \lambda_1 t + c_2 \cos \lambda_2 t, \dots, c_1 \sin \lambda_1 t + c_2 \sin \lambda_2 t,$$

le quali, se c_1, c_2 sono reali, sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $\varphi(t)$.

Più generalmente, è quasi periodica la somma di due funzioni periodiche con periodi tra loro incommensurabili.

Si dimostra che

1) ogni funzione quasi periodica è limitata, cioè si può assegnare un numero positivo k tale che

$$|\varphi(t)| < k \quad -\infty < t < +\infty.$$

2) La somma, il prodotto ed il quoziente di funzioni quasi periodiche (l'estremo inferiore del modulo del divisore essendo > 0) sono funzioni quasi periodiche.

In particolare, si noti che una funzione del tipo

$$\varphi(t) = e^{i\lambda t} \psi(t),$$

in cui $\psi(t)$ denota una funzione periodica e continua, è quasi periodica.

Se il periodo T di $\psi(t)$ è commensurabile col periodo $\frac{2\pi}{\lambda}$ dell'esponenziale, la $\varphi(t)$ risulta periodica.

3) L'integrale di una funzione quasi periodica

$$\int_0^t \varphi(t) dt$$

è quasi periodico se è limitato.

Sebbene non sia necessario per il seguito, conviene richiamare il seguente notevole teorema che è la sintesi di tutta la teoria edificata dal Bohr.

La classe costituita da tutte le somme del tipo

$$s(t) = \sum_n^N c_n e^{i\lambda_n t}$$

(in cui i numeri λ sono reali qualunque e i coefficienti c possono essere anche complessi) e dalle funzioni che si possono approssimare uniformemente in tutto il campo reale con siffatte somme, è quella di tutte e sole le funzioni quasi periodiche⁽¹⁾.

(1) Qui e nel seguito è sottinteso che una funzione quasi periodica possa essere, in particolare, periodica.

2. Ciò posto, si consideri un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

$$(1) \quad Ax \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0,$$

i cui coefficienti siano funzioni reali di t ovunque continue e periodiche con lo stesso periodo T .

Sia $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) un suo sistema fondamentale di soluzioni.

Allora, poichè i coefficienti di Ax ammettono il periodo T , anche $\varphi_k(t+T)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) è un sistema fondamentale di soluzioni ed esiste pertanto una sostituzione lineare (mai degenera) a coefficienti costanti atta a far passare dalle $\varphi(t)$ alle $\varphi(t+T)$, talchè

$$(S) \quad \varphi_h(t+T) = \sum_1^n c_{hk} \varphi_k(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Questa sostituzione ammette sempre n moltiplicatori, reali o complessi, distinti o coincidenti, che sono le radici della cosiddetta *equazione in s caratteristica* di $Ax = 0$

$$(2) \quad \|c_{hk} - s\delta_{hk}\| = 0,$$

essendo δ_{hk} eguale a 0 od 1 secondo che $h \neq k$ o $h = k$.

È importante ricordare che le radici di (2) sono indipendenti dal sistema fondamentale di soluzioni di (1) ed inoltre sono tutte differenti da zero.

Questa seconda proprietà segue da ciò che il modulo di (S) è dato da

$$\|c_{hk}\| = e^{-\int_0^T a_1 dt}.$$

Le radici di (2) si possono dunque rappresentare con

$$e^{\alpha_k T} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

I numeri α diconsi, con Poincaré, gli *esponenti caratteristici* ⁽¹⁾ dell'equazione (1).

3. Sia ora un'equazione lineare non omogenea

$$(3) \quad Ax = f(t),$$

in cui la $f(t)$, reale, sia ovunque continua e periodica con periodo non necessariamente eguale a T (o, più generalmente, quasi periodica).

(1) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, to. I, ch. IV, Gauthier Villars. Paris, 1892.

Dimostreremo il seguente

TEOREMA. — Se gli esponenti caratteristici della (1) sono immaginari puri (salvo, al più, uno eguale a zero) e tra loro distinti, ogni soluzione limitata $x = \varphi(t)$ della (3) è quasi periodica.

Cominciamo con l'osservare che dall'ipotesi fatta segue, come è noto, l'esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$(4) \quad \varphi_k(t) = e^{i\lambda_k t} \psi_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

in cui $i\lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sono gli esponenti caratteristici e le $\psi(t)$ sono funzioni periodiche di t col periodo T . Si osserverà inoltre che, in virtù di un teorema generale della teoria delle equazioni differenziali lineari, ogni $\varphi(t)$, e quindi ogni $\psi(t)$, risulta ovunque continua.

L'espressione analitica della soluzione generale di (1) assume l'aspetto

$$(5) \quad x = \sum_1^n c_k e^{i\lambda_k t} \psi_k(t)$$

e ciascun addendo del secondo membro, se non corrisponde ad un esponente caratteristico nullo (nel qual caso è periodico puro) è quasi periodico (cfr. un'oss. fatta al n. 1).

Tale dunque riesce la soluzione generale di (1), cioè, sotto l'ipotesi fatta sugli esponenti caratteristici, ogni soluzione di (1) è quasi periodica.

Ma volgiamo oramai l'attenzione all'equazione non omogenea (3).

Per integrarla, supposta conseguita la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea, applicheremo il classico metodo di Cauchy⁽¹⁾ che, come è noto, permette di assegnare sotto forma di integrale definito una soluzione particolare dell'equazione.

Sia u un valore generico di t ed imponiamo alla x fornita da (5) le condizioni

$$x(u) = 0, \quad x'(u) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-2)}(u) = 0, \quad x^{(n-1)}(u) = 1.$$

Si ha il sistema

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n c_k \varphi_k(u) = 0 \\ \sum_1^n c_k \varphi_k'(u) = 0 \\ \sum_1^n c_k \varphi_k^{(n-2)}(u) = 0 \\ \sum_1^n c_k \varphi_k^{(n-1)}(u) = 1, \end{array} \right.$$

(1) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, to. II, 4^{me} éd., Gauthier Villars. Paris, 1924.

di cui denotiamo con

$$c_k = \gamma_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

la soluzione.

Dall'espressione (4) di ogni $\varphi(t)$, segue che la sua derivata di qualunque ordine è una somma di funzioni dello stesso tipo, cioè, il prodotto di un esponenziale di modulo unitario per una funzione periodica ovunque continua.

Dunque, il determinante di Wronski W delle $\varphi(t)$, che è una funzione razionale intera delle stesse $\varphi(t)$ e delle loro derivate (fino a quelle di ordine $n - 1$), è quasi periodico e la stessa proprietà appartiene⁽¹⁾ quindi alle funzioni $\gamma(u)$, che si ottengono risolvendo il sistema (6) con la regola di Cramer.

Se allora nella (5) si sostituiscono le funzioni $\gamma(u)$ alle costanti c si ottiene una funzione

$$N(u, t) = \sum_k^n \gamma_k(u) \varphi_k(t)$$

che è quasi periodica rispetto a t ed u .

La soluzione particolare di Cauchy della (3) è data dall'integrale

$$F(t) = \int_{t_0}^t N(u, t) f(u) du$$

ed è quella che per $t = t_0$ assume il valore zero insieme con le successive derivate fino a quella di ordine $n - 1$.

Ora si ha

$$F(t) = \sum_k^n \varphi_k(t) \int_{t_0}^t \gamma_k(u) f(u) du.$$

(1) Qui conviene osservare che non si può escludere *a priori* che sia zero l'estremo inferiore del modulo di W , nel qual caso non si può affermare che le $\gamma(u)$ siano quasi periodiche. Ma allora le $\gamma(u)$ sarebbero non limitate e sarebbe quindi non limitata la funzione $F(t)$ che considereremo tra breve; ciò è contrario alla nostra ipotesi sulle soluzioni dell'equazione (3).

La circostanza dianzi segnalata si caratterizza tenendo presente la formola del Liouville

$$W = W_0 e^{-\int_{t_0}^t a_1 dt},$$

in cui W_0 denota il valore del wronskiano W nel punto $t = t_0$.

Da questa formola segue che l'estremo inferiore del modulo di W è nullo sempre e solo quando l'estremo superiore dell'integrale $\int_0^t a_1 dt$ è $+\infty$.

Dunque, quando l'integrale $\int_0^t a_1 dt$ non è periodico, si può affermare che tutte le soluzioni di (3) sono non limitate, salvo casi eccezionali (cfr. n. 4).

Quando il medesimo integrale è limitato (e quindi periodico), il wronskiano W risulta non solo quasi periodico, ma addirittura periodico (costante, se la a_1 è identicamente nulla).

Le funzioni $\gamma_k(u)f(u)$ sono quasi periodiche e, per un teorema del n. 1, risultano quasi periodici gli integrali

$$\int_0^t \gamma_k(u) f(u) du \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

se sono limitati.

Poichè dunque tutte le soluzioni della (3) sono date dalla formola

$$x = \sum_k^n c_k e^{i\lambda_k t} \psi_k(t) + F(t),$$

segue che ogni soluzione di (3), limitata per $-\infty < t < +\infty$, è quasi periodica.

4. Nel caso particolare in cui i coefficienti di Ax siano *costanti* (anche complesse), il teorema della presente Nota fu dimostrato, senza la nostra ipotesi sugli esponenti caratteristici, nel 1926 da Bohr e Neugebauer ⁽¹⁾.

Questi Autori hanno basato la loro dimostrazione sulla possibilità di decomporre l'operatore Ax in un prodotto di operatori del 1° ordine, riducendosi così all'equazione del primo ordine ed applicando considerazioni dovute originariamente a Bohl ed Esclangon.

Il caso dei coefficienti periodici, trattato sistematicamente da Floquet, Poincaré, Liapounoff, ha un'importanza particolare nelle applicazioni alla meccanica analitica e per questa ragione potrà forse riuscire di qualche utilità il teorema dianzi dimostrato.

Osserviamo che se sono immaginari puri (salvo, al più, uno eguale a zero) e tra loro distinti m esponenti caratteristici dell'equazione (1), essendo $m < n$, la (1) stessa ammette un insieme ∞^m di soluzioni quasi periodiche, ma, in generale, ogni soluzione della (3) sarà non limitata.

Per rendersene conto, basterà considerare le funzioni $\gamma(u)$ che risolvono il sistema (6).

Se anche l'integrale $\int_0^t a_i dt$ è periodico, la presenza di esponenti caratteristici reali fa sì che il numeratore della frazione che rappresenta la generica $\gamma(u)$ sia non limitato.

Comunque, sempre rimanendo ferma l'ipotesi di qualche esponente caratteristico reale, la (3) potrà ammettere particolari soluzioni limitate e resterebbe a dimostrarne la quasi periodicità.

Per il caso elementare dell'equazione del 1° ordine, la proprietà si dimostra facilmente.

(1) Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite, « Nachr. der Gesell. der Wiss. zu Göttingen », 1926.

Sia l'equazione

$$(3_1) \quad x' + \alpha(t)x = f(t),$$

in cui $\alpha(t)$, $f(t)$ sono funzioni reali, ovunque continue e periodiche con periodi anche tra loro distinti.

La funzione $\alpha(t)$ si decomponga nel seguente modo

$$\alpha(t) = \lambda + \beta(t),$$

essendo λ costante e $\beta(t)$ ad integrale periodico (sviluppo di Fourier).

La soluzione generale della (3₁) è data notoriamente dalla formola

$$x = e^{-\int_0^t \alpha du} \left(c + \int_0^t f(u) e^{\int_0^u \alpha du} du \right).$$

Se dunque $\lambda \neq 0$, per qualunque valore, diverso da zero, della costante c , si ha una soluzione non limitata.

Se invece si considera il valore $c = 0$, si riconosce che la soluzione

$$\varphi(t) = e^{-\int_0^t \alpha du} \int_{-\infty}^t f(u) e^{\int_0^u \alpha du} du$$

è limitata (gli estremi $+\infty$ e $-\infty$ corrispondono rispettivamente a $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$).

Dimostriamo allora la quasi periodicità, supponendo, per fissare le idee, $\lambda > 0$.

Si ponga

$$g(t) = f(t) e^{\int_0^t \beta du}$$

$$G(t) = e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t g(u) e^{\lambda u} du,$$

con che si ha

$$\varphi(t) = e^{-\int_0^t \beta du} G(t).$$

Poiché l'integrale $\int_0^t \beta du$ è periodico, la funzione $g(t)$ è limitata e quasi periodica. Basterà mostrare la quasi periodicità di $G(t)$. Sia τ un numero di trasporto di $g(t)$ relativo ad ε . Dico che τ è un numero di trasporto di $G(t)$ relativo ad $\frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} |G(t+\tau) - G(t)| &= \left| e^{-\lambda(t+\tau)} \int_{-\infty}^{t+\tau} g(u) e^{\lambda u} du - e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t g(u) e^{\lambda u} du \right| = \\ &= e^{-\lambda t} \left| \int_{-\infty}^t [g(u+\tau) - g(u)] e^{\lambda u} du \right| \leq e^{-\lambda t} \left| \int_{-\infty}^t |g(u+\tau) - g(u)| e^{\lambda u} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}. \end{aligned}$$

5. Il teorema dimostrato si può-ovviamente trasportare ai sistemi non omogenei di equazioni differenziali del 1° ordine

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i + b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

in cui le a sono funzioni reali ovunque continue, periodiche di periodo T e le funzioni b sono anch'esse reali, ovunque continue e periodiche con periodi che possono essere tra loro distinti (o quasi periodiche).

Se si conviene di chiamare *soluzione* del sistema una n -pla di funzioni

$$x_k = \varphi_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

soddisfacenti al sistema, si può affermare che, se gli esponenti caratteristici sono tutti immaginari puri (salvo, al più, uno eguale a zero) e tra loro distinti, ogni soluzione i cui elementi φ sono limitati è costituita da funzioni quasi periodiche.

In un prossimo lavoro questa conclusione sarà messa a confronto da una parte con le ricerche di Liapounoff e Levi-Civita riguardanti la stabilità di una soluzione periodica di un sistema differenziale qualunque e d'altra parte con le ricerche di Franklin e Markoff sui moti rappresentati da funzioni quasi periodiche in relazione all'importante concetto di moto ricorrente che il Birkhoff ha introdotto nella dinamica analitica.

Matematica (Analisi funzionale). — *Sulla struttura topologica dello spazio funzionale (A) costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass.* Nota di S. MINETTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

Nella seconda parte di una Memoria in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »⁽²⁾ ho abbozzato un possibile assetto delle definizioni a porre da base dello studio topologico dello spazio funzionale (A) costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass. Con tali definizioni si eliminano già vari inconvenienti cui si va invece incontro seguendo altri punti di vista.

In questa Nota desidero indicare un'altra trattazione più progredita e più perfetta dello stesso argomento frutto di ulteriori riflessioni originate da conversazioni avute su tal soggetto nella mia recente permanenza a Parigi coi signori Fréchet e Appert.

Con le definizioni proposte nella Memoria di Palermo lo spazio (A) non poteva esser classificato fra gli spazi (V) nel senso usuale di tale denominazione⁽³⁾, ma poteva soltanto considerarsi tale, rispetto ad ogni prefissato campo C del piano complesso della variabile indipendente ζ .

Qui si rimuove questa fastidiosa restrizione e mercè altre opportune definizioni di convergenza e di intorno si classifica senz'altro lo spazio (A) fra gli spazi (V). Sono questi i primi passi verso un inquadramento netto e preciso dell'importante spazio funzionale in questione nelle categorie classiche di spazi astratti introdotte dal Fréchet.

1. Limitiamoci pel momento a considerare lo spazio funzionale (A_u) costituito dalla totalità delle funzioni analitiche « uniformi » nel senso di Weierstrass.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) Sulla struttura topologica dello spazio F delle funzioni olomorfe all'interno di un medesimo campo e su quella dello spazio (A) delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass.

(3) Ricordo qui che: uno spazio (V) è uno spazio in cui la definizione, già data perchè lo spazio sia definito, di punto d'accumulazione può anche esprimersi per mezzo di una nozione di intorno convenientemente scelta. — Si vuole intendere con ciò che ad ogni punto f_0 dello spazio può farsi corrispondere una famiglia $\{V_{f_0}\}$ di insiemi V_{f_0} (chiamati intorni di f_0) in modo che: Condizione necessaria e sufficiente perchè f_0 sia punto di accumulazione di un insieme I di punti di questo spazio è che I abbia con ogni intorno V_{f_0} di f_0 un elemento almeno in comune, distinto da f_0 .

Porrò allora le seguenti definizioni:

a) DEFINIZIONE DI CONVERGENZA. — Una successione $\{f_n(\zeta)\}$ di elementi di (A_u) sarà detta « convergente verso il limite $f(\zeta)$ » di (A_u) se esiste un dominio D del piano complesso delle ζ , in cui le $f_n(\zeta)$ (se si vuole, almeno a partire da un certo indice) sono olomorfe, e all'interno del quale esse convergono uniformemente verso $f(\zeta)$.

Questa $f(\zeta)$ (necessariamente olomorfa all'interno di D), sarà detta « uno dei punti limiti della successione considerata », mentre l'insieme delle funzioni limiti di una successione $S = \{f_n(\zeta)\}$ sarà detto « l'insieme dei punti limiti » della S .

b) DEFINIZIONE DELL'OPERAZIONE DI CHIUSURA (FERMETURE) $\bar{I}$ DEGLI INSIEMI I DI (A_u) . — Si dice che un punto $f(\zeta)$ appartiene all'insieme $\bar{I}$ che serra un insieme I di (A_u) , se $f(\zeta)$ appartiene all'insieme dei punti limiti (non vuoto) di almeno una successione $S \equiv \{f_n(\zeta)\}$ di elementi, distinti o no, di I .

Avendo già dichiarato la natura dell'insieme P dei punti appartenenti ad (A_u) , con le definizioni *a*, e *b*, che determinano l'operazione $K(I)$ che fa corrispondere ad ogni sottoinsieme I di P , l'insieme $\bar{I}$ appartenenti all'insieme che serra I , lo spazio (A_u) « è definito ».

Ci si accorge inoltre che vengon così rispettate le condizioni seguenti:

1^a L'insieme I' dei punti di accumulazione⁽¹⁾ di un insieme I (che è un sottoinsieme di P e che può esser vuoto), è definito ed unico per ogni sottoinsieme non vuoto I di P .

2^a Perché un punto f_0 appartenga ad I' occorre e basta che $I - f_0$ sia non vuoto, e che f_0 appartenga ad $[I - f_0]'$.

Si ha dunque intanto il diritto di dichiarare che « lo spazio (A_u) è uno spazio topologico ».

OSSERVAZIONI. — È bene notare che in conseguenza delle precedenti definizioni:

1° lo spazio (A_u) , com'è desiderabile avere, è uno spazio serrato (chiuso);

2° che per una successione convergente non è più possibile parlare di teorema di unicità del limite.

Quest'ultimo fatto segna già una differenza profonda ed essenziale fra gli spazi funzionali sin qui studiati e lo spazio (A_u) ; ma, come si vedrà ben presto, non è la sola.

In conseguenza le proprietà classiche della convergenza divengono le seguenti:

1^a Se gli elementi $f(\zeta)$ di una successione $S \equiv \{f_n(\zeta)\}$ sono identici ad un medesimo elemento $f(\zeta)$ la S converge e ha per limite « unico » $f(\zeta)$;

2^a Se una successione $S \equiv \{f_n(\zeta)\}$ è convergente, è pure convergente ogni successione $S_{(p)} = \{f_{n_p}(\zeta)\}$ estratta dalla S , e l'insieme dei punti di

(1) Non si confonda qui il noto concetto di « punto d'accumulazione » con quello di « punto limite ».

accumulazione della S è « contenuto » (o coincide) con quello dei punti di accumulazione della $S_{(p)}$.

Basti in proposito l'esempio della $S \equiv \{y_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ con $y_{2n-1} = \frac{1}{1-\gamma}$ e $y_{2n} = 1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{\frac{2n-2}{2}}$ che, a norma delle precedenti definizioni ammette il solo punto d'accumulazione $\frac{1}{1-\gamma}$, mentre la $\{y_{2n}\}$, estratta dalla S , ammette i due punti limiti $\frac{1}{1-\gamma}$ e $+\infty$.

Quest'ultima conseguenza segna così un'altra differenza profonda ed essenziale fra i più comuni spazi funzionali e lo spazio (A_u) ⁽¹⁾. Pur tuttavia ci si accorge facilmente che in virtù delle nostre precedenti definizioni lo spazio (A_u) « è uno spazio (V) » e che per conseguenza possiede tutte le proprietà così interessanti di tali ultimi spazi. Infatti in virtù delle mie precedenti definizioni lo spazio (A_u) è, intanto, uno spazio topologico e soddisfa, per di più alla prima condizione di Riesz⁽²⁾, e cioè che se $I \subset F$, se cioè I appartiene ad F (I ed F essendo due insiemi formati con elementi di (A_u)) si ha $\bar{I} \subset \bar{F}$.

(1) Colgo qui occasione per riportare un'osservazione, assai interessante dal punto di vista teorico, che il sig. Appert ebbe gentilmente a comunicarmi in una Sua lettera. Riporto testualmente lo scritto di quell'Autore: *Remarque. — Afin de montrer que les considérations concernant les espaces topologiques peuvent, malgré leur extrême généralité avoir des applications à l'Analyse classique il nous a paru utile d'indiquer comment on peut construire un exemple intéressant d'espace topologique qui ne soit pas un espace (V) , en nous inspirant d'une définition due à M. Minetti.*

« M. Minetti pour divers motifs, trouve naturel d'admettre dans l'espace (A_u) dont les points sont toutes les fonctions analytiques uniformes $f(z)$, la définition suivante: *Une suite infinie $S \equiv \{f_n(z)\}$ de points de (A_u) est convergente vers la limite $f(z)$ s'il existe un domaine circulaire C dans lequel les $f_n(z)$ sont holomorphes à partir d'un certain rang n , et tel que les $f_n(z)$ convergent uniformément vers $f(z)$ dans tout domaine complètement intérieur à C .* Cette définition étant admise il paraît assez naturel d'admettre dans l'espace (A_u) une définition de l'opération $\bar{E}$ de fermeture d'un ensemble E de (A_u) , satisfaisant aux deux conditions $E \subset \bar{E}$ et $\bar{O} = O$ et de plus telle que: *Un point $f(z)$ appartient à la fermeture $\bar{E}$ d'un ensemble infini dénombrable E si et seulement s'il appartient à E ou si une suite infinie formée de tous les éléments de E pris chacun une seule fois est convergente vers la limite $f(z)$.*

« Alors l'espace (A_u) sera un espace topologique mais il ne sera pas un espace (V) . En effet, comme nous l'a fait remarquer M. Minetti une suite $\{f_{n_p}(z)\}$ extraite de la suite S peut être convergente au sens de la précédente définition vers d'autres limites que celles de la suite S .

« L'opération $\bar{E}$ ne sera donc pas non-décroissante ». — Osservo che con le considerazioni dell'Appert si viene a dare un esempio (il primo che si conosca) di uno spazio funzionale concreto che pur essendo spazio topologico non è spazio (V) ! (si veda in proposito APPERT, loc. cit., nella nota seguente, p. 7).

(2) Vedi ad es. FRÉCHET, *Les espaces abstraits*. Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 181, e APPERT, *Propriétés des Espaces abstraits les plus généraux*. Paris, Hermann, Exposés d'Analyse générale publiés sous la directions de M. Fréchet, 1934, II, p. 7.

In virtù dunque di un noto risultato dovuto al Fréchet (A_u) è spazio (V)⁽¹⁾.

Abbiamo così ottenuto il principale risultato che, « dal punto di vista teorico », come già si disse, si voleva. qui ottenere.

2. Ma la questione forse più importante ancora era quella, di riuscire a dare esplicitamente una concreta definizione di intorno di un elemento f_0 di (A_u) nel senso di Fréchet, che permettesse di ascrivere lo spazio in questione fra gli spazi (V) non più in base al fatto che detto spazio è uno spazio topologico soddisfacente alla prima condizione di Riesz, ma bensì in virtù, direttamente, della definizione di spazi (V).

È quello di cui ci occuperemo in questo paragrafo.

Sia all'uopo f_0 un elemento di (A_u) e si consideri la famiglia $[D_{f_0}]$ di tutti i domini (campi aperti) D_{f_0} del piano complesso delle z , all'interno dei quali la funzione f_0 è olomorfa. Si effettui ora la rappresentazione conforme di ciascun dominio D_{f_0} sul cerchio unità C , $|z| < 1$, e chiamiamo $\varphi_0^{(D_{f_0})}$ la funzione olomorfa in C che si ottiene per mezzo di questa rappresentazione conforme e che corrisponde alla funzione f_0 considerata nel dominio D_{f_0} . Sia inoltre $\{\Gamma_p\}$ una successione di cerchi di centro nell'origine del piano delle z , completamente interni al cerchio unità C , e di raggi $\rho_p < 1$ tali che $\rho_{p+1} > \rho_p$, e $\lim_{p \rightarrow \infty} \rho_p = 1$.

Ciò posto se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni analitiche che sono olomorfe all'interno di un dominio D_{f_0} e che in questo interno convergono uniformemente verso f_0 , la successione $\{\varphi_n^{(D_{f_0})}\}$ godrà, rispetto al cerchio unità C , delle stesse proprietà e reciprocamente. La rappresentazione conforme infatti conserva la convergenza uniforme. D'altra parte per quanto ho avuto occasione di dimostrare nella mia citata Memoria di Palermo, condizione necessaria e sufficiente perchè la successione $\{\varphi_n^{(D_{f_0})}\}$ sia uniformemente convergente all'interno di C verso $\varphi_0^{(D_{f_0})}$ è che la distanza

$$\begin{aligned} (\varphi_n^{(D_{f_0})}, \varphi_0^{(D_{f_0})})_{\Gamma_p} = & \left[\int_0^{2\pi} \left\{ P_{\varphi_n^{(D_{f_0})}}(\theta) - P_{\varphi_0^{(D_{f_0})}}(\theta) \right\}^2 \rho_p d\theta + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \left\{ Q_{\varphi_n^{(D_{f_0})}}(\theta) - Q_{\varphi_0^{(D_{f_0})}}(\theta) \right\}^2 \rho_p d\theta \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

fra le funzioni $\varphi_n^{(D_{f_0})}$ e $\varphi_0^{(D_{f_0})}$ rispetto al campo C_p di contorno Γ_p converga a zero con $\frac{1}{n}$, qualunque sia $p = 1, 2, 3, \dots$

(1) Vedi APPERT, loc. cit., p. 7. Si vede inoltre facilmente che lo spazio (A_u) soddisfa anche alle 2ª e 3ª condizione di Riesz.

In altre parole tale distanza deve esser convergente a zero su ogni Γ_p , o, più brevemente, seguendo una locuzione che ebbi occasione di introdurre in questo genere di questioni, essa deve convergere a zero « verso » la frontiera di C .

Ebbene, se ciò accade fra le funzioni $\varphi_n^{(D_{f_0})}$ e la $\varphi_0^{(D_{f_0})}$ rispetto al cerchio unità, dirò che la distanza delle f_n alla f_0 converge a zero « verso » la frontiera di D_{f_0} . Questa condizione è allora necessaria e sufficiente perchè le f_n siano uniformemente convergenti verso f_0 all'interno di D_{f_0} .

Ciò posto consideriamo un insieme qualunque I_{f_0} di elementi di (A_u) che goda delle seguenti proprietà:

I^a I_{f_0} contiene f_0 ; II^a ogni successione $\{\psi_n\}$ di elementi distinti appartenenti a $C[I_{f_0}]^{(1)}$, è tale che la distanza fra ψ_n e f_0 non converge a zero verso la frontiera di un qualunque dominio D_{f_0} .

In queste condizioni è evidente che ogni siffatto insieme I_{f_0} contiene l'elemento f_0 come punto interno⁽²⁾.

Ma allora è noto che se si considera un insieme qualunque I di elementi di (A_u) che ammette f_0 come uno dei suoi punti di accumulazione non può esistere un insieme I_{f_0} che non contenga almeno un punto di I distinto da f_0 .

Nel caso contrario infatti, in virtù della proprietà II^a riportata a p. 2, mentre il punto f_0 dovrebbe appartenere all'insieme $[I - (f_0)]'$ dei punti di accumulazione di $I - f_0$, I_{f_0} non avrebbe punti in comune con $I - (f_0)$, e quindi l'elemento f_0 che appartiene ad I_{f_0} , sarebbe punto di accumulazione dell'insieme complementare $C[I_{f_0}]$ di I_{f_0} , contrariamente al fatto che f_0 è punto interno di I_{f_0} . In conseguenza la condizione che ogni I_{f_0} contenga un punto di un insieme I , che sia distinto da f_0 , è necessaria perchè f_0 sia punto di accumulazione di I .

Ma questa condizione è anche sufficiente perchè se f_0 è un punto isolato di I , l'insieme $C[I] + (f_0)$ ammette evidentemente f_0 come punto interno, mentre non contiene alcun punto di I distinto da f_0 .

Si può dunque adottare la seguente:

DEFINIZIONE DI INTORNO DI UN ELEMENTO f_0 DI (A_u) . — Si dice che un insieme di elementi di (A_u) costituisce un intorno V_{f_0} di un elemento f_0 di (A_u) se f_0 appartiene a V_{f_0} e se ogni successione $\{\psi_n\}$ di elementi di (A_u) non appartenenti a V_{f_0} è tale che la distanza fra ψ_n e f_0 non converge a zero « verso » la frontiera di non importa qual dominio D_{f_0} in cui gli elementi ψ_n , come f_0 , siano olomorfi.

Da quanto si è precedentemente detto risulta allora che:

(1) Qui $C[I_{f_0}]$ designa l'insieme complementare di I_{f_0} rispetto ad (A_u) .

(2) Per la definizione di « punto interno » ad un insieme vedi FRÉCHET, *Les espaces abstraits*. Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 174.

Condizione necessaria e sufficiente perchè f_0 sia punto di accumulazione di un insieme I di elementi di (A_u) è che ogni intorno V_{f_0} di f_0 contenga almeno un punto di I distinto da f_0 .

Il problema propostoci è così completamente risolto.

3. Aggiungo ora che quando si voglia più generalmente considerare lo spazio (A) della totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass e non più necessariamente uniformi, basterà considerare tutti i differenti rami di una funzione analitica come altrettanti diversi elementi dello spazio (A_u) dicendo inoltre « che una successione $S \equiv \{f_n(\zeta)\}$ di elementi di (A) è convergente quando esiste un dominio D del piano complesso delle ζ in cui le $f_n(\zeta)$ sono regolari (ivi sprovviste, in particolare, di punti di ramificazione) e all'interno del quale una successione $\{\bar{f}_n(\zeta)\}$, $\bar{f}_n(\zeta)$ essendo uno dei rami della $f_n(\zeta)$, converge uniformemente verso uno dei rami di una certa funzione $f(\zeta)$, che all'interno di D è necessariamente olomorfa », e tenendo conto inoltre delle conseguenti modificazioni, ormai formali, che occorre apportare alla precedente teoria svolta per lo spazio (A_u) .

4. Resterebbe a sapere se lo spazio (A) non rientri in qualche categoria di spazi astratti meno generale che quella degli spazi (V) ; per mio conto, condividendo pienamente l'opinione espressa in proposito anche dal Fréchet, credo fermamente di sì. Ma non sapremmo pel momento dare una risposta precisa in proposito. È un problema di Analisi generale, certo assai interessante, che attende ancora una risposta, e che mi permetto segnalare vivamente all'attenzione degli studiosi. Spero che altri, e presto, vorrà risolverlo.

5. Aggiungo che a norma delle mie precedenti definizioni lo spazio (A_u) che, essendo spazio (V) , non è però spazio (L) , offre il primo esempio veramente e concretamente interessante di uno spazio che, dal punto di vista delle generalità, è compreso, per così dire, fra gli spazi (V) e quelli (L) . Resta così maggiormente confermata l'utilità della considerazione degli spazi (V) introdotti dal Fréchet per cui sinora una giustificazione a posteriori era soltanto offerta dalla costruzione dello spazio discreto di Linfield ⁽¹⁾.

(1) Vedi in proposito quanto scriveva il FRÉCHET nel suo volume, *Les Espaces abstraits*, già citato, a p. 180.

Geometria. — *Sul criterio di Plücker-Clebsch.* Nota di A. TERRACINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

È ben noto di quanta utilità riesca in geometria il cosiddetto criterio di Plücker-Clebsch: secondo questo criterio, assegnato un sistema di r equazioni algebriche

$$(1) \quad f_1(x_1, x_2, \dots, x_r; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0, \dots, f_r(x_1, x_2, \dots, x_r; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0$$

in altrettante incognite $x_1, x_2, \dots, x_r$, con i coefficienti funzioni razionali di s parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, si può concludere che il sistema (1) è certamente compatibile per valori *generici* (nel senso che ora sarà precisato) delle λ , appena si sappia che per *un* particolare gruppo λ^0 di valori di questi stessi parametri il sistema stesso è compatibile e ammette un numero finito di soluzioni.

Una dimostrazione limpida e rigorosa di tale criterio è stata recentemente data dal Severi ⁽²⁾, il quale ha provato che se per *un* particolare sistema di valori delle λ il sistema (1) ammette una soluzione *isolata* (cioè tale che in un suo conveniente intorno non cadano altre soluzioni), il sistema stesso è compatibile per valori *generici* dei parametri λ : valori *generici* significa che, se si rappresentano i valori delle λ nei punti λ di uno spazio a s dimensioni L_s , si può avere incompatibilità soltanto per i punti di alcune varietà, in numero finito, ciascuna delle quali ha dimensione $\leq s - 1$ ⁽³⁾.

È però da osservare che nelle applicazioni geometriche, quando si tratta di stabilire la compatibilità di un sistema del tipo (1), il criterio di Plücker-Clebsch, quale fu qui richiamato, non è sempre sufficiente. Invero in molti problemi geometrici occorre distinguere le *soluzioni propriamente dette* da *soluzioni degeneri* che soddisfano al sistema (1) in cui si traduce un dato problema geometrico senza però che esse rispondano effettivamente al problema geometrico da cui si è partiti.

Un esempio tipico si trova nel classico problema della ricerca di un triangolo ABC, il quale deva risultare rispettivamente iscritto in una prima conica data γ e autopolare rispetto a una seconda conica δ , data nello stesso piano della precedente. Attualmente le λ sono i coefficienti delle equazioni delle due coniche date; e il sistema (1) è formato dalle sei equazioni

(1) Nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche*, «Rend. R. Acc. dei Lincei» (6), XVII, 1933. Cfr. anche, dello stesso A.: *Lezioni di Analisi*, I. Bologna, 1933, p. 409; e inoltre VAN DER WAERDEN, *Zur algebraischen Geometrie*. VI. *Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen*. «Math. Ann.», to. 110, 1934.

(3) In tutto il seguito manteniamo per la parola *generici* questo stesso significato.

in sei incognite (per esempio le tre coppie di coordinate proiettive non omogenee, risp. x_1 e x_2 , x_3 e x_4 , x_5 e x_6 , dei tre vertici A, B, C) che si ottengono scrivendo che il punto A sta sulla conica γ ecc., che i punti A e B sono coniugati rispetto alla conica δ ecc. In questo esempio il sistema (1) nel quale si traducono le condizioni imposte è compatibile per valori generici delle λ , bastando per esempio assumere i punti A e B coincidenti in una delle intersezioni delle due coniche date, e il punto C coincidente esso pure con A oppure con l'ulteriore intersezione della conica γ con la tangente a δ nel punto A. Ma, nei due casi, si tratta di una soluzione *degenerè*, in quanto non risulta rispettata la restrizione a cui dal punto di vista geometrico vanno assoggettati i punti A, B, C per poter essere vertici di un triangolo, di essere cioè distinti e non allineati. Le soluzioni del sistema (1) aventi geometricamente interesse sono quelle sole per le quali non risulta soddisfatta la

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_4 & 1 \\ x_5 & x_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Così, per indicare un altro esempio, quando in uno spazio proiettivo qualunque si cerca di eseguire sulle coordinate proiettive una sostituzione lineare, a coefficienti incogniti, atta a far conseguire prefissate semplificazioni nell'equazione di un dato ente geometrico, è essenziale la restrizione a cui devono soddisfare quei coefficienti incogniti per condurre effettivamente a una soluzione del problema, di dar luogo cioè a un determinante della sostituzione che risulti diverso da zero. Quando, per esempio, si cerca di trasformare l'equazione di un complesso quadratico generale di rette dello spazio ordinario nell'equazione che conviene al complesso di Battaglini, così appunto come faceva Battaglini, prendendo come incognite omogenee i sedici coefficienti della trasformazione lineare sulle coordinate proiettive di punto, e imponendo all'equazione del complesso quadratico di mancare, a trasformazione avvenuta, dei quindici termini non quadrati perfetti di una delle coordinate di retta, si scrive un sistema omogeneo di quindici equazioni in sedici incognite, e come tale sempre compatibile. È invece ben noto che la trasformazione così tentata non riesce per un complesso quadratico generale, il che significa che per un tale complesso non risulterà rispettata, da parte dei sedici coefficienti che devono fornire la soluzione, la condizione di dar luogo ad un determinante del quart'ordine diverso da zero. E gli esempi si potrebbero moltiplicare.

Per poter abbracciare tutti questi casi, conviene pensare a una definizione generale di *soluzione degenerè* del sistema (1)⁽¹⁾: ciò significa che in

(1) Cfr. SEVERI, *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*. «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», to. LXXV, 1916.

uno spazio $\sum_r$, dove si adottino le $x_1, x_2, \dots, x_r$ come coordinate proiettive non omogenee dei singoli punti x , sarà prefissato un certo insieme formato da un numero finito q di varietà $V_{d_1}, V_{d_2}, \dots, V_{d_q}$, con $d_i \leq r-1$ ($i=1, 2, \dots, q$); e che si riguarderà come degenerare ogni soluzione del sistema (1) costituita da valori $x_1, x_2, \dots, x_r$ tali che il corrispondente punto x venga a stare su una almeno di queste varietà: nel seguito queste varietà si chiameranno brevemente *varietà di degenerazione*. Così, nel primo esempio addotto, tale è unicamente la V_3 dello spazio $\sum_6$ che in esso è rappresentata dall'equazione (2). In corrispondenza a questa distinzione fra soluzioni degeneri e non degeneri, il sistema (1), per determinati valori dei parametri λ , in quanto sia compatibile, si dirà *propriamente compatibile*, oppure *impropriamente incompatibile* secondoche esso ammette, o rispettivamente non ammette *almeno* una soluzione non degenera.

Ora l'applicazione del criterio di Plücker-Clebsch ai casi sopra indicati riposa sul teorema seguente:

se per un particolare gruppo λ^0 di valori delle λ il sistema (1) ammette una soluzione isolata non degenera, il sistema stesso è PROPRIAMENTE COMPATIBILE per valori generici delle λ : la locuzione valori generici ha sempre il significato preciso che è stato dichiarato in una precedente nota a piè di pagina.

Il nuovo enunciato non sembra potersi ridurre immediatamente a quello del teorema dimostrato dal Severi: da quest'ultimo segue bensì che, ove sia soddisfatta l'ipotesi del nuovo enunciato, il sistema (1) è compatibile per valori generici delle λ , ma non resta ancora chiarito che si tratta effettivamente di compatibilità *propria*. La dimostrazione del Severi va dunque ripresa non nella sua conclusione, ma in uno stadio precedente, per essere adattata al nuovo enunciato. Precisamente, restando inalterati i nn. 3 e 4 della sua Nota lincea, coi risultati d'indole generale in essi richiamati o stabiliti, occorre riprendere i due punti salienti della dimostrazione che si trovano stabiliti ai nn. 2 e 5 della Nota stessa ⁽¹⁾.

1. Quanto al primo di questi due punti, anzichè cercare di modificare la dimostrazione del Severi la quale è fondata su un'opportuna applicazione del metodo di eliminazione di Kronecker, preferiamo far capo direttamente ad un'altra elaborazione dello stesso metodo, che deduce molto facilmente da esso i seguenti due teoremi. Il primo, che qui viene richiamato in quanto fornisce il tramite più diretto fra quel metodo di eliminazione e il successivo teorema B (con l'osservazione che poi aggiungeremo) è un criterio per l'incompatibilità di un sistema di equazioni algebriche: A) *condizione necessaria e sufficiente per l'incompatibilità di un sistema di h equazioni algebriche*

(1) Si può però osservare che la dimostrazione *nel campo analitico* accennata nel n. 9 della citata Nota del SEVERI, vale tal quale anche se si vogliano escludere le soluzioni degeneri.

in r incognite

$$(3) \quad f_1(x_1, \dots, x_r) = 0, \dots, f_b(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

è l'esistenza di h polinomi

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \Phi_b(x_1, \dots, x_r)$$

talì che risulti identicamente

$$(4) \quad \sum_{i=1}^b \Phi_i(x_1, \dots, x_r) f_i(x_1, \dots, x_r) = 1,$$

dove ovviamente, in base a questa stessa identità, si può ottenere che i polinomi $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_b$ abbiano i coefficienti appartenenti al corpo definito dai coefficienti dei polinomi f ⁽¹⁾. Da questo teorema segue poi immediatamente, secondo un ragionamento dovuto al Rabinowitsch ⁽²⁾, il « teorema degli zeri »: B) se un polinomio $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$ si annulla per ogni soluzione del sistema (3), esiste un intero positivo N tale che si ha identicamente

$$(5) \quad F^N = \sum_{i=1}^b \psi_i(x_1, \dots, x_r) f_i(x_1, \dots, x_r),$$

dove le ψ sono convenienti polinomi nelle stesse x , con coefficienti appartenenti al corpo definito dai coefficienti del polinomio F e dei polinomi f . Qui vogliamo soltanto aggiungere l'osservazione che, riprendendo le dimostrazioni sopra citate di questi teoremi, esse provano contemporaneamente che, supponendo che i gradi delle singole equazioni che costituiscono il sistema (3) siano non maggiori di un intero m :

nel teorema A) è possibile conseguire l'identità (4) mediante polinomi Φ di grado $\leq g(r, m)$, dove $g(r, m)$ è un conveniente intero dipendente dagli interi r e m , la cui espressione esplicita non ci interessa;

nel teorema B) è possibile conseguire l'identità (5) mediante polinomi ψ di grado $\leq g(r, m, p)$, dove $g(r, m, p)$ è un conveniente intero dipendente da r , da m e dal grado p del polinomio F .

Ciò premesso, dimostriamo anzitutto che se in un punto λ^0 dello spazio L_s e in tutto un suo intorno (s -dimensionale) I il sistema (1) è impropriamente compatibile, esso è impropriamente compatibile per valori generici delle λ . Invero nel punto λ^0 dello spazio L_s e in ogni punto di I tutte le soluzioni del sistema (1) conducono a punti x dello spazio $\sum_r$, situati su varietà di generazione. Per ciascuna di queste V_{q_i} ($i = 1, 2, \dots, q$), in quanto non

(1) Cfr. PERRON, *Algebra*, I (2^a ed., 1932), p. 272.

(2) Zum Hilbertschen Nullstellensatz. « Math. Ann. », to. 102, 1930; cfr. PERRON, op. cit., p. 273.

sia già una ipersuperficie, conduciamo una ipersuperficie algebrica Γ_i ; e formiamo l'ipersuperficie algebrica complessiva $F(x_1, \dots, x_r) = 0$ che ha per componenti queste ipersuperficie, oltre a quelle che come tali costituiscono già singole ipersuperficie di degenerazione. Si può allora applicare il teorema B) all'equazione $F = 0$, in relazione a ciascuno dei sistemi (1) che si ottengono adottando per i parametri λ i valori λ^0 , o valori dell'intorno considerato I; per ciascuno di questi sistemi si può allora scrivere un'identità (5). Precisamente, se i primi membri delle (1) si suppongono di grado $\leq m$ nelle x , risulta da quanto precede che al variare delle λ in I, si può supporre che i gradi dei polinomi Ψ si mantengano di grado non superiore a una certa costante g ; e allora i coefficienti dei vari termini nelle $x_1, \dots, x_r$ nei polinomi stessi, supposti da principio coefficienti indeterminati di r polinomi di grado g nelle $x_1, \dots, x_r$, si possono ricavare dalla stessa identità (5) come funzioni razionali delle λ . L'identità (5) così ottenuta sussiste qualunque siano le x e qualunque siano le λ in I, e quindi anche senz'altro qualunque siano le λ , esclusi naturalmente quei valori di questi parametri che rendono infinito qualche termine nel secondo membro della (5). Perciò comunque si assumano le λ (salvo la restrizione ora detta) ogni soluzione del sistema (1) annulla il polinomio F . Se si ripete questo ragionamento variando ogni ipersuperficie Γ_i (in un numero finito di modi) in maniera che le varie ipersuperficie Γ_i abbiano per completa intersezione la varietà V_{d_i} , si conchiude che per valori generici delle λ si ottengono dal sistema (1) esclusivamente punti appartenenti a varietà di degenerazione.

2. Supponiamo ora che per i valori λ^0 il sistema (1) sia propriamente compatibile, in modo che esista una soluzione isolata non degenera λ^0 . Allora si ha ancora compatibilità *propria* quando nello spazio L_s il punto λ varia in un conveniente intorno (s -dimensionale) I del punto λ^0 . Ciò risulta invero ripetendo il ragionamento del Severi contenuto nel n. 5 della sua Nota, ove si introduca l'ipotesi della compatibilità *propria* per i valori λ^0 , e si segua questa ipotesi nel corso del ragionamento stesso.

Pertanto, se vale l'ipotesi fatta al principio di questo numero, l'applicazione del n. 1 prova l'enunciato.

Geometria. — *I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste.*
Nota I di B. SEGRE, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Una corrispondenza fra due superficie dello spazio ordinario, che muti le sezioni piane dell'una nelle sezioni piane dell'altra, è necessariamente omografica; ciò è del tutto ovvio se le superficie che si considerano sono algebriche, ed è stato assai semplicemente stabilito dal FUBINI per superficie qualsiasi⁽²⁾. Il sistema ∞^3 delle sezioni piane di una superficie S , non è tuttavia il solo che si conservi per trasformazioni omografiche; un altro, p. es., è costituito dalle linee coniche di S ⁽³⁾; ed è chiaro che i due suddetti sistemi ∞^3 non sono generalmente covarianti (ma si scambiano fra loro), quando si trasformi la S mediante una reciprocità.

In questa Nota ed in un'altra che la seguirà, io introduco su ogni superficie S non sviluppabile dello spazio un sistema ∞^3 di curve, il quale è covariante di fronte a tutte le trasformazioni proiettive della S . Le linee in discorso, che perciò denomino linee proiettive di S , possono venir definite semplicemente così.

Presa su S una qualunque linea $\mathcal{L}$, si considerino le due rigate R_1, R_2 costituite dalle tangenti asintotiche ad S nei vari punti di $\mathcal{L}$; a 4 punti comunque scelti sulla $\mathcal{L}$, corrispondono su R_1, R_2 due quaterne di generatrici di cui — a norma di un bel risultato del CARTAN⁽⁴⁾ — si possono considerare i birapporti: si ottengono in tal guisa due numeri, aventi significato invariante di fronte a tutte le trasformazioni proiettive di S , che verranno detti i birapporti dei 4 punti fissati della linea $\mathcal{L}$.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) Cfr. G. FUBINI, *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie*. « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », to. 49 (1913-14), p. 786, § 1.

(3) Così il PETERSON ha denominato le linee di contatto della S coi coni ad essa circoscritti: ved. p. es. C. SEGRE, *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*. « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », to. 43 (1908), p. 985.

(4) Cfr. É. CARTAN, *Sur les développantes d'une surface réglée*. « Bull. de l'Acad. Roumaine », to. 14 (1931), p. 167. In una Memoria di prossima pubblicazione approfondirò — da un altro punto di vista — alcune idee contenute in questo lavoro del CARTAN, dando loro una portata di gran lunga più vasta; ciò, fra l'altro, permetterà di svolgere in altri campi considerazioni perfettamente analoghe alle seguenti.

Ebbene, la $\mathcal{L}$ sarà chiamata una linea proiettiva di S , se per 4 suoi punti qualsiansi tali birapporti risultano sempre uguali fra loro.

Su di una superficie non sviluppabile dello spazio, i tre sistemi ∞^3 delle linee piane, coniche e proiettive sono fra loro a due a due distinti, escluso solo il caso delle quadriche, per le quali essi riduconsi ad un unico sistema.

L'equazione differenziale del 3° ordine delle linee proiettive, trovasi qui scritta sotto forma notevole (Nota II, n. 5) in coordinate affatto qualunque. Si ha inoltre che:

Affinchè una corrispondenza puntuale fra due superficie risulti proiettiva (e cioè sia subordinata da un'omografia o da una reciprocità dello spazio), è necessario e sufficiente ch'essa muti le linee proiettive di una superficie nelle linee proiettive dell'altra; si ha solo eccezione alla sufficienza di detta condizione, nel caso in cui ambedue le superficie ammettano un gruppo ∞^2 di collineazioni in sé e posseggano forme normali φ_2 aventi curvatura nulla.

Le superficie generali di quest'ultimo tipo sono le superficie tetraedriche, rappresentabili in coordinate (x) proiettive omogenee mediante un'equazione della forma:

$$(I) \quad x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} x_4^{c_4} = \text{cost.} \quad (\text{con } c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0),$$

§ I. — I BIRAPPORTI SULLE SUPERFICIE NON SVILUPPABILI

DELLO SPAZIO ORDINARIO.

2. Premettiamo alcuni dei risultati del CARTAN (ved. loc. ultimo cit.), relativi alle rigate non sviluppabili dello spazio.

Siano r_{ik} (per $i, k = 1, 2, 3, 4$) coordinate plueckeriane omogenee di complesso lineare; coordinate che, secondo l'uso, designeremo anche genericamente con una sola lettera, r . Denotiamo con $[r, s]$ la quantità

$$[r, s] = r_{12} s_{34} + r_{34} s_{12} + r_{13} s_{42} + r_{42} s_{13} + r_{14} s_{23} + r_{23} s_{14}$$

che, uguagliata a zero, esprime che i due complessi lineari r, s sono in involuzione; talchè, in particolare, la $[r, r] = 0$ significherà che il complesso lineare r è speciale, nel qual caso le r_{ik} potranno venir assunte come coordinate plueckeriane omogenee del suo asse.

Una qualunque rigata R , non sviluppabile, può in infiniti modi venir rappresentata sotto la forma

$$(2) \quad r = r(u) \quad \text{con} \quad [r(u), r(u)] = 0, \quad \left[\frac{dr}{du}, \frac{dr}{du} \right] \neq 0,$$

in corrispondenza alle infinite possibili scelte del parametro u . Si può tuttavia determinare un parametro intrinseco t , avente significato invariante di

fronte alle trasformazioni proiettive di R , per modo che il birapporto — secondo CARTAN — di 4 generatrici arbitrarie di R risulti precisamente uguale al birapporto dei relativi valori di t .

Il suddetto parametro t si ricava da una qualunque rappresentazione (2) della R , nel modo seguente. Si può intanto disporre del fattore di proporzionalità a meno del quale son definite le r_{ik} , sì che dalla (2) segua identicamente:

$$(3) \quad \left[\frac{dr}{du}, \frac{dr}{du} \right] = 1.$$

Si formi quindi l'espressione:

$$(4) \quad f(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 r}{du^2}, \frac{d^2 r}{du^2} \right],$$

e si consideri l'equazione differenziale del terzo ordine:

$$(5) \quad \Lambda(t, u) = f(u),$$

ove

$$(6) \quad \Lambda(t, u) = \frac{\frac{d^3 t}{du^3}}{\frac{dt}{du}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 t}{du^2}}{\frac{dt}{du}} \right)^2$$

sta per indicare lo schwarziano di t rispetto ad u . La (5) definisce allora quel parametro t in funzione di u , a meno di una sostituzione lineare fratta a coefficienti costanti.

OSSERVAZIONE. — Rileviamo qui una proprietà degli schwarziani, che ci sarà ripetutamente utile nel seguito. Se t dipende da u per il tramite di un parametro v , funzione alla sua volta di u , in base alla (6) risulta identicamente:

$$(7) \quad \Lambda(t, u) = \Lambda(t, v) \cdot \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \Lambda(v, u).$$

3. Sfruttiamo ora ciò che precede per calcolare i due birapporti determinati (come si disse nel n. 1) da 4 punti scelti arbitrariamente su di una linea $\mathcal{L}$, assegnata sopra una qualunque superficie S non sviluppabile. Basterà all'uopo ovviamente trovare i due parametri intrinseci t e τ , di cui al n. 2, proiettivamente legati alle rigate R_1 ed R_2 considerate nel n. 1.

Siano:

$$(8) \quad x_i = x_i(u, v) \quad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4)$$

le equazioni parametriche della superficie S , riferita alle asintotiche; ove non si voglia uscire dal campo reale, la rappresentazione (8) esige dunque che S sia a punti iperbolici: in seguito, però, svincoleremo le nostre conclusioni da tale ipotesi (n. 5). Si può, se occorre, scambiare le denominazioni delle linee u, v e disporre convenientemente del fattore di proporzionalità a meno del quale sono definite le (8), per modo che — adottando qui e nel seguito il simbolismo ormai classico in geometria proiettiva differenziale ⁽¹⁾ — risulti:

$$(9) \quad (x, x_u, x_v, x_{uv}) = \frac{1}{2};$$

conseguentemente si ha:

$$(10) \quad \begin{cases} \theta = -\frac{1}{2} \log 2 & , & a_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ F_2 = \sqrt{2} du dv & , & F_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\beta du^3 + \gamma dv^3), \end{cases}$$

e le equazioni fondamentali della S [di cui appunto le (8) forniscono l'integral generale] riduconsi a:

$$(11) \quad x_{uu} = \beta x_v + p_{11} x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + p_{22} x.$$

Ciò posto, supponiamo che la linea Ω si ottenga dalle (8) facendovi

$$(12) \quad v = v(u).$$

Le tangenti asintotiche ad S — relative al sistema $u = \text{cost.}$ — nei singoli punti di Ω , costituiscono la rigata R_1 e possono venir rappresentate analiticamente mediante la (2), ove, tenendo conto della (12), si ponga:

$$r(u) = (x, x_v).$$

Da qui, derivando ed usufruendo della seconda equazione (11), si ricava

$$(13) \quad \frac{dr}{du} = (x_u, x_v) + (x, x_{uv}) + \gamma \frac{dv}{du} (x, x_u),$$

onde, in base alla (9), l'equazione (3) è automaticamente soddisfatta.

Non v'è pertanto più che da determinare l'espressione (4): ciò che si ottiene con un calcolo privo di difficoltà, derivando totalmente (rispetto ad

(1) Ved. G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, to. I-II. (Bologna, Zanichelli, 1926-27); per le formule (10), (11) e (14), cfr. in particolare le pp. 89 e 90.

u) ambo i membri della (13) e poggiando sulle (9), (11). In definitiva, introdotte invece delle p_{11}, p_{22} le note quantità autoduali

$$(14) \quad q_{11} = 2p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v, \quad q_{22} = 2p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u,$$

l'equazione differenziale (5), caratterizzante il parametro intrinseco t , nelle attuali condizioni si scrive:

$$(15) \quad \Lambda(t, u) + \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^4 + 2\beta\gamma \frac{dv}{du} + q_{11} = 0;$$

nella (15) occorre naturalmente esprimere dappertutto v in funzione di u , mediante la (12).

Basta in ciò che precede scambiare u e v , per dedurre l'equazione differenziale

$$(16) \quad \Lambda(\tau, v) + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{du}{dv} \right)^4 + 2\beta\gamma \frac{du}{dv} + q_{22} = 0,$$

caratterizzante il secondo parametro intrinseco τ ; affinchè questo risulti precisamente relativo alla linea $\mathcal{L}$, occorre esprimere nella (16) la u in funzione di v , mediante l'equazione

$$(17) \quad u = u(v)$$

ottenuta invertendo la (12).

Matematica. — *I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste.* Nota II di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare.* Nota di L. LABOCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

1. La durata delle oscillazioni pendolari di piccola ampiezza è data dalla formola, che risale a Huygens ⁽²⁾

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Ma quantunque ovvie ragioni di comodità e convenienza ampiamente giustificano il mantenimento di questa formola, tanto negli usi pratici che nelle ricerche teoriche, non meno evidente è che essa è tutt'altro che soddisfacente, anzitutto perchè ad esprimere le leggi di un fenomeno dinamico essa non fornisce che una semplice relazione cinematica, nella quale, inoltre, la presenza di un'accelerazione, adoperata come misura dell'intensità della gravità, facilmente può indurre gl'inesperti nell'errore di credere che l'intensità della gravità sia una grandezza dipendente dal tempo.

Manca invece nella formola la massa del corpo attraente, che è uno degli elementi determinanti del fenomeno e manca pure qualsiasi grandezza avente un valore proprio, fisicamente definito, cosicchè ne segue che il pendolo, il quale dovrebbe essere lo strumento atto per eccellenza alla determinazione del tempo, non può servire a definire il secondo.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1935.

(2) La prima enunciazione della relazione fra le lunghezze dei pendoli e le durate delle loro oscillazioni è dovuta, come è noto, a Galileo che, nei suoi *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze, attenenti alla Meccanica e i Movimenti Locali*, ci dice che « i tempi delle vibrazioni di Mobili pendenti da fila di differente lunghezza sono ... in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila ». Egli cioè, con lo stabilire la proporzione $T_1 : T_2 = \sqrt{L_1} : \sqrt{L_2}$ afferma la costanza del rapporto $T/\sqrt{L}$.

La determinazione dell'effettivo valore di questo rapporto costante è uno dei più geniali risultati dell'opera di HUYGENS che studiando il moto di un grave lungo un arco di cicloide giunge alla conseguenza (*Horologium oscillatorium*, teor. XXV) che « il tempo occorrente ad ogni oscillazione, piccoli o grandi che siano gli archi di cicloide percorsi, sta al tempo della caduta (verticale) lungo l'asse (della cicloide) nello stesso rapporto della intiera circonferenza al diametro », vale a dire egli afferma che $T : \sqrt{2a/g} = \pi$.

E poichè per durata dell'oscillazione Huygens intende il tempo impiegato dal pendolo a compiere una corsa semplice, semi periodo $T_1 = \frac{1}{2} T$, e la lunghezza del pendolo è proprio il doppio di quella dell'asse della cicloide, $l = 2a$, sostituendo questi valori nella relazione da lui trovata essa diventa la formola (1) della quale ancor oggi ci serviamo.

Un pendolo che oscilla sotto l'azione della gravità deve esser considerato sempre insieme con la massa ponderale alla quale l'attrazione è dovuta e che si potrà supporre consistere di una sfera omogenea, di densità costante, la cui superficie viene sfiorata dalla massa pesante del pendolo nel suo movimento.

Per la definizione di tale sistema occorre la conoscenza: della lunghezza l del pendolo, del raggio R e della massa M o della densità Δ della sfera; in tutto tre variabili, la massa M e la densità Δ essendo legate al raggio dalla relazione

$$(2) \quad R = (3M/4\pi\Delta)^{1/3}.$$

Poichè l'accelerazione g dovuta all'intensità della gravità alla superficie di questa sfera, in funzione del raggio e della massa, del raggio e della densità, o della massa e della densità è

$$(3') \quad g = kM/R^2$$

$$(3'') \quad g = (4/3)\pi k \Delta R$$

$$(3''') \quad g = kM (4\pi\Delta/3M)^{2/3}$$

avendo indicato con k il coefficiente che viene ordinariamente chiamato costante della gravitazione, ne segue che per la durata dell'oscillazione, con le stesse terne di parametri, si ha

$$(4') \quad T = 2\pi \sqrt{lR^2/kM}$$

$$(4'') \quad T = 2\pi \sqrt{3/4\pi k \Delta R}$$

$$(4''') \quad T^6 = 36\pi^4 l^3/k^3 \Delta^2 M.$$

2. Il sistema, al quale le (4'), (4'') e (4''') si riferiscono, geometricamente è definito da tre parametri: 1) il rapporto λ fra la lunghezza l del pendolo ed il raggio R della sfera; 2) il rapporto ρ fra il raggio R della sfera e la distanza media d fra gli atomi elementari di cui essa è formata; 3) il rapporto δ fra la distanza media d degli atomi elementari e il raggio a della sfera atomica⁽¹⁾, gravitazionalmente definita.

I due ultimi rapporti definiscono, implicitamente, anche il numero N di atomi elementari costituenti la sfera e la densità Δ di essa; queste due grandezze essendo legate al raggio della relazione (2).

(1) L. LABOCCETTA, questi «Rendiconti», vol. XX, ser. 6°, 1934, p. 327: *Sulle costanti gravitazionali ecc.*; «La Ricerca Scientifica», anno V, vol. II, n. 9-10, 1935: *Le costanti caratteristiche della sfera atomica.*

Quanto al numero N di atomi contenuti in una sfera di raggio $r = R/a = \rho\delta$, r essendo la misura del raggio in unità atomiche gravitazionali, esso si deduce dalla relazione, che vale asintoticamente,

$$(5) \quad N = (4/3) \pi \rho^3.$$

Ponendo ora, ad esempio nella (4'), λR per l , $a\rho\delta$ per R , per k una delle espressioni del suo valore indicate in una precedente Nota,

$$(6) \quad k = a^3/\mu t^2 = ac^2/\mu = tc^3/\mu$$

nelle quali c è la velocità della luce e μ , a , t sono le unità di massa (massa dell'atomo elementare = $1/16$ O₁₆) di lunghezza e di tempo del sistema di unità atomiche gravitazionali, e per M infine ponendo o semplicemente $N\mu$ oppure, in conformità alla (5), $(4/3) \pi \rho^3 \mu$, si ottiene

$$(7) \quad T = 2\pi t \sqrt{\lambda \rho^3 \delta^3 / N} = 2\pi t \sqrt{3 \lambda \delta^3 / 4\pi}.$$

Tenendo poi presente che T/t non è altro che la durata θ dell'oscillazione espressa in unità atomiche gravitazionali, si ha con esse:

$$(8) \quad T/t = \theta = 2\pi \sqrt{\lambda \rho^3 \delta^3 / N} = 2\pi \sqrt{3 \lambda \delta^3 / 4\pi}.$$

Si è così ottenuta per la durata θ una espressione che conserva inalterato il suo valore quali che siano le unità di misura adoperate per ottenere i rapporti che in essa appariscono, cosicchè *si ha il valore di un tempo completamente determinato dalle proprietà geometriche del sistema che serve a definirlo.*

Come è già stato segnalato da Maxwell⁽¹⁾, se si considera una sfera omogenea, di densità costante Δ , si trova che il tempo periodico T di un satellite infinitamente piccolo muoventesi lungo un cerchio massimo a contatto della sua superficie è indipendente dal raggio di essa. Per il tempo T così definito è stato da me proposto il nome di *tempo proprio* della densità Δ ⁽²⁾, ed il suo valore è

$$(9) \quad T = \sqrt{3} \pi / k \Delta.$$

Ma questa è l'espressione alla quale si giunge pure facendo, nella (4'), $l = R$; ne segue quindi la proprietà, già nota, che il tempo proprio di una sfera data, di densità costante, è lo stesso della durata di oscillazione del pendolo avente una lunghezza uguale a quella del suo raggio.

(1) Ved. p. 288, vol. I, di W. THOMPSON e P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge, 1879. New Edition.

(2) L. LABOCCETTA, loc. cit.

Per mettere meglio in evidenza la relazione fra la durata dell'oscillazione pendolare e quella del tempo proprio della sfera, a contatto della cui superficie il pendolo oscilla, si scrivano le (8) nel modo seguente

$$(10) \quad \theta = \sqrt{\lambda} \{ 2\pi \sqrt{\rho^3 \delta^3 / N} \} = \sqrt{\lambda} \{ \sqrt[3]{3\pi \delta^3} \}.$$

Il fattore fra parentesi non è altro che il tempo proprio della sfera e quindi si può dire che « la durata dell'oscillazione pendolare è data dal prodotto del tempo proprio della sfera, alla superficie della quale il pendolo oscilla, per la radice quadrata del rapporto fra la lunghezza del pendolo e quella del raggio della sfera ».

Questa durata coincide con il tempo proprio quando $\lambda = 1$ e la (10) diventa

$$(11) \quad \theta = 2\pi \sqrt{\rho^3 \delta^3 / N} = \sqrt[3]{3\pi \delta^3}.$$

3. *Le varie specie di similitudine meccanica.* — Al variare del raggio della sfera, rimanendo λ costante, variano le dimensioni del sistema che si conserva geometricamente simile a se stesso, e si hanno dei sistemi meccanicamente simili, al cui studio può quindi servire l'espressione ora trovata della durata dell'oscillazione pendolare, la quale permette di definire in modo semplice le caratteristiche dei diversi tipi di similitudine in dipendenza della variazione dei tre parametri δ , ρ , N , cioè della densità, del raggio e della massa della sfera.

Scegliendo il raggio della sfera come variabile indipendente, ed assunta la densità come elemento determinante, si considerino quelle particolari similitudini che corrispondono a valori della densità proporzionali a potenze successivamente decrescenti del raggio (da R^0 a R^{-3}). Si ottengono così i risultati compendati nel quadro seguente che indica in qual modo nei quattro tipi di similitudine considerati variano insieme con la densità Δ , la massa M , l'intensità I della gravità alla superficie della sfera e il tempo proprio T :

	Δ	M	I	T	
(A)	I. R^0	R^3	R^1	R^0	(Legge di Maxwell)
	II. R^{-1}	R^2	R^0	$R^{1/2}$	(Legge di Galileo)
	III. R^{-2}	R^1	R^{-1}	R^1	(Sfere normali)
	IV. R^{-3}	R^0	R^{-2}	$R^{3/2}$	(Legge di Keplero)

La legge di formazione dei successivi termini di questa serie è evidente poichè si passa da una riga alla sottostante diminuendo di una unità l'esponente di R nelle prime tre colonne e aumentandolo invece di $1/2$ nell'ul-

tima e il quadro potrebbe perciò essere ulteriormente esteso tanto superiormente quanto inferiormente ⁽¹⁾.

Dei tre tipi I, II, IV avevo già preso in esame le proprietà in un precedente mio scritto sulla similitudine meccanica ⁽²⁾. Il tipo III, corrispondente al caso delle « *sfere normali* », come definite nella recente mia Nota sulle costanti gravitazionali, è venuto così a colmare la lacuna esistente nella successione regolare degli altri tipi già noti.

Ad ognuno dei detti tipi corrisponde, al variare di R , un particolare modo di variazione della configurazione del sistema materiale considerato al quale è associata qualche importante proprietà.

Pel tipo I, nel quale è costante la densità Δ , è caratteristica la costanza del tempo periodico indipendentemente dalle dimensioni della sfera, il che conduce alla definizione assoluta del tempo secondo Maxwell data dalla (9).

Pel tipo II, nel quale è costante l'intensità della gravità alla superficie della sfera, son verificate le condizioni della « *similitudine incompleta* » nelle quali operava Galileo e si trova quindi la legge, da lui determinata nel caso particolare dei pendoli, che in sistemi simili i quadrati dei tempi sono proporzionali alle dimensioni lineari del sistema.

Pel tipo III, la densità essendo in ragione inversa del quadrato del raggio ha lo stesso valore della curvatura della sfera, proprietà questa caratteristica delle sfere normali, nelle quali variando nella stessa proporzione lunghezze, tempi e masse, ogni grandezza ha per dimensione una espressione della forma N^{m+l+t} essendo m, l, t gli esponenti di M, L, T nelle equazioni di dimensioni ordinarie.

Pel tipo IV, nel quale è costante la massa, l'intensità della gravità alla superficie della sfera è in ragione inversa del quadrato del raggio (legge di Newton) e i quadrati dei tempi periodici sono proporzionali ai cubi dei raggi (legge di Keplero).

Se poi si osserva che, restando costante la massa, dire che *i quadrati dei tempi sono proporzionali ai cubi dei raggi* equivale a dire che essi sono in ragione inversa della densità, mentre, come si rileva dall'esame del quadro (A) in tutti i quattro tipi è verificata appunto la condizione che *i quadrati dei tempi periodici sono in ragione inversa delle densità delle sfere attraenti*, si è condotti a concludere che, sotto questa forma dinamica, la terza legge di Keplero a tutti è comune e tutti regola allo stesso modo i quattro tipi di similitudine costituendo la espressione di una delle più generali e fondamentali relazioni fra le grandezze caratteristiche dello spazio fisico.

(1) Prolungando il quadro inferiormente si trova che la riga V fornisce un tipo corrispondente alla Legge di Moseley (Osservazione aggiunta durante la correzione delle bozze).

(2) L. LABOCCETTA, *La similitudine meccanica di Galileo e la relatività dello spazio*, « L' Elettrotecnica », 5-15-25 agosto 1932.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Su un fenomeno di gelificazione presentato dai sangui ad emazie nucleate e da alcuni sangui umani patologici*⁽¹⁾. Nota di E. BIOCICA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Durante alcune ricerche sulla metemoglobina, incidentalmente, avendo avuto occasione di adoperare sangue di colombo defibrinato ed emolizzato con saponina, nell'aggiungere al medesimo ferricianuro di K al 5%, assistemmo all'istantanea trasformazione del sangue laccato in un blocco gelatiniforme, aderente alle pareti del recipiente.

Mai nulla si era verificato prima con sangue di uomo o di mammiferi sottoposti allo stesso trattamento.

Provando ad aggiungere il ferricianuro al medesimo sangue di colombo non emolizzato con saponina, esso rimase perfettamente fluido. Tenemmo, circa quindici giorni, in una provetta, questa miscela fluida; ma appena poi aggiungemmo una traccia di saponina in polvere, assistemmo allo stesso fenomeno di gelificazione descritto.

Per accertare, se la saponina vi avesse parte solo per la sua azione emolitica, ovvero anche per altre eventuali proprietà specifiche, la sostituiamo con altri emolitici, quali il cloroformio e l'etere: il fenomeno si verificava ugualmente.

Constatammo ancora, che la gelificazione veniva determinata, oltre che dal ferricianuro, anche da altri sali neutri [NaCl, $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, KMnO_4 ecc.]. Si ottenne pure con una soluzione diluita di NaOH, sebbene in questo caso il fenomeno si presentasse fugace, perchè poco dopo si assisteva al ritorno del sangue allo stato fluido. Usando NH_3 si osservava, sebbene in grado più limitato, lo stesso comportamento che per la NaOH.

Gli acidi e i sali acidi, al contrario, in pari condizioni, non dimostrano alcuna azione simile.

Una soluzione diluita di acido acetico ostacolava la gelificazione; ovvero determinava il ritorno allo stato fluido, se aggiunta a sangue, in cui la gelificazione era stata prima ottenuta altrimenti.

La considerazione che il fenomeno si provocava dopo l'emolisi, ci ha persuaso che la causa doveva risiedere nell'interno del corpuscolo rosso e non nel siero, che del resto da solo non lo presenta. Dato inoltre che il fenomeno stesso si era sempre ottenuto pel sangue di colombo a emazie

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1935.

nucleate, e mai per quello umano normale, o per quello di mammiferi in genere, a emazie non nucleate, la nostra attenzione è stata attratta appunto dall'importanza che fosse potuta spettare a costituenti nucleari.

Abbiamo studiato sangui di altri uccelli e osservato costantemente, usando il procedimento descritto, l'immediata gelificazione.

Estendendo le nostre osservazioni ad altri sangui nucleati, cioè di anfi- bi, di rettili e di pesci, il risultato è stato parimenti sempre positivo. Inoltre abbiamo constatato pure, che la gelificazione avveniva evidente dopo aver diluito molto il sangue, con acqua distillata (per esempio persino a dilu- zioni di 1 : 20 — 1 : 50).

Lasciando essiccare all'aria a temperatura ambiente i vari sangui, e quindi, anche dopo alcuni mesi, sciogliendo dei frammenti solidi o delle scaglie di essi in una soluzione di un sale neutro, senza aggiunta di emolitici, abbiamo potuto ottenere ugualmente il noto fenomeno, in tutti i casi, in cui si trattava di sangui a emazie nucleate, mentre è mancato sempre per quelli di mam- miferi. Ma è mancato pure per i sangui a emazie nucleate, tutte le volte che i frammenti secchi si sono stemperati in acqua, e la soluzione è stata lasciata in riposo lì per parecchi giorni, soltanto dopo utilizzandola pel saggio e aggiungendo il sale neutro.

Per ciò che concerne la spiegazione dei fatti descritti, essendo stata la nostra attenzione richiamata — come si è detto — dai costituenti nucleari, era ovvio fra questi considerare in prima linea i nucleo-proteidi; e infatti ci sono appunto venute in aiuto nozioni già acquisite, nei riguardi di talune accertate proprietà del componente caratteristico (gruppo prostetico) dei nucleo-proteidi, cioè, più esattamente degli acidi nucleinici, e meglio ancora dei nucleinati.

Da quando infatti nel 1889 l'Altmann riuscì ad ottenere, dalla nucleina di Miescher, il corrispondente acido nucleinico, cominciarono gli studi sul comportamento chimico e chimico-fisico di tale corpo nonchè di altri affini⁽¹⁾.

Le principali proprietà degli acidi nucleinici sono ormai troppo note, per cui ci dispensiamo dal ricordarle. Quello che già i primi studiosi osser- varono, e per il nostro lavoro assume un'importanza fondamentale, è la capacità, che hanno i sali di acidi nucleinici, particolarmente quelli dell'acido timonucleinico, di dare soluzioni viscosi e *gel* semisolidi.

Basta infatti, come viene riferito in tutti i testi, sciogliere nucleinato di Na in polvere, ad una concentrazione del 5 %, in H₂O calda, dove è più facilmente solubile, per osservare la trasformazione del liquido, al raffreddamento, in una massa gelatinosa opalescente.

Questa proprietà si ascrive precisamente ai sali degli acidi nucleinici di origine animale (da timo, pancreas, milza ecc.), mentre mancherebbe per quelli di origine vegetale (da lievito ecc.).

(1) P. A. LEVENE and LAWRENCE W. BASS, *Nucleic acids*. « American Chemical Society ». Monograph. Series 1931.

Kossel e Neumann⁽¹⁾ descrissero due forme di acido nucleinico (di origine animale), una forma α e una forma β : questa seconda avrebbe appunto perduto, rispetto alla prima, la proprietà di dare *gel*; e praticamente basterebbe bollire per circa due ore, in soluzione alcalina la forma α , per assistere al suo passaggio nella forma β . Sorsero discussioni circa le cause di questa trasformazione, e furono emessi pareri diversi.

Comunque alla capacità dell'acido nucleinico di presentare questi fenomeni di tipo colloidale fu dato un grande valore, specialmente per ciò che riguarda i rapporti tra nucleo e protoplasma, la solidità dei cromosomi, la plasticità della cellula stessa, la regolazione del bilancio dell'acqua, e così via.

Questa medesima proprietà ci sembra che permetta di rendersi conto anche del fenomeno da noi osservato e descritto. Basta infatti ammettere, che, avvenuta la rottura emolitica delle cellule nucleate, e verificatasi per conseguenza la dissoluzione dei nucleoproteidi nucleari nel liquido ambiente, resti assicurata dalle condizioni, da noi sopra fissate, la possibilità, che si formino nucleinati atti a gelificare.

Ci pare inoltre, che tale ipotesi bene si possa accordare colle principali nostre osservazioni, concedendo di spiegare in modo soddisfacente sia i motivi, per cui talune condizioni adottate (aggiunta di sali neutri, di NaOH ecc., oltre l'agente emolitico) si sono dimostrate favorevoli, e sia quelli, per cui altre condizioni (aggiunta di acidi, di sali acidi ecc.) si sono invece dimostrate sfavorevoli.

È noto, che una soluzione diluita di acido acetico ostacola la gelificazione dei sali dell'acido nucleinico, e, se essa è avvenuta, ne determina il ritorno allo stato liquido: ebbene, esattamente questo è risultato nei nostri esperimenti.

Il fatto, che il fenomeno manca per sangui a emazie nucleate, disseccati, ripresi con acqua, e quindi esplorati, pel noto fenomeno, dopo alcuni giorni dall'allestimento, si può spiegare con modificazioni o alterazioni dell'acido nucleinico (da azioni enzimatiche, intervento di germi ecc.).

Tenendo presenti le osservazioni riferite e le ipotesi avanzate per spiegarle, ci è sembrato opportuno estendere le ricerche ancora a tutti quei casi, in cui il sangue umano può offrire a considerare la presenza — fisiologica o patologica — di eritrociti nucleati, nonchè marcato aumento — fisiologico o patologico — degli stessi leucociti.

Pertanto abbiamo stabilito di rivolgere soprattutto l'attenzione:

- a) al sangue fetale;
- b) al sangue di malati di anemia perniziosa;
- c) al sangue in condizioni di leucocitosi (fisiologica o patologica);
- d) al sangue di malati di leucemia (sia mieloide che linfoide).

(1) KOSSEL E NEUMANN, cit. da P. A. LEVENE and LAWRENCE, W. BASS, *Nucleic acids*. « American Chemical Society », Monograph. Series 1931.

Ci siamo inoltre proposto di aggiungere osservazioni su soggetti umani nelle più svariate altre condizioni morbose, e insieme anche di estendere il più possibile quelle su soggetti normali.

Ci è finora mancato il modo di svolgere integralmente questo nostro piano di ricerche; ma, in attesa di poter comunicare a suo tempo i risultati completi, ci sembra utile qui riferirne alcuni, che già possediamo e che ci sembra opportuno segnalare senz'altro.

Si tratta dei seguenti:

I. Il sangue del neonato (dal cordone ombelicale), che, come è noto, è ricco di forme cellulari nucleate della serie rossa, nonchè di forme bianche non completamente mature, ci ha permesso di osservare (tre volte su tre volte) il noto fenomeno di gelificazione.

II. In casi di leucocitosi non lo abbiamo finora mai osservato, neppure quando i leucociti toccavano il numero di circa 20000 per mmc.

III. Al contrario, in n. 3 di casi di leucemia mieloide, e in n. 4 di casi di leucemia linfoide, il fenomeno di gelificazione si è costantemente ottenuto pronto e completo, come per gli stessi sangui di uccelli rettili, anfibi e pesci, e anche quando il numero delle forme bianche immature, per mmc., era — o si portava, con opportuna diluizione — al disotto della cifra dei leucociti nei casi più tipici di leucocitosi ⁽¹⁾.

IV. Per tutti i sangui umani finora esplorati in altre svariate condizioni morbose, come per tutti i numerosi sangui di soggetti normali, si è sempre ottenuto risultato negativo.

Da queste osservazioni preliminari crediamo di poter dedurre, che il fenomeno di gelificazione possa essere giustificato, nel caso del sangue umano, non solo dalla presenza in esso di forme cellulari nucleate della serie rossa, ma anche dalla natura delle forme cellulari della serie bianca. E, se ciò è esatto, conviene anche pensare che almeno le forme bianche immature, caratteristicamente presenti nei casi di leucemia, possono in qualche modo risentire l'azione degli agenti emolizzanti o comunque ledenti la struttura cellulare, così da potersi anche da esse — come dagli eritrociti nucleati — liberare e dissolvere nel liquido circostante il componente nucleare, responsabile del fenomeno descritto.

L'agente emolitico o comunque lesivo delle cellule è sempre indispensabile per ottenere il fenomeno chiaro e immediato.

Il comportamento delle cellule immature dalla serie bianca di fronte agli emolitici, merita pertanto di essere per se solo separatamente indagato, confrontandolo con quello delle corrispondenti forme mature; e noi stessi ci proponiamo di prenderlo in particolare considerazione.

(1) Il sangue di neonati ci è stato gentilmente fornito dalla Clinica Ostetrico-Ginecologica della R. Università di Roma; quello dei soggetti con leucocitosi, o con leucemia, dall'Istituto di Patologia medica della R. Università, e dai Padiglioni degli Ospedali riuniti di Roma, diretti dai proff. Alessandrini, Antonelli e Sforza.

Ci ripromettiamo di ritornare a suo tempo sul complesso dei fatti e dei rilievi, che qui ora abbiamo sommariamente esposto in forma preliminare; ma lo faremo, quando potremo disporre di una più ampia e completa messe di osservazioni; e soltanto allora discuteremo l'effettivo valore che già sembra possa spettare in pratica — dal punto di vista diagnostico e forse anche prognostico — al fenomeno di gelificazione offerto dai sangui leucemici.

Intanto, concludendo, ci sembra di poter affermare:

I. Che tutti i sangui ad eritrociti nucleati (di uccelli, rettili, anfibi e pesci), trattati con un agente emolitico, presentano, per successiva opportuna aggiunta di sali neutri, un evidente immediato fenomeno di gelificazione, che continua ad essere apprezzabile anche dopo diluizione del sangue con acqua distillata fino alla proporzione di 1:20, o anche di 1:50.

II. Che l'essiccamento all'aria non fa perdere agli stessi sangui la capacità di presentare ancora il fenomeno: questo infatti continua a potersi bene apprezzare, dissolvendo convenientemente in soluzioni saline neutre, scaglie o frammenti secchi pur da parecchi mesi.

III. Che al sangue dei mammiferi e dell'uomo adulto normale manca affatto la proprietà suddetta; così da potersi escludere, che si tratti di sangue di uomo adulto e sano, tutte le volte che risulti positiva — per sangue fresco o secco — la descritta prova di gelificazione, opportunamente eseguita.

IV. Che esistono tuttavia condizioni eccezionali, fisiologiche e patologiche, in cui anche il sangue umano presenta evidente il fenomeno: questo infatti è risultato positivo finora pel sangue di neonato (dal cordone ombelicale), e netto anche pel sangue di malati di leucemia (mieloide e linfoide).

V. Che, per la spiegazione del fenomeno, sembra giustificato invocare l'intervento di componenti nucleari, e precisamente di nucleoproteidi, che nelle condizioni sperimentali risultate favorevoli, possono passare dalle cellule nucleate del sangue (lese dall'agente emolitico, per disseccamento ecc.) nel liquido ambiente, e quindi dare luogo (in presenza di sali neutri) a nucleinati, notoriamente atti a presentare il fenomeno di gelificazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando il XVIII volume delle « Opere complete di C. Huygens »; il secondo volume del « Trattato di Anatomia sistematica » di A. Pensa e G. Favaro, i quattro volumi pubblicati dalla Società Edison nel cinquantenario della sua fondazione (1884-1934).

Il Corrispondente BORDONI mette in rilievo l'importanza della pubblicazione della Società Edison che per le notizie e le statistiche che contiene può costituire la base di altre monografie.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci CROCCO e SEVERI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 maggio 1935

CESÀRO GIUSEPPE. — Equation et forme et la courbe pour la quelle si δ est la longueur de la perpendiculaire menée de l'origine α' une de ses tangentes et α l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axis des x , on a

$$(1) \quad \delta = h \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

h étant une constante. (Extr. des « Bulletin de l'Académie royale de Belgique. Classe des Sciences ». Serie V, to. XXI, pp. 7-28). Bruxelles, 1935. 8°.

CESÀRO GIUSEPPE. — Quelques remarques sur les lignes hyperboliques. (Extr. des « Bulletin de l'Académie royale de Belgique. Classe des Sciences ». Serie V, to. XXI, pp. 253-273). Bruxelles, 1935. 8°.

DULAC M. — Curvas definidas por una ecuación diferencial de primer orden y de primer grado. Lecciones profesadas durante el curso de 1931-32. Madrid, 1933. 8°, pp. 1-180.

FANTOLI GAUDENZIO. — Per l'inaugurazione dell'anno Accademico 1934-35 del R. Istituto Superiore di Ingegneria di Milano (R. Politecnico) in unione agli altri Atenei milanesi. Relazione. Milano, 1935. 8°.

FRIEDBERG WILHELM. — Mięczaki Mióceńskie ziem Polskich. Cześć II^o Małże. Kraków, 1934. 8°, pp. 1-158.

HUYGENS CHRISTIAAN. — Oeuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome XVIII. La Haye, 1934. 4°, pp. 1-702.

R. Istituto Superiore Agrario di Pisa. — Nel decennale della fondazione dei Laboratori di Patologia e Batteriologia del R. Istituto. Pisa, 1934. 8°, pp. 1-39.

IVALDI GAETANO. — La scienza relativa all'esperienza. I principi della meccanica comè veri in senso relativo all'esperienza, invece che assoluto (Estr. dalla Rivista, « L'Industria ». Vol. XLVIII, N. 3-12-

1934, Vol. XLIX, N. 1-1935). Genova, 1935. 4°.

LE ROUX I. — Principes et méthodes de la mécanique invariante. Paris, éditeur Gauthier Villars, 1934. 8°, pp. I-VI, 1-112.

PENSA ANTONIO e FAVARO GIUSEPPE. — Trattato di Anatomia sistematica. Vol. II. Torino, Unione Tipografica Editrice Torinese, 1935. 8°, pp. 1-606.

PROCOPIU ST. — Détermination des éléments magnétiques en Roumanie et Cartes magnétiques de la Roumanie dressées pour le 1^{er} Juillet 1934. (Estr. des « Annales scientifiques de l'Université de Jassy ». Tome XXI, fasc. 1-4, pp. 270-302). Jassy, 1935. 8°.

SERRA AURELIO. — Cristallografia chimica. Osservazioni della cristallizzazione dell'anidride arseniosa. (Estr. da « Studi Sassaresi ». Vol. XIII), Sassari, 1935. 8°, pp. 1-16.

SILVESTRI FILIPPO. — Le cocciniglie degli agrumi in Italia. (Estr. dagli « Atti del I Congresso agrumario tenuto in Palermo il 27-28 marzo 1933 »). Roma, 1935. 8°, pp. 1-13.

SIMONS ERICH. — Die Krebs-Geschwulst. Eine Ausfallerscheinung im Organismus. Luxemburg, 1934. 8°, pp. 1-206.

Società Edison. — Nel cinquantenario della Società Edison, 1884-1934. Milano, 1934. 4°, pp. I-XV, 1-510; 1-485; 1-632; 1-270.

STERNE T. E. — The accuracy of least squares solutions. Parte II. The standard deviations of the errors of linear equations of conditions. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XX, n. 12, pp. 601-603). s. l., 1934. 8°.

STERNE T. E. The significance of right ascension errors in trigonometric parallaxes. (Reprinted for private circulation from the « Astrophysical Journal ». Vol. 81, pp. 45-65), s. l., 1935. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 maggio 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — Sulla possibilità di nuovi indirizzi della teoria della refrazione astronomica e di occasionali contributi alla fisica dell'atmosfera. Nota II ⁽¹⁾ del Corrisp. V. NOBILE.

Riprendendo il calcolo dei coefficienti dello sviluppo (7) della R , troviamo che per A_0 si ha

$$\frac{\partial A_0}{\partial \sigma} = (1 - \sigma) \varphi'(\sigma) \quad , \quad \left(\frac{\partial A_0}{\partial \sigma} \right)_0 = \varphi'_0 ,$$
$$\left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial \sigma^2} \right)_0 = \varphi''_0 - \varphi'_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^3 A_0}{\partial \sigma^3} \right)_0 = \varphi'''_0 - 2 \varphi''_0 .$$

In quanto ad A_1

$$\frac{\partial A_1}{\partial \sigma} = t(1 - \sigma) \varphi'(\sigma) \quad , \quad \left(\frac{\partial A_1}{\partial \sigma} \right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial \sigma^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma} \right)_0 \varphi'_0 ,$$
$$\left(\frac{\partial^3 A_1}{\partial \sigma^3} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2} \right)_0 \varphi'_0 + 2 \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma} \right)_0 (\varphi''_0 - \varphi'_0) .$$

Il terzo coefficiente A_2 è $\frac{3}{2} I_2$ e per I_2 si ha

$$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma} = t^2 (1 - \sigma) \varphi'(\sigma) ,$$

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1935.

quindi

$$\left(\frac{\partial I_2}{\partial \sigma}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 I_2}{\partial \sigma^2}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^3 I_2}{\partial \sigma^3}\right)_0 = 2 \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma}\right)_0 \varphi'_0 .$$

E siccome dalla espressione di t , data da

$$2 t(\sigma) = 1 - (1 - \sigma)^2 [\varphi(\sigma)]^2$$

si deduce, poichè $\varphi_0 = 1$,

$$t_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma}\right)_0 = 1 - \varphi'_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2}\right)_0 = 4 \varphi'_0 - 1 - \varphi_0'' - \varphi_0'' ,$$

avremo infine

$$(11) \quad \begin{cases} A_0 = \varphi'_0 \sigma + (\varphi_0'' - \varphi'_0) \frac{\sigma^2}{2} + (\varphi_0''' - 2 \varphi_0'') \frac{\sigma^3}{6} + \dots \\ A_1 = \varphi'_0 (1 - \varphi'_0) \frac{\sigma^2}{2} + (6 \varphi_0'^2 - 3 \varphi'_0 \varphi_0'' - \varphi_0'^3 - 3 \varphi'_0 + 2 \varphi_0'') \frac{\sigma^3}{6} + \dots \\ A_2 = \varphi'_0 (1 - \varphi'_0)^2 \frac{\sigma^3}{2} + \dots \end{cases}$$

Ora la divisione della serie A_2 per quella di A_1 dà luogo ad una terza il cui termine principale è

$$\sigma(1 - \varphi'_0)$$

e questo potrà assumersi, con approssimazione certo sufficiente, come il vero valore del rapporto A_2/A_1 . In modo analogo troviamo come valore approssimato del rapporto A_1/A_2 $\frac{1}{2} \varphi'_0 \sigma$ e potremo pertanto dalle due equazioni

$$(12) \quad \frac{A_2}{A_1} = \sigma(1 - \varphi'_0) \quad , \quad \frac{2 A_1^2}{A_2} = \sigma \varphi'_0$$

dedurre per φ'_0 e σ i valori

$$(13) \quad \varphi'_0 = \frac{2 A_1^3}{2 A_1^3 + A_2^2} \quad , \quad \sigma = \frac{2 A_1^3 + A_2^2}{A_1 A_2} .$$

La espressione del primo coefficiente A_0 ci permette quindi di assegnare immediatamente, collo stesso grado di approssimazione, anche il valore di φ_0''

$$\varphi_0'' = \varphi'_0 + \frac{2 (A_0 - \varphi'_0 \sigma)}{\sigma^2}$$

ed abbiamo dopo di ciò per la funzione incognita l'espressione numerica

$$(14) \quad \varphi(x) = \frac{\mu_0}{\mu} = 1 + \varphi'_0 \cdot x + \frac{1}{2} \varphi''_0 \cdot x^2,$$

il cui grado di approssimazione può, secondo ogni probabilità, bastare al conseguimento dello scopo qui in vista, dato che le variazioni della funzione considerata sono molto esigue. Il rapporto dell'altezza totale dell'atmosfera al raggio terrestre (naturalmente di quella parte dell'atmosfera che influisce in maniera sensibile sul fenomeno della refrazione) è quindi data immediatamente, noto σ , dalla seconda delle (4).

Il problema della determinazione di $\varphi(x)$ e di h è quindi virtualmente risoluto: dico virtualmente perchè non può escludersi che si giudichi in seguito opportuno di spingere l'analisi più a fondo di quanto io abbia creduto di fare in questa Nota preliminare, coll'aggiungere anche un termine in x^3 allo sviluppo (14) della $\varphi(x)$, ciò che richiede che si deduca dalle (11) e dalla successiva, che dà l'espressione di A_3 , anche la φ'''_0 , con un procedimento analogo a quello qui seguito ma inevitabilmente più laborioso. Appare però dubbia l'opportunità di fare questo passo ulteriore prima di avere applicato praticamente il procedimento più semplice qui indicato alla determinazione numerica effettiva di σ e $\varphi(x)$ in base ad una serie di osservazioni eseguite *ad hoc*: ciò principalmente per la considerazione che una più precisa determinazione della $\varphi(x)$ tornerebbe probabilmente illusoria, in quanto che la modifica corrispondente alla introduzione del terzo termine è di un ordine di grandezza forse minore di quello delle variazioni che la stessa $\varphi(x)$ subisce per l'inevitabile se pur lieve cambiamento delle condizioni meteorologiche durante il periodo in cui vengono eseguite le osservazioni.

È da notare però che un controllo globale importantissimo di tutte le operazioni nonché dei criteri che ci hanno guidato nello stabilire le relazioni approssimate (13) è a nostra disposizione. Basta notare che il secondo membro della (14) deve ridursi a μ_0 per $x = \sigma$, perchè al limite superiore dell'atmosfera $\mu = 1$. Fra i valori trovati di φ'_0 , φ''_0 e σ dovrà dunque sussistere la relazione

$$(15) \quad \varphi'_0 \cdot \sigma + \frac{1}{2} \varphi''_0 \cdot \sigma^2 = \mu_0 - 1 = 2927 \times 10^{-7}$$

la quale porta ad una effettiva verifica, perchè la determinazione sperimentale di μ_0 è stata fatta più volte, con mezzi fisici, in modo diretto e con risultati concordanti entro limiti ristrettissimi ⁽¹⁾.

(1) La prima determinazione che abbia vero valore scientifico è quella di BIOT e ARAGO (1805), fatta col prisma di BORDA. Il valore trovato per μ_0 è 1.000294 e lo stesso valore ha trovato il DULONG (1826); ambedue relativi alla temperatura di 0° e alla altezza barometrica di 76 cm. Il valore concluso dal MASCART è 1.0002927 ed è quello che figura qui nella (15).

La relazione (14) così trovata permette, insieme alla (2) e alla (3), di *definire completamente lo stato fisico dell'atmosfera* relativo all'epoca in cui sono state eseguite le osservazioni, naturalmente con qualche riserva sui limiti di validità delle ultime e sulle ipotesi semplificatrici assunte. Ma poichè, ad ogni modo, è facile immaginare che il problema di studiare le variazioni della $\varphi(x)$ in corrispondenza a variazioni dei dati meteorologici non può opporre grandi difficoltà, si può confidare che, dopo la raccolta di un abbondante materiale di studio da osservazioni fatte in condizioni varie di clima e di stagione, si perverrà a costruire una teoria della refrazione astronomica più semplice e più rigorosa delle attuali.

Concludo questa breve esposizione col porre in rilievo le norme che penso debbano essere rigorosamente seguite per raccogliere il materiale di osservazione destinato ad un primo saggio di applicazione del metodo qui proposto, con cui il complesso problema, che è altrettanto importante per l'astronomia quanto per la geofisica, posto in tutta la sua ampiezza è affrontato nel modo più diretto:

1°) Avvalersi di sole osservazioni di distanze zenitali *meridiane*, fatte in osservatori dotati di impianti moderni e ineccepibili;

2°) Scegliere stelle le cui declinazioni siano fra le più sicure che offrano i cataloghi moderni, con distanze zenitali regolarmente distribuite fra 0° e 75° a Nord e a Sud ed eseguire le osservazioni in ore inoltrate della notte;

3°) Scegliere per le misure un'epoca dell'anno in cui si possa contare sopra un buon numero di sere in condizioni meteorologiche ottime e *quasi identiche* da una sera all'altra, in modo da potersi riferire i risultati ad uno stato fisico ben definito dell'atmosfera e realizzare quanto meglio sia possibile quelle condizioni di equilibrio meccanico che si è costretti, per la trattazione matematica del problema, a postulare.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo monodromo sopra una superficie.*

Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. LORIA.

1. In una Nota pubblicata in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ abbiamo considerato una superficie σ chiusa, di rotazione, che intersechi ad angolo retto l'asse di simmetria, ed una linea chiusa T tracciata su σ , incontrata in un punto almeno da ciascuna linea meridiana. Chiamando K la curvatura gaussiana in un generico punto di σ , σ_1 e σ_2 le due parti in cui σ è divisa da T , e $\theta_1 - \theta_0$ l'angolo di parallelismo nel senso di Levi-Civita computato in un determinato verso lungo T , abbiamo ottenuto le relazioni:

$$(1) \quad \int_{\sigma_1} K d\sigma = 2\pi + \theta_1 - \theta_0, \quad \int_{\sigma_2} K d\sigma = 2\pi - (\theta_1 - \theta_0).$$

Mostreremo ora che se invece la superficie σ non incontra l'asse ad angolo retto, nelle relazioni precedenti si deve sostituire 2π con $2\pi \sin \alpha_i$, essendo α_i l'inclinazione sull'asse delle linee meridiane (compresa tra zero e π), nel punto d'incontro di σ_i con l'asse stesso (per $i = 1, 2$). Indicheremo inoltre l'immediata estensione delle relazioni (1) al caso di una superficie chiusa generica σ , tale che i suoi punti possano esser posti in corrispondenza biunivoca coi punti di una sfera unitaria σ' , per modo che la normale esterna a σ' in ogni punto P' risulti parallela alla normale esterna a σ nel punto corrispondente P , e ne abbia lo stesso verso.

2. Per giustificare la prima asserzione basta ricordare che, conservando le notazioni impiegate nella Nota citata, si ha (n. 4):

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{d\sqrt{G}}{dx_1} = -\sin \omega,$$

dove ω è l'angolo che il versore $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ deve descrivere rotando nel senso antiorario attorno a $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ per diventare parallelo all'asse a , e concorde col verso positivo di a . Per conseguenza nella formula (10) si dovrà sostituire

(1) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(2) F. SBRANA, *Parallelismo monodromo sopra una superficie di rotazione*. Questi « Rendiconti », vol. XX, ser. 6^a, 2^o sem., fasc. 10, pp. 367-373, 1934.

a_r (che è il valore assunto da $\frac{d\sqrt{G}}{dx_r}$ nel punto d'incontro di σ_r con l'asse) con $\sin \alpha_r$. Risulta così dalle (9), (10):

$$\int_{\sigma_1} K d\sigma = 2\pi \sin \alpha_r + \theta_r - \theta_0;$$

ed una formula analoga sussiste naturalmente per σ_2 .

3. Passando ora alla seconda questione, consideriamo una linea chiusa T tracciata sulla generica superficie σ , e la sua immagine T' che divida la sfera σ' nelle due parti σ'_1, σ'_2 . È ovvio che se u è un versore che viene trasportato per parallelismo secondo Levi-Civita lungo T , e P il suo punto di applicazione, il versore u' applicato in P' , parallelo ad u nel senso ordinario, si trasporta parallelamente nel senso di Levi-Civita lungo T' ; infatti la derivata di u' rispetto all'arco s' (contato positivamente in un determinato verso lungo la stessa curva T' a partire da un'origine prefissata) differisce solo per un fattore scalare dalla derivata di u rispetto al corrispondente arco s (la quale è normale a σ , e perciò anche a σ'). Risulta così che l'angolo di parallelismo $\theta'_1 - \theta'_0$ lungo T' è uguale all'analogo angolo $\theta_1 - \theta_0$ relativo a T . Ciò posto ricordiamo che se K è la curvatura gaussiana di σ in un suo generico punto, si ha la relazione: $K d\sigma = d\sigma'$. Per conseguenza si trova

$$\int_{\sigma_1} K d\sigma = \int_{\sigma'_1} d\sigma' \quad ; \quad \int_{\sigma_2} K d\sigma = \int_{\sigma'_2} d\sigma';$$

d'altra parte, considerando la sfera come una superficie di rotazione attorno ad un diametro che incontri σ'_1 e σ'_2 (sul quale sia stato fissato un verso positivo opportuno), dalla Nota citata risulta

$$\int_{\sigma'_1} d\sigma' = 2\pi + \theta'_1 - \theta'_0 \quad , \quad \int_{\sigma'_2} d\sigma' = 2\pi - (\theta'_1 - \theta'_0);$$

e di qui discende appunto quanto c'eravamo proposti di dimostrare.

Il trasporto per parallelismo lungo T è per definizione *monodromo* se l'angolo $\theta_1 - \theta_0$ è un multiplo intero di 2π ; se però l'immagine sferica T' di T è riducibile per deformazione continua ad un circolo massimo, affinché tale monodromia abbia luogo è necessario e sufficiente che sia $\theta_1 - \theta_0 = 0$ ⁽¹⁾. Dalle (1) discende allora, come condizione caratteristica:

$$\int_{\sigma_1} K d\sigma = \int_{\sigma_2} K d\sigma = 2\pi.$$

(1) Cfr. il n. 1 della Nota di T. LEVI-CIVITA, *Curve chiuse a parallelismo monodromo sopra la sfera*. « Atti della Pontif. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXXVII, VII Sess., 1934, pp. 1-10.

Matematica. — *Sulla costruzione del piano osculatore ad una quartica di prima specie.* Nota di U. CASSINA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Il problema della costruzione del piano osculatore alla quartica gobba di prima specie, che — insieme colla cubica gobba — esaurisce le linee gobbe di importanza fondamentale per la *Geometria descrittiva*, è stato già affrontato fin dal 1880 da H. Drasch ⁽²⁾. Ma la sua risoluzione è ancora notevolmente complicata, sì da non aver trovato posto nei trattati.

Noi, nella presente Nota, diamo una nuova risoluzione del problema, che porta ad una costruzione *lineare* semplicissima, di carattere finito e che si può dimostrare con brevi considerazioni sintetiche proprie della *Geometria sopra una curva*, così com'è esposta nei moderni trattati di *Geometria algebrica*.

In un'altra Nota, che sarà pubblicata nei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo* ⁽³⁾, illustriamo il nostro risultato (che dimostriamo anche analiticamente) mediante due tavole in doppia proiezione ortogonale. Ne facciamo poi un'applicazione interessante al problema della costruzione del piano osculatore ad una linea qualunque l , in un suo punto A , mostrando come esso possa sempre risolversi molto semplicemente sostituendo ad l una quartica gobba di prima specie (intersezione completa di due cilindri circolari retti ad assi ortogonali) avente lo stesso piano osculatore in A .

Sia q una quartica gobba di prima specie, ed a e b due sue corde, generatrici di uno stesso sistema, di una quadrica Q passante per q ; allora è noto ⁽⁴⁾ che, se si considera la proiettività tra i fasci di piani di assi a e b atta ad individuare Q , i piani corrispondenti in tale proiettività determinano sulla q la stessa g_2^1 , cioè segano q nella stessa coppia di punti.

Per tal motivo diremo *equivalenti* due corde come le a e b .

È notevole il caso in cui una delle corde — per es. la a — sia *tangente* a q in suo punto A . Infatti, sia allora I la g_2^1 individuata su q delle due

(1) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(2) H. DRASCH, *Zur Construction der Schmiegungeebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung*, « Stzgsb. Ak. Wien », II parte, 81 (1880), p. 254. Cfr. G. LORIA, *Storia della geometria descrittiva*. Milano, 1921, p. 510.

(3) U. CASSINA, *Sulla costruzione grafica del piano osculatore ad una quartica di prima specie e ad una linea qualunque*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 68, 1935.

(4) F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Bologna, II, 1918, p. 146; III, 1924, pp. 91, 251, 278.

corde equivalenti a e b . Fra i piani del fascio a vi è ora il piano osculatore in A , che segnerà q nella coppia A ; X di I . Perciò il punto X — ulteriore intersezione di q col piano osculatore in A (e quindi distinto da A , se A non è punto stazionario) — appartiene al piano bA .

Il problema della costruzione del piano osculatore a q in A è perciò ricondotto a quello della costruzione di una corda equivalente alla tangente in A a q .

Ora, poichè la q è di prima specie, cioè di genere uno, l'involuzione I è individuata da una sua coppia di punti distinti O e O' , oppure da un punto unito O . Quindi:

Nel primo caso, si ha il teorema:

I. — Sia A un punto di una quartica gobba di prima specie q , a la tangente in A a q , O un punto di q (non appartenente ad a), O' l'ulteriore intersezione di q col piano $\alpha = aO$, B un punto di q fuori del piano α , B' l'ulteriore intersezione di q col piano $\beta = OO'B$; allora le corde a e $b = BB'$ sono equivalenti, e il piano osculatore in A (che supponiamo non sia punto stazionario) è il piano aX , ove X è l'ulteriore intersezione di q col piano bA .

Nel secondo caso, tenendo presente che i piani bitangenti uscenti da un punto O di una quartica di prima specie q sono i piani tangenti in O ai con (o cilindri) quadrici passanti per q , si ha il teorema:

II. — Sia A un punto di una quartica gobba di prima specie q , α un piano tangente in A ad un cono quadrico passante per q , O il suo ulteriore punto di contatto con q ; β un altro piano tangente in O ad un altro cono quadrico passante per q , B il suo ulteriore punto di contatto; allora — dette a e b le tangenti in A e B a q — si ha che le rette a e b sono corde equivalenti, e il piano osculatore in A (che supponiamo non sia punto stazionario) è il piano aX , ove X è l'ulteriore intersezione di q col piano bA .

Il teorema I serve quando la quartica di prima specie sia data come intersezione di due quadriche generiche; il teorema II nel caso in cui sia data come intersezione di due con (o cilindri) quadrici.

In ogni caso la costruzione del piano osculatore è lineare e semplicissima. Per la costruzione effettiva, rimandiamo alla nostra Nota già citata.

Matematica (Analisi). — *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo.* Nota II di N. SPAMPINATO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

4. ANCORA SULL'ALGEBRA DEI NUMERI BICOMPLESSI. — Nell'algebra C' dei numeri bicomplessi, anziché le unità u e v usate nel numero precedente, possiamo scegliere due unità v_1 e v_2 con la tabella di moltiplicazione

$$(24) \quad \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline v_1 & v_1 & 0 \\ \hline v_2 & 0 & v_2 \end{array},$$

e quindi tale da mettere in evidenza la riducibilità di C' nella somma diretta di due algebre complesse equivalenti all'ordinaria algebra dei numeri complessi. L'elemento x di C' , dato nel sistema di unità u, v dalla (23), nel sistema di unità v_1, v_2 è dato da

$$(25) \quad x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

con

$$(26) \quad \lambda_1 = x_1 + ix_2, \quad \lambda_2 = x_1 - ix_2.$$

La matrice di un elemento $\zeta = \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2$, rispetto al nuovo sistema di unità, è data da:

$$(27) \quad \mu'_\zeta = \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\zeta}_2 \end{vmatrix}$$

e quindi, posto $y(x) = f_1(\lambda_1, \lambda_2) v_1 + f_2(\lambda_1, \lambda_2) v_2$, la condizione [3] ci dà:

$$(28) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\zeta}_2 \end{vmatrix}.$$

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

Perciò deve essere:

$$(29) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = \zeta_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \zeta_2.$$

Si ha pertanto il teorema:

III) *Le funzioni $y(x) = f_1(\lambda_1, \lambda_2)v_1 + f_2(\lambda_1, \lambda_2)v_2$ della variabile bicomplexa $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, differenziabili totalmente, sono le funzioni i cui coefficienti f_1 ed f_2 sono funzioni delle variabili complesse λ_1 e λ_2 derivabili rispetto a queste e soddisfacenti alle condizioni*

$$(**) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = 0.$$

Per una tale funzione si ha:

$$dy = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} v_2 \right) dx.$$

Dalle condizioni (**) si ricava che f_1 è funzione della sola variabile λ_1 ed f_2 è funzione della sola variabile λ_2 .

5. DERIVAZIONE CARATTERISTICA NELL'ALGEBRA DEI NUMERI BICOMPLESSI. — Si osservi ora che, rappresentando la variabile bicomplexa nell' S_4 euclideo reale, la derivata caratteristica della funzione $y(x) = f_1(\lambda_1, \lambda_2)v_1 + f_2(\lambda_1, \lambda_2)v_2$ nel punto x del suo campo di esistenza, lungo il piano caratteristico di S_4 , immagine degli elementi $\rho\gamma + x$, con ρ variabile complessa, $\gamma = c_1 v_1 + c_2 v_2$ numero bicomplexo non divisore dello zero, cioè con c_1 e c_2 entrambi non nulli, è data da:

$$(30) \quad y'_\gamma(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \frac{c_2}{c_1} \right) v_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} \frac{c_1}{c_2} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \right) v_2.$$

Infatti, in generale, la derivata caratteristica destra (sinistra) $y'(x)$ [$y(x)$] di una funzione $y(x) = f_1(x_1, \dots, x_n)u_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)u_n$, della variabile $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ in un'algebra complessa A , di ordine n , dotata di modulo, lungo il piano caratteristico γ dell' S_{2n} reale euclideo rappresentativo, immagine degli elementi $\rho\gamma + x$, con ρ variabile complessa e $\gamma = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ elemento di A , non divisore dello zero, è data da: ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \{1\} \quad y'_\gamma(x) &= \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} c_n \right) u_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} c_n \right) u_n \right] \gamma^{-1} \\ \{2\} \quad y_\gamma(x) &= \gamma^{-1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} c_n \right) u_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} c_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} c_n \right) u_n \right]. \end{aligned}$$

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità dotata di modulo*. [«Rendic. del Circolo Matem. di Palermo», Memoria I, to. LVII (1933), Memoria II, to. LVIII (1934), Memoria III, già presentata per la pubblicazione], § 10, n. 3.

Tenendo conto che l'inverso del numero bicompleso $\gamma = c_1 v_1 + c_2 v_2$ è $v_1/c_1 + v_2/c_2$, dalla $\{1\}$ si ricava la (30).

Ne segue che

III') Condizione necessaria e sufficiente affinché la derivata caratteristica $y'(x)$ della funzione $y(x) = f_1(\lambda_1, \lambda_2) v_1 + f_2(\lambda_1, \lambda_2) v_2$ sia indipendente dal piano caratteristico lungo cui si deriva è che sia

$$(**) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = 0 .$$

Per una tale funzione la derivata caratteristica unica è data da:

$$y'(x) = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} v_2 .$$

Confrontando i teoremi III) e III') si scorge che le funzioni bicomplesse totalmente derivabili, cioè le funzioni bicomplesse olomorfe secondo Scorza Dragoni, coincidono con le funzioni a derivata caratteristica unica. Concludendo si ha:

III'') Le funzioni della variabile bicomplessa $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, olomorfe secondo Scorza Dragoni, ovvero derivabili totalmente, sono le funzioni del tipo

$$y(x) = f_1(\lambda_1) v_1 + f_2(\lambda_2) v_2$$

con $f_1(f_2)$ funzione olomorfa di $\lambda_1(\lambda_2)$. Tali funzioni ammettono un'unica derivata caratteristica data da:

$$y'(x) = f'_1(\lambda_1) v_1 + f'_2(\lambda_2) v_2$$

ed è

$$dy = y'(x) dx = f'_1(\lambda_1) v_1 d\lambda_1 + f'_2(\lambda_2) v_2 d\lambda_2 .$$

6. IL CASO DELLE ALGEBRE DEI NUMERI DUALI E BIDUALI. — Consideriamo ora l'algebra I dei numeri duali e l'algebra I' dei numeri biduali⁽¹⁾ cioè le algebre, rispettivamente reale e complessa, con le unità u_1 e u_2 e la tabella di moltiplicazione

$$(31) \quad \begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \\ \hline u_1 & u_1 & u_2 \\ \hline u_2 & u_2 & 0 \end{array} .$$

(1) Per queste denominazioni si veda la mia Nota: *I punti bicomplessi ecc.* [« Esercitazioni Matematiche, Circolo Matematico di Catania », vol. VIII, fasc. 4-5, 1935].

L'elemento corrente in I (I') è dato da:

$$(32) \quad x = x_1 u_1 + x_2 u_2,$$

con x_1, x_2 variabili nel corpo dei numeri reali (complessi). La matrice di un elemento

$$(33) \quad \zeta = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2$$

è data da:

$$(34) \quad u'_1 = \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_1 & \tilde{\zeta}_2 \\ 0 & \tilde{\zeta}_1 \end{vmatrix}.$$

In questo caso, posto $y(x) = y_1(x_1, x_2) u_1 + y_2(x_1, x_2) u_2$, la condizione [3] ci dà:

$$(35) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta_1 & 0 \\ \zeta_2 & \zeta_1 \end{vmatrix}$$

e quindi deve essere:

$$(36) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \zeta_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \zeta_2.$$

Si ha pertanto:

IV) *Le funzioni $y(x) = y_1(x_1, x_2) u_1 + y_2(x_1, x_2) u_2$ della variabile duale (biduale) $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$, differenziabili totalmente, sono le funzioni i cui coefficienti y_1 ed y_2 sono funzioni delle variabili reali (complesse) x_1 ed x_2 , derivabili rispetto a queste e soddisfacenti alle condizioni:*

$$(***) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}.$$

Per una tale funzione si ha:

$$dy = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} u_2 \right) dx.$$

Dalle (***) si ricava che y_1 è funzione della sola x_1 e che y_2 è una funzione del tipo $y_2 = x_2 \cdot y'_1(x_1) + f(x_1)$, essendo $y_1(x_1)$ la funzione coefficiente dell'unità u_1 e $f(x_1)$ un'altra funzione della sola x_1 .

Le condizioni (***) coincidono con le condizioni a cui devono soddisfare i coefficienti di una funzione biduale analitica secondo Agostinelli ⁽¹⁾

(1) C. AGOSTINELLI, *Sopra l'unità ipercomplessa ecc.* [«Atti del R. Istituto Veneto», to. XCIV, parte II, 1935]. Le condizioni coincidenti con le (***), salvo le notazioni, sono quelle del primo rigo di p. 141.

e Sobrero⁽¹⁾. Si noti che i numeri che Sobrero e Agostinelli chiamano ipercomplessi sono i numeri biduali⁽²⁾, cioè gli elementi dell'algebra doppia irriducibile, complessa, dotata di modulo.

Tenendo conto che l'inverso di un numero biduale $\gamma = c_1 u_1 + c_2 u_2$, non divisore dello zero, cioè con c_1 non nullo, è:

$$(37) \quad \gamma^{-1} = \frac{1}{c_1} u_1 - \frac{c_2}{c_1^2} u_2,$$

per la { 1 } si ricava che la derivata caratteristica $y'_\gamma(x)$ di una funzione $y(x) = y_1(x_1, x_2) u_1 + y_2(x_1, x_2) u_2$ della variabile biduale $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$, in un punto x , è data da:

$$(38) \quad y'_\gamma(x) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} c_2 \right) u_1 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} c_2 \right) u_2 \left(\frac{1}{c_1} u_1 - \frac{c_2}{c_1^2} u_2 \right)$$

ovvero da:

$$(39) \quad y'_\gamma(x) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{c_2}{c_1} \right) u_1 + \left[\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) \frac{c_2}{c_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{c_2^2}{c_1^2} \right] u_2.$$

Perchè $y'_\gamma(x)$ sia indipendente dal piano caratteristico γ lungo cui si deriva, occorre e basta che la sua espressione data dalla (39) sia indipendente da c_1 e c_2 e quindi occorre e basta che sia:

$$(***) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0$$

e in tal caso la derivata, unica, è data da:

$$(40) \quad y'(x) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} u_2.$$

Pertanto si ha il teorema:

IV) *Le funzioni della variabile biduale $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$, totalmente derivabili, ovvero analitiche secondo Sobrero e Agostinelli, sono le funzioni a derivata caratteristica unica. Tali funzioni sono del tipo*

$$y(x) = y_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot y'(x_1) + f_1(x_1)] u_2,$$

con $y_1(x_1)$ e $f_1(x_1)$ funzioni olomorfe della variabile complessa x_1 . La loro derivata è data da:

$$y'(x) = y'_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot y''_1(x_1) + f'_1(x_1)] u_2.$$

(1) L. SOBRERO, *Di una variabile ipercomplessa* ecc. [«Memorie della Reale Accademia d'Italia», vol. VI, 1934].

(2) A tal proposito si veda la mia Nota: *Intorno ad un'algebra reale*. [«Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XIX, 1934], e l'altra mia Nota: *Sulle omografie vettoriali* ecc. [«Bollettino dell'Accademia Gioenia», Commentarius LXVIII, 1935].

Matematica (Analisi). — *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili.* Nota II di N. SPAMPINATO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

4. L'ALGEBRA COMPLESSA DEL TIPO III). — Una terza algebra complessa dotata di modulo, del 3° ordine, è l'algebra con la tabella di moltiplicazione

III)

	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_1	0
u_2	0	u_2	0
u_3	u_1	0	u_3

Quest'algebra è la sola, fra le 5 algebre complesse del 3° ordine dotate di modulo, che non sia commutativa. Le matrici sinistra e destra di un suo elemento $\zeta = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3$, sono date da

$$(21) \quad \mu'_\zeta = \begin{vmatrix} \zeta_3 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

$$(22) \quad \mu''_\zeta = \begin{vmatrix} \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

La condizione

$$(23) \quad J(y) = (\mu'_\zeta)_{-1}$$

nel caso attuale ci dà

$$(24) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_3 & \tilde{\zeta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\zeta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\zeta}_3 \end{vmatrix}.$$

(1) Nella seduta del 28 aprile 1935.

Deve essere pertanto:

$$(25) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_2} = 0$$

$$(26) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \lambda_3$$

$$(27) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \lambda_1 \quad , \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \lambda_2 .$$

Ne segue che:

C) Le funzioni $y(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ nell'algebra complessa del 3° ordine del tipo III) totalmente derivabili A DESTRA, o con la derivata caratteristica destra unica, sono le funzioni del tipo

$$y(x) = y_1(x_1, x_2) u_1 + y_2(x_2) u_2 + y_3(x_3) u_3$$

con y_1, y_2, y_3 funzioni derivabili rispetto alle variabili complesse di cui sono funzioni e soddisfacenti alla condizione

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3} .$$

La derivata destra di una tale funzione è data da:

$$y'(x) = \frac{\partial y_1}{\partial x_2} u_1 + y'_2(x_2) u_2 + y'_3(x_3) .$$

La condizione

$$(28) \quad J(y) = (\mu''_1)_{-1} ,$$

essendo

$$(29) \quad (\mu''_1)_{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} \tilde{\lambda}_2 & 0 & \tilde{\lambda}_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right\| ,$$

ci dà le condizioni:

$$(30) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_2} = 0$$

$$(31) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \lambda_2 \quad , \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \lambda_1 \quad , \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \lambda_3 .$$

Ne segue che:

C') Le funzioni $y(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ nell'algebra complessa, del 3° ordine, del tipo III), totalmente

derivabili A SINISTRA, o con la derivata caratteristica sinistra unica, sono le funzioni del tipo:

$$y(x) = y_1(x_1, x_3) u_1 + y_2(x_2) u_2 + y_3(x_3) u_3$$

con y_1, y_2, y_3 funzioni derivabili rispetto alle variabili complesse di cui sono funzioni e soddisfacenti alla condizione:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}.$$

La derivata sinistra di una tale funzione è data da:

$$y'(x) = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} u_1 + y'_2(x_2) u_2 + y'_3(x_3) u_2.$$

5. L'ALGEBRA COMPLESSA DEL TIPO IV). — Consideriamo ora l'algebra complessa del 3° ordine con la tabella di moltiplicazione:

IV)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	0	0
u_3	u_3	0	0

In quest'algebra la matrice di un elemento $\chi = \chi_1 u_1 + \chi_2 u_2 + \chi_3 u_3$ è

$$(32) \quad \mu'_\chi = \begin{vmatrix} \tilde{\chi}_1 & \tilde{\chi}_2 & \tilde{\chi}_3 \\ 0 & \chi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1 \end{vmatrix}$$

e quindi la condizione (23) nel caso attuale, essendo

$$(33) \quad (\mu'_\chi)^{-1} = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ \chi_2 & \chi_1 & 0 \\ \chi_3 & 0 & \chi_1 \end{vmatrix},$$

ci dà le condizioni:

$$(34) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_2} = 0$$

$$(35) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \chi_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \chi_2, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \chi_3.$$

Ne segue il teorema:

D) Le funzioni $y(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ nell'algebra complessa, del 3° ordine, del Tipo IV), totalmente derivabili, o con la derivata caratteristica unica, sono le funzioni del tipo

$$y(x) = y_1(x_1) u_1 + y_2(x_1, x_2) u_2 + y_3(x_1, x_3) u_3$$

con y_1, y_2, y_3 funzioni derivabili rispetto alle variabili complesse di cui sono funzioni e soddisfacenti alle condizioni

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3}.$$

Per una tale funzione la derivata è data da:

$$y'(x) = y'_1(x_1) u_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial y_3}{\partial x_1} u_3.$$

6. L'ALGEBRA COMPLESSA DEL 3° ORDINE DEL TIPO V). - Consideriamo, infine, l'algebra complessa del 3° ordine con la tabella di moltiplicazione

V)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0

In quest'algebra la matrice di un elemento $\tilde{x} = \tilde{x}_1 u_1 + \tilde{x}_2 u_2 + \tilde{x}_3 u_3$ è

$$(36) \quad \mu'_{\tilde{x}} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ 0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_1 \end{vmatrix}$$

e quindi la condizione (23) ci dà, nel caso attuale:

$$(37) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 0$$

$$(38) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \tilde{x}_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_2} = \tilde{x}_2, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \tilde{x}_3.$$

Ne segue il teorema:

E) Le funzioni $y(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ della variabile $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ nell'algebra complessa, del 3° ordine, del Tipo V), total-

mente derivabili, o con la derivata caratteristica unica, sono le funzioni del tipo:

$$y(x) = y_1(x_1)u_1 + y_2(x_1, x_2)u_2 + y_3(x_1, x_2, x_3)u_3$$

con y_1, y_2, y_3 funzioni derivabili rispetto alle variabili di cui sono funzioni e soddisfacenti alle condizioni:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_3}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_3}{\partial x_2}.$$

La derivata di una tale funzione è data da:

$$y'(x) = y'_1(x_1)u_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}u_2 + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}u_3.$$

Geometria. — I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste. Nota II⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata⁽²⁾ dal Socio F. SEVERI.

§ II. — LE LINEE PROIETTIVE SULLE SUPERFICIE NON SVILUPPABILI
DELLO SPAZIO ORDINARIO.

4. Conservando le notazioni della Nota I si ha senz'altro che, affinchè $\mathcal{L}$ sia una linea proiettiva di S , è necessario e sufficiente che i suoi due parametri intrinseci t e τ risultino — lungo essa — uno funzione lineare fratta dell'altro. La condizione analitica perchè ciò accada è che, in forza del legame (12) o (17) che lungo $\mathcal{L}$ intercede fra u e v , un qualunque integrale $t(u)$ della (15) ed un qualunque integrale $\tau(v)$ della (16) verifichino la:

$$(18) \quad \Lambda(t, \tau) = 0.$$

Ora, in generale, se è

$$t = \varphi(\tau), \quad \tau = \psi(v), \quad v = v(u),$$

di guisa che t dipenda da u (e le funzioni qui considerate siano invertibili), oltre alla (7) sussiste analogamente la:

$$\Lambda(t, v) = \Lambda(t, \tau) \cdot \left(\frac{d\tau}{dv} \right)^2 + \Lambda(\tau, v);$$

(1) La numerazione dei paragrafi e delle formule prosegue quella della Nota I, pubblicata collo stesso titolo nel precedente fascicolo di questi « Rendiconti ».

(2) Nella seduta del 5 maggio 1935.

e dalla (7), avuto riguardo a quest'ultima identità, si deduce:

$$(19) \quad \Lambda(t, u) = \Lambda(t, \tau) \cdot \left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 + \Lambda(\tau, v) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Lambda(v, u).$$

In virtù della (19), la (18) può venir scritta sotto forma equivalente così:

$$\Lambda(t, u) = \Lambda(\tau, v) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Lambda(v, u);$$

dunque in conclusione, tenendo pure conto delle (15), (16), si ottiene per le linee proiettive della superficie S la seguente equazione differenziale caratteristica:

$$(20) \quad \Lambda(v, u) = \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^4 + q_{22} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - q_{11}.$$

5. La (20) può venire resa più simmetrica, pensando di rappresentare la linea $\mathcal{L}$ — invece che mediante la (12) o la (17) — col porre u e v funzioni (invertibili) di un parametro θ , d'altronde arbitrario.

Per vedere come corrispondentemente si trasforma la (20), basta osservare che, in virtù delle (7), (19), si ha identicamente

$$\Lambda(\theta, v) \cdot \left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 + \Lambda(v, \theta) = \Lambda(\theta, \theta) = 0$$

$$\Lambda(\theta, v) \cdot \left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 + \Lambda(v, u) \cdot \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \Lambda(u, \theta) = \Lambda(\theta, \theta) = 0.$$

Risulta dunque:

$$\Lambda(v, u) = \{ \Lambda(v, \theta) - \Lambda(u, \theta) \} : \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$$

e la (20) diventa

$$\begin{aligned} & 2 \{ \Lambda(v, \theta) - \Lambda(u, \theta) \} \cdot (du)^2 (dv)^2 (d\theta)^2 = \\ & = \beta^2 (du)^6 - 2 q_{11} (du)^4 (dv)^2 + 2 q_{22} (du)^2 (dv)^4 - \gamma^2 (dv)^6, \end{aligned}$$

ossia, esplicitando qui gli schwarziani mediante la (6),

$$(21) \quad 2 du (dv)^2 d^3 u - 3 (dv)^2 (d^2 u)^2 + 3 (du)^2 (d^2 v)^2 - 2 (du)^2 dv d^3 v + \\ + \beta^2 (du)^6 - 2 q_{11} (du)^4 (dv)^2 + 2 q_{22} (du)^2 (dv)^4 - \gamma^2 (dv)^6 = 0.$$

La (21) può porsi sotto una forma più condensata e suggestiva, introducendo anche la rappresentazione — in coordinate ξ di piani — della superficie S pensata come involuppo:

$$\xi = \xi(u, v) = \frac{1}{a_{12}} (x, x_u, x_v) = \sqrt{2} (x, x_u, x_v).$$

Basta allora ricordare alcuni risultati fondamentali della teoria generale⁽¹⁾, per poter ridurre l'equazione differenziale (21) delle linee proiettive di una superficie nel modo seguente:

$$(22) \quad (x, dx, d^2 x, d^3 x) + (\xi, d\xi, d^2 \xi, d^3 \xi) = 0.$$

La (22) mette senz'altro in evidenza il carattere proiettivo e dualistico (già insito nella definizione) delle linee proiettive di una superficie. Essa inoltre, in base a sviluppi ben noti⁽²⁾, permette di scrivere l'equazione differenziale delle linee proiettive di una data superficie S (non sviluppabile), nel caso in cui le coordinate curvilinee siano affatto qualunque; va solo avvertito a questo riguardo che, come risulta dalla teoria generale, se S è a punti ellittici, occorre sostituire il segno $+$ che figura nella (22) con un segno $-$.

Aggiungiamo da ultimo che, in base alla (21), le linee asintotiche di una superficie sono le curve singolari per l'equazione differenziale delle sue linee proiettive. Le prime debbono quindi conservarsi per collineazioni, reciprocità ed in virtù di ogni altra corrispondenza (eventualmente esistente) fra due superficie, che muti le linee proiettive dell'una nelle linee proiettive dell'altra.

6. Se si confronta la (22) colle equazioni differenziali

$$(23) \quad (x, dx, d^2 x, d^3 x) = 0, \quad (24) \quad (\xi, d\xi, d^2 \xi, d^3 \xi) = 0,$$

che rispettivamente caratterizzano le linee piane e le linee coniche di una superficie, risulta subito che i tre sistemi costituiti da tali linee e dalle linee proiettive sono sempre a due a due distinti, salvo che si riducano tutti ad un sol sistema⁽²⁾. Quand'è che quest'ultimo caso si verifica?

Affinchè ciò accada, è necessario che ogni curva integrale della (23) verifichi la (24) e quindi pure la

$$(25) \quad (x, dx, d^2 x, d^3 x) = \pm (\xi, d\xi, d^2 \xi, d^3 \xi),$$

in cui conveniamo di prendere a secondo membro il segno $+$ od il segno $-$ a seconda che la superficie a cui ci si riferisce è a punti iperbolici od ellittici.

(1) Cfr. G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, to. I-II (Bologna, Zanichelli, 1926-27), pp. 96-98.

(2) Si tenga presente che, in base alla (21), in nessun caso le linee proiettive possono essere indeterminate.

La (25) che — come ha mostrato il ČECH — è l'equazione differenziale delle pangeodetiche⁽¹⁾, è però solo più un'equazione differenziale del 2° ordine: essa dunque deve ridursi ad una identità, se si vuole che ammetta un integrale dipendente da tre costanti essenziali.

Le superficie su cui le pangeodetiche (ossia le estremali per l'integrale dell'elemento lineare proiettivo di FUBINI $F_3 : F_2$) risultano indeterminate, sono ovviamente soltanto quelle che hanno la forma differenziale cubica F_3 identicamente nulla, ossia le quadriche. E si risponde così al precedente quesito, nel modo enunciato al n. 1 (Nota 1).

§ III. — CONDIZIONI GEOMETRICHE PER L'EQUIVALENZA PROIETTIVA FRA SUPERFICIE.

7. Consideriamo ora una seconda superficie $\bar{S}$, per la quale adottiamo notazioni perfettamente analoghe a quelle dianzi ammesse per S ; e supponiamo che fra $S, \bar{S}$ interceda una corrispondenza biunivoca K , trasformante le linee proiettive di S nelle linee proiettive di $\bar{S}$. In base al risultato finale del n. 5, K dovrà mutare le asintotiche di S nelle asintotiche di $\bar{S}$, ond'essa potrà sempre venir rappresentata analiticamente in modo che punti omologhi di $S, \bar{S}$ provengano dagli stessi valori di opportuni parametri asintotici u e v .

Affinchè la (21) (ammetta i medesimi integrali e quindi) si identifichi coll'analogha equazione differenziale relativa ad $\bar{S}$:

$$2 du (dv)^2 d^3 u - 3 (dv)^2 (d^2 u)^2 + 3 (du)^2 (d^2 v)^2 - 2 (du)^2 dv d^3 v + \\ + \bar{\beta}^2 (du)^6 - 2 \bar{q}_{11} (du)^4 (dv)^2 + 2 \bar{q}_{22} (du)^2 (dv)^4 - \bar{\gamma}^2 (dv)^6 = 0,$$

occorre e basta che risulti identicamente:

$$(26) \quad \beta^2 = \bar{\beta}^2, \quad \gamma^2 = \bar{\gamma}^2, \quad q_{11} = \bar{q}_{11}, \quad q_{22} = \bar{q}_{22}.$$

Per discutere ed interpretare geometricamente le (26) conviene distinguere due casi, come tosto facciamo.

8. Se, oltre a

$$(27) \quad q_{11} = \bar{q}_{11}, \quad q_{22} = \bar{q}_{22},$$

si ha:

$$\beta = \bar{\beta}, \quad \gamma = \bar{\gamma}, \quad \text{oppure:} \quad \beta = -\bar{\beta}, \quad \gamma = -\bar{\gamma},$$

è ben noto — e risulta subito dalle (11) — che K è subordinata fra $S, \bar{S}$ rispettivamente da un'omografia o da una reciprocità dello spazio.

(1) Cfr., p. es., G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., pp. 99 e 141.

Supponiamo in secondo luogo che, insieme alle (27), si abbia:

$$(28) \quad \beta = \bar{\beta} \quad , \quad \gamma = -\bar{\gamma} \quad , \quad \text{oppure:} \quad \beta = -\bar{\beta} \quad , \quad \gamma = \bar{\gamma};$$

in questo caso, se non si vuol ricadere nel precedente, occorre supporre $\beta \cdot \gamma \neq 0$ e K risulta non proiettiva. Le condizioni di illimitata integrabilità del sistema (11), nelle quali si esprimano le p in funzione delle q usufruendo delle (14), (10), sono le seguenti:

$$\begin{aligned} q_{11}v &= 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u \quad , \quad q_{22}u = 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v, \\ \beta q_{22}v + 2q_{22}\beta_v - \beta_{vvv} &= \gamma q_{11}u + 2q_{11}\gamma_u - \gamma_{uuu}. \end{aligned}$$

Orbene, basta confrontare queste tre relazioni colle condizioni analoghe relative alla $\bar{S}$ ed aver presenti le (27), (28), per dedurne che dev'essere identicamente:

$$(29) \quad 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0 \quad , \quad 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0,$$

$$(30) \quad q_{11}v=0, q_{22}u=0, \beta q_{22}v + 2q_{22}\beta_v - \beta_{vvv}=0, \gamma q_{11}u + 2q_{11}\gamma_u - \gamma_{uuu}=0.$$

Si soddisfa nel modo più generale alle (29) assumendo

$$\beta = \frac{U^2}{V} \quad , \quad \gamma = \frac{V^2}{U},$$

con U, V funzioni arbitrarie (purchè non nulle) rispettivamente della sola u e della sola v . Basta allora, com'è lecito, introdurre su S ed $\bar{S}$ contemporaneamente nuove coordinate asintotiche

$$\bar{u} = \int U du \quad , \quad \bar{v} = \int V dv,$$

che poi, per semplicità di scrittura, si possono ancora denotare colle lettere u e v , per ridursi ad avere:

$$\beta = \gamma = 1.$$

Con ciò le (30) vengono semplicemente ad esprimere che q_{11} e q_{22} sono costanti, e tali risultano pure le p_{11}, p_{22} in virtù delle (14), (10).

In definitiva, il sistema (11) e l'analogo relativo ad $\bar{S}$ assumono rispettivamente la forma:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{uu} = x_v + hx \\ x_{vv} = x_u + kx \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{uu} = \pm x_v + hx \\ x_{vv} = \mp x_u + kx \end{array} \right\} \quad (\text{con } h, k \text{ costanti}),$$

ove nel secondo sistema vanno scelti i segni superiori o gl'inferiori, in corrispondenza alle due alternative espresse dalla (28). Le (31) mostrano

precisamente che, nelle ipotesi attuali, S ed $\bar{S}$ sono caratterizzabili come superficie di coincidenza con un gruppo ∞^2 di collineazioni in sè⁽¹⁾; per valori generici di h, k tali superficie possono rappresentarsi entrambe sotto forma finita, con una medesima equazione del tipo (1): e si conclude così col teorema enunciato alla fine del n. 1 (Nota I).

OSSERVAZIONE. — È subito visto che la superficie integrale di un qualunque sistema (31) è mutata in sè da un gruppo ∞^2 di trasformazioni conservanti le sue linee proiettive, rappresentate dalle

$$(32) \quad u' \pm u = \text{cost.}, \quad v' \pm v = \text{cost.}$$

A seconda che nei primi membri delle (32) si scelgono ambedue i segni +, ambedue i segni —, oppure un segno + ed un segno —, la trasformazione corrispondente risulta omografica, reciproca, oppure non proiettiva; due qualunque trasformazioni di quest'ultimo tipo, pur non essendo nemmeno delle deformazioni proiettive, hanno sempre per prodotto una trasformazione proiettiva.

Fisica (Fisica tecnica). — *La decantazione delle sospensioni cristalline.* — I. *Teoria generale*⁽²⁾. Nota di G. BOZZA, presentata⁽³⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

Lo studio, da un punto di vista razionale, della decantazione di una sospensione omogenea, studio di ovvia importanza pratica e tecnica, oltre che teorica, non è stato finora mai affrontato. La difficoltà dell'inquadramento dei fenomeni della decantazione discontinua ha probabilmente impedito che il problema venisse studiato anche nei casi più semplici di decantazione continua.

Scopo della ricerca svolta nella presente Nota e in altre che seguiranno è la precisazione delle relazioni generali fra i diversi fattori che intervengono nei fenomeni della decantazione di sospensioni di grani cristallini, di dimensioni tali che siano trascurabili le influenze superficiali fra i granuli e il liquido in cui questi sono sospesi.

Data una sospensione di concentrazione c (volume di solido per unità di volume della sospensione), costituita da un solido di densità e di granu-

(1) Cfr. G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., pp. 157-158 e 389-391.

(2) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano (Cattedra di Termotecnica).

(3) Nella seduta del 19 maggio 1935.

lazione uniforme, per il quale, entro il dato liquido, sia caratteristica la velocità di caduta libera V_l , la velocità di caduta in massa dei granuli entro la sospensione è data dalla espressione

$$(1) \quad V_{sol} = (1 - c) \cdot \varphi \cdot V_l$$

qualora non si abbia influenza sensibile da parte del fondo del recipiente nel quale avviene il fenomeno o da parte di strati a densità rapidamente variabile⁽¹⁾. In questa espressione la φ è una funzione sperimentale della concentrazione per la data specie di granuli.

Se invece esiste un fondo, e la sua influenza sulla velocità di caduta dei granuli giunti a piccola distanza da esso si fa sentire, si può caratterizzare questa influenza per mezzo di un *fattore di rallentamento* ψ ⁽²⁾, funzione della distanza del grano dal fondo stesso:

$$(2) \quad V_{sol} = (1 - c) \cdot \varphi \cdot \psi \cdot V_l.$$

Se, per maggiore generalità, si assegna a tutta la sospensione una velocità globale V , la velocità complessiva di una particella solida sarà data dalla somma (vettoriale) delle due velocità. In particolare, quando V e V_{sol} sono parallele, e quindi ambedue verticali, sarà:

velocità assoluta della sospensione V
velocità assoluta del solido nella sospensione

$$(3) \quad V + (1 - c) \varphi \psi V_l = V_s.$$

Si consideri ora una colonna verticale di sezione unitaria, e in essa siano due sezioni orizzontali situate ad altezze y e $y + dy$ rispetto ad un piano orizzontale di riferimento; in esse le concentrazioni siano rispettivamente c e $c + \frac{\partial c}{\partial y} dy$, le velocità del solido V_s e $V_s + \frac{\partial V_s}{\partial y} dy$, le velocità globali della sospensione V e $V + \frac{\partial V}{\partial y} dy$.

Per la sezione all'altezza y passa nell'unità di tempo un volume di solido dato da cV_s : difatti nella sospensione di concentrazione c l'area mediamente occupata dal solido è c , quella occupata dal liquido è $1 - c$, mentre la velocità del solido è V_s .

(1) Mi riferirò spesso a: G. BOZZA, *I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione*. «Mem. Lincei», 3, 403, 1929. La formula qui riportata corrisponde alla (9) della Memoria, con $c = \frac{x}{h}$ e $\varphi(c) = \frac{1}{\alpha}$.

(2) «Mem. Lincei», loc. cit., p. 421 e seg.

Si vede allora che la quantità

$$\left(V_s + \frac{\partial V_s}{\partial y} dy \right) \left(c + \frac{\partial c}{\partial y} dy \right) - V_s c$$

rappresenta la differenza fra la quantità di solido entrante nell'elemento compreso fra y e $y + dy$ e quella uscente, e quindi l'incremento di solido $\frac{\partial c}{\partial t} dy$. Si ha perciò

$$(4) \quad c \frac{\partial V_s}{\partial y} + V_s \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Valga ora, per granuli sufficientemente piccoli, quali quelli delle ordinarie sospensioni, la legge di caduta di Stokes; si ha

$$(5) \quad V_l = \frac{1}{18} \frac{\gamma - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu} D^2$$

dove γ è la densità del solido, ρ quella del liquido, ν la viscosità cinematica del liquido, D il diametro equivalente delle particelle. Indicando con K l'espressione

$$(6) \quad K = \frac{1}{18} \frac{\gamma - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu}$$

si introducano le nuove variabili (adimensionali)

$$(7) \quad \xi = y \sqrt{\frac{K}{V_l}} = \frac{y}{D} \quad ; \quad \tau = t \sqrt{KV_l}.$$

L'equazione differenziale (4) diviene allora con esse

$$c \sqrt{\frac{K}{V_l}} \frac{\partial V_s}{\partial \xi} + V_s \sqrt{\frac{K}{V_l}} \frac{\partial c}{\partial \xi} = \sqrt{KV_l} \frac{\partial c}{\partial \tau},$$

ossia.

$$(8) \quad \frac{c}{V_l} \frac{\partial V_s}{\partial \xi} + \frac{V_s}{V_l} \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \tau}$$

e rimane così scritta sotto forma adimensionale. Sostituendo il valore di V_s dato dalle (3) risulta, ritenendo ψ funzione di ξ e indicando con φ' la derivata $\frac{d\varphi}{dc}$,

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c \frac{V}{V_l} \right) + c(1-c) \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \{ c(1-c) \varphi' + (1-2c) \varphi \} \psi \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \tau}$$

come equazione fondamentale generale adimensionale della decantazione.

Se è trascurabile l'effetto del fondo, il fattore di rallentamento ψ è costante ed eguale all'unità. L'equazione diviene allora

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{cV}{V_1} \right) + \{ c(1-c) \varphi' + (1-2c) \varphi \} \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \tau}.$$

L'equazione generale si semplifica quando si supponga $V=0$: si ha allora la decantazione entro un recipiente chiuso al fondo, nel quale perciò la sospensione globalmente non si muove: risulta

$$(11) \quad c(1-c) \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \{ c(1-c) \varphi' + (1-2c) \varphi \} \psi \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \tau}.$$

Il caso generico corrisponde alla decantazione in un decantatore con il fondo filtrante; allora la velocità V dipende dalla quantità di liquido che viene filtrata e dalla forma del recipiente. Se tale velocità è costante, ossia la velocità di filtrazione è costante in un decantatore cilindrico, l'equazione diviene

$$(12) \quad c(1-c) \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left[\frac{V}{V_1} + \{ c(1-c) \varphi' + (1-2c) \varphi \} \psi \right] \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \tau}.$$

Quando si ha un caso di decantazione *continua*, quale si può riscontrare in un decantatore tipo Dorr, la distribuzione di concentrazione nell'altezza evidentemente è costante nel tempo; perciò $\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$. In tal caso inoltre si può, in prima approssimazione, ritenere trascurabile l'influenza del fondo, ossia porre $\psi = 1$. L'equazione si riduce perciò a

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{cV}{V_1} \right) + \{ c(1-c) \varphi' + (1-2c) \varphi \} \frac{\partial c}{\partial \xi} = 0.$$

Fisica. — *Un nuovo metodo ottico per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli*⁽¹⁾. Nota di C. SCHAEFER e L. BERGMANN, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

In varie pubblicazioni⁽³⁾ noi abbiamo dimostrato che in un dado di quarzo si possono formare dei centri di diffrazione, eccitandolo ad oscillazioni rapide ed elastiche mediante un campo variabile da 10^7 a 10^8 oscillazioni al secondo servendosi della proprietà della piezoelettricità; questi centri di diffrazione danno, se si fa passare attraverso il cristallo vibrante una luce monocromatica, una figura di diffrazione che dipende dalle proprietà elastiche del cristallo e dalla direzione del cammino dei raggi e che invece è indipendente dalla forma del cristallo (cubo, cilindro, rombo, prisma esagonale ecc.) e dal tipo di eccitazione. I centri di diffrazione vengono a formarsi naturalmente a causa dei nodi delle onde stazionarie dove la densità è maggiore.

Le fig. 1-3 danno un esempio delle figure di diffrazione così ottenute per il quarzo. Quest'ultimo aveva forma di dado ed era tagliato in modo da possedere le seguenti coppie di superficie: (0001) ($10\bar{1}0$) ($11\bar{2}0$). La prima superficie sta perpendicolare all'asse ottico; la terza perpendicolare ad un asse elettrico del quarzo. Dunque attraverso ambedue le direzioni si poteva mandare i raggi nel quarzo; l'ultima direzione sta perpendicolare al piano formato dall'asse elettrico ed ottico.

La fig. 1 dimostra il risultato dell'irraggiamento lungo l'asse ottico; la fig. 3 si riferisce all'irraggiamento in direzione dell'asse elettrico e la fig. 2 si riferisce all'irraggiamento nella direzione perpendicolare alle due precedenti. Si riconosce in fig. 1, come era da aspettarsi, una simmetria esagonale intorno all'asse ottico; anche le altre due figure corrispondono esattamente a ciò che ci si doveva aspettare dal comportamento elastico del quarzo. In modo speciale corrisponde esattamente alle esigenze della simmetria elastica del quarzo il fatto che la fig. 3 è girata di un angolo di circa 18° verso la verticale. Inoltre in fig. 3 è disegnato in tratteggiato una ellisse, la quale nella disposizione del nostro esperimento, se effettivamente si presentava, era talmente debole da non poter essere fotografata; perciò qui è stata solamente disegnata. Già tempo fa abbiamo espresso l'idea che le nostre osservazioni in relazione con una teoria delle figure di interferenza po-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Breslavia.

(2) Nella seduta del 28 aprile 1935.

(3) «Sitzgsber. Preuss. Akad. Wiss., Physik-math. Kl.», 1934-X; «Naturwissenschaften», 22, 1934, 685.

tessero fornirci un eccellente mezzo per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli cosa che fin'ora chiedeva un procedimento faticoso e che perciò era eseguito solo per pochi cristalli. Questa speranza intanto si è completamente verificata; perchè i signori E. Fuess e H. Ludloff sono riusciti a calcolare le curve di interferenza; il loro lavoro apparirà tra breve nei *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*. Risultava per tutti i casi calcolati fin'ora una completa corrispondenza qualitativa con le nostre ricerche. Secondo la teoria si tratta sempre di curve del 6° grado, le quali, in casi speciali, possono anche decomorsi in prodotti di una curva del 2° grado (ellisse o cerchio) con una curva del 4° grado (in casi speciali si decompone anche quella del 4° grado in un prodotto di due curve del 2° grado). Una tale decomposizione ha luogo nella fig. 3 dove il quarzo viene irradiato nella direzione di un asse elettrico; ed è qui dovè viene separata la ellisse (disegnata) della quale abbiamo parlato, un esame più preciso ci dimostra appunto che la eccitazione usata da noi non era adatta per poter produrre la ellisse. Le figg. 4-6 riproducono i nostri risultati per la calcite. Anche qui si tratta di un dado che era tagliato ugualmente a quello del quarzo in modo che il risultato dello spato poteva essere confrontato direttamente con quelli del quarzo. Si riconosce la grande somiglianza in ambedue i casi; le deviazioni nelle figure sono causate dai valori numerici delle costanti elastiche ed anche qui in piena corrispondenza con la teoria. In special modo si riconosce che la curva della fig. 6 è inclinata verso la verticale e che anche qui si separa di nuovo una ellisse la quale coll'eccitamento usato anche questa volta non si presentava.

La calcite è un esempio per il fatto che il metodo può essere applicato anche per cristalli non piezoelettrici; in questo caso si salda semplicemente il cristallo su una lastra di quarzo di dimensioni opportune. In questo modo noi fin'ora abbiamo esaminato per es.: topazio, barite, spato di silice, berillo; vogliamo però non soffermarci su questi risultati e accontentarci del fatto di aver messo in evidenza con l'esempio del quarzo, la portata e la utilità del nuovo metodo.

Fisica (Fisica teorica) — Sulla teoria dei protoni e neutroni.
 Nota di G. WATAGHIN, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Notoriamente le equazioni di Dirac non sono applicabili ai protoni e neutroni. In questa Nota ci proponiamo di far vedere che una lieve modificazione di queste equazioni permette di rendere conto di alcune proprietà note dei protoni e neutroni.

Ci sarà utile (sebbene non indispensabile) considerare (con Heisenberg e Fermi)⁽²⁾ il protone ed il neutrone come due stati quantici di una medesima particella. Per rappresentare tutti gli stati indipendenti di questa possiamo introdurre nella ψ di Dirac una nuova variabile ρ atta ad assumere due soli valori distinti oppure possiamo raddoppiare il numero dei valori distinti della variabile spin ossia introdurre 8 funzioni ψ_k e convenire che

$$(1) \quad \begin{array}{c|c} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \\ \psi_3 & 0 \\ \psi_4 & 0 \\ \hline 0 & \psi_5 \\ 0 & \psi_6 \\ 0 & \psi_7 \\ 0 & \psi_8 \end{array}$$

rappresentano rispettivamente un protone ed un neutrone.

L'argomentazione citata da Dirac per giungere alle equazioni dell'elettrone, è applicabile anche al corpuscolo protone-neutrone e mostra che le equazioni devono essere lineari negli operatori:

$$p_0 = i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \quad k = 1, 2, 3$$

ed in assenza del campo devono coincidere con quella di Dirac. Natural-

(1) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(2) Ved. per es., E. FERMI, « ZS. f. Phys. », 88, 162, 1934.

mente nel caso nostro gli operatori α_k devono essere ora matrici a 8 righe ed a 8 colonne formate mediante quelle di Dirac col metodo noto ⁽¹⁾.

Le modificazioni che qui ci proponiamo di esaminare riguardano l'effetto del campo elettromagnetico, che deve risultare diverso per il protone e per il neutrone.

Mentre nella teoria di Dirac si fa la sostituzione:

$$p_k \rightarrow p_k + \frac{e}{c} A_k \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ove A_k sono le 4 componenti del potenziale elettromagnetico, noi facciamo la sostituzione:

$$(2) \quad p_k \rightarrow p_k + \frac{e}{c} A_k \gamma$$

ove:

$$(3) \quad \gamma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ed inoltre aggiungiamo i termini:

$$\frac{e}{c} \Lambda \sum \epsilon_{kl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}$$

ove $\Lambda = \frac{\hbar}{Mc}$; M è la massa di un protone e ϵ_{kl} sono matrici Hermitiane a 8 righe e 8 colonne definite nel modo seguente:

(1) W. PAULI, « Handb. d. Phys. », 24, 219, 1933. Queste matrici sono formate colle matrici α'_k di Dirac a 4 righe e 4 colonne secondo lo schema:

$$\alpha_k = \begin{vmatrix} \alpha'_k & 0 \\ 0 & \alpha'_k \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_{23} = -i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \varepsilon_{31} = -i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 & \varepsilon_{12} = -i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \\ \varepsilon_{01} = -i \alpha_1 \alpha_4 & \varepsilon_{02} = -i \alpha_2 \alpha_4 & \varepsilon_{03} = -i \alpha_3 \alpha_4 \\ \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk} & \varepsilon_{kl}^2 = I & \varepsilon_{kl} \varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{kl} = 0 \\ & \text{se } k \neq l & \text{se } k = \mu, l = \nu. \end{array} \right.$$

Per controllare l'invarianza relativistica del metodo è importante notare che le espressioni

$$\mu_{kl} = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \sum_{n=1}^8 \psi_n^* \varepsilon_{kl} \psi_n$$

formano gli elementi di un tensore emisimmetrico. Il fattore $\frac{e}{c} \Lambda = \frac{e \hbar}{Mc^2}$ è introdotto per ragioni dimensionali e per analogia coll'espressione del tensore del momento elettrico e magnetico dell'elettrone.

L'operatore (3) è stato scelto in modo che i potenziali A_k non diano una interazione del tipo $\frac{e}{c} \alpha_k A_k$ nel caso del neutrone. Ma, dovendo esistere una interazione tra il campo e il neutrone, ci sembra giustificato il ricercare se questa interazione può dipendere linearmente dalle derivate prime $\frac{\partial A_l}{\partial x_k}$ e se si può considerare il neutrone come un dipolo elettrico e magnetico. Perciò, ammettendo che la stessa interazione valga anche per il protone, scriviamo le equazioni del corpuscolo protone-neutrone nel modo seguente:

$$(5) \quad \left(p_0 - \frac{1}{c} H \right) \psi = \left[p_0 + \frac{e}{c} A_0 \gamma + \alpha_4 Mc + \sum_k \alpha_k \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \gamma \right) + \right. \\ \left. + \sum_{kl} \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \varepsilon_{kl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right] \psi = 0.$$

Per calcolare lo spin del protone e del neutrone, possiamo considerare il caso particolare di un campo, per cui $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ e $A_0 = A_0(\rho, x_3)$ ove $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

In altre parole supponiamo che A_0 abbia la simmetria assiale rispetto all'asse x_3 .

Un facile calcolo ⁽¹⁾ ci dà:

$$(6) \quad H(x_1 p_2 - x_2 p_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1) H = -\hbar^2 \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \\ - i \frac{e}{c} \frac{\hbar^2}{Mc} \left(\varepsilon_{01} \frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \varepsilon_{02} \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right)$$

(1) V. Appendice, p. 707.

e analogamente

$$(6') \quad -\frac{1}{2} \hbar (H\sigma_3 - \sigma_3 H) = \hbar^2 \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \\ + i \frac{e}{c} \frac{\hbar^2}{Mc} \left(\varepsilon_{01} \frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \varepsilon_{02} \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right) \quad \text{ove} \quad \sigma_3 = -i \alpha_1 \alpha_2.$$

Dunque l'operatore

$$(6'') \quad \left\{ \left[\vec{x} \wedge \vec{p} \right] + \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right\}_{x_3}$$

è commutabile con H e quindi rappresenta un'integrale primo del movimento. In questo modo (seguendo il metodo di Dirac) si conclude che lo spin del protone e del neutrone può acquistare i valori $\pm \frac{1}{2} \hbar$.

Per calcolare il momento magnetico del corpuscolo, possiamo passare all'equazione di 2° ordine per ψ applicando alle (5) l'operatore

$$\left[p_0 + \frac{e}{c} A_0 \gamma - \alpha_4 Mc - \sum_s \alpha_s \left(p_s + \frac{e}{c} A_s \gamma \right) - \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \sum_{\mu, \nu} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right].$$

Si ottiene

$$(7) \quad \left\{ \left(p_0 + \frac{e}{c} A_0 \gamma \right)^2 - M^2 c^2 - \sum_k \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \gamma \right)^2 + \right. \\ + \frac{i \hbar e}{c} \sum_{k < l} \alpha_k \alpha_l \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) \gamma - Mc \cdot \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} (\alpha_4 \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl} \alpha_4) \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) - \\ \left. - \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left[\vec{E}^2 + \vec{H}^2 \right] \right\} \psi = 0.$$

Osservando che:

$$\alpha_4 \varepsilon_{23} + \varepsilon_{23} \alpha_4 = 2 \sigma_1 \quad \alpha_4 \varepsilon_{01} + \varepsilon_{01} \alpha_4 = 0 \quad \text{ecc.}$$

e seguendo il metodo usuale, noi consideriamo il caso non relativistico $\left(\frac{W - Mc^2}{W} \rightarrow 0 \right)$, e, dividendo la precedente per $2M$, otteniamo nello sviluppo della (7) il seguente termine che rappresenta l'interazione del momento magnetico del protone col campo magnetico

$$-3 \frac{e \hbar}{2 Mc^2} \vec{\sigma} \times \vec{H} \quad \text{ove} \quad \left(H_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \text{ ecc.} \right).$$

Di conseguenza il momento magnetico del protone è rappresentato dalla matrice

$$3 \frac{e \hbar}{2 M c} \vec{\sigma}.$$

Questo risultato sembra essere in soddisfacente accordo colle misure di O. Stern ⁽¹⁾.

Per il momento magnetico del neutrone si ottiene nel modo analogo l'espressione

$$2 \frac{e \hbar}{2 M c} \vec{\sigma}.$$

Questo studio è incompleto in quanto per provare la validità delle (5) occorre applicare queste equazioni allo studio della struttura nucleare ed in primo luogo al calcolo dell'energia di legame del deutone. Naturalmente nella teoria qui esaminata figurano gli stati di energia negativa, che possono essere trattati col metodo di Dirac (utilizzando il principio di Pauli). In questo caso, i protoni negativi e gli anti-neutroni potrebbero apparire spontaneamente nella teoria degli edifici nucleari.

Naturalmente, per soddisfare il principio della conservazione della carica elettrica, è necessario adoperare l'elettrodinamica quantica e, seguendo il metodo di Fermi ⁽²⁾, introdurre degli operatori che accoppiano ogni trasformazione di un neutrone in un protone colla creazione (emissione) di un elettrone.

Resta aperta la questione perchè l'interazione $\frac{e}{c} \frac{\hbar}{M c} \epsilon_{kl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}$ non deve figurare nelle equazioni dell'elettrone.

Si noti infine che la teoria precedente può essere svolta separatamente per il protone e per il neutrone.

APPENDICE

Dettaglio del calcolo delle espressioni (6) e (6').

Nella formula (6) il primo termine al 2° membro è quello solito che si ottiene nel caso $\epsilon_{kl} = 0$ [ved. per es. H. BETHE. « Hand. d. Phys. », 24, p. 303]; il secondo termine si ottiene dalle espressioni:

$$- \frac{e}{c} \frac{\hbar}{M c} \epsilon_{01} \left(- \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right) (x_1 p_2 - x_2 p_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1) \left(- \frac{e}{c} \frac{\hbar}{M c} \epsilon_{01} \right) \left(- \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right) =$$

(1) Durante la correzione delle bozze, è apparso un lavoro di P. G. KRUGER (« Phys. Rev. », 47, 605, 1935) in cui si attribuiscono al momento magnetico del protone e del neutrone i valori di 2,7 e rispettivamente 1,75 magnetoni nucleari, valori non troppo diversi da quelli qui proposti (3 e 2).

(2) Loc. cit.

$$= i \hbar \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \epsilon_{01} \left(x_1 \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2 \partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} \right) = - i \hbar \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \epsilon_{01} \frac{\partial A_0}{\partial x_2}$$

e da altre analoghe.

Nelle (6') il 2° termine al 2° membro si ottiene con un procedimento analogo:

$$\begin{aligned} - \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \epsilon_{01} \left(- \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right) \frac{1}{2} \hbar (-i \alpha_1 \alpha_2) - \frac{1}{2} \hbar (-i \alpha_1 \alpha_2) \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \epsilon_{01} \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = \\ = - i \hbar \frac{e}{c} \frac{\hbar}{Mc} \epsilon_{02} \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Fisica. — *Sullo spettro di oscillazione e rotazione della molecola HD.* Nota di G. C. WICK, presentata⁽¹⁾ dal Socio E. FERMI.

INTRODUZIONE. — Si suole chiamare spettro di oscillazione e rotazione di una molecola quella parte del suo spettro che è dovuta a oscillazioni dei nuclei intorno alle loro posizioni di riposo e rotazioni della molecola in blocco, non accompagnate da oscillazioni elettroniche; in altre parole, quella parte dello spettro che corrisponde a transizioni in cui non variano i numeri quantici elettronici.

Tale spettro non viene mai osservato in molecole biatomiche omonucleari come H_2 , N_2 , O_2 ecc., fatto che, com'è noto, si spiega mediante semplici considerazioni di simmetria⁽²⁾. Esso è stato invece osservato in molecole fortemente asimmetriche (molecole polari) come HCl , HBr ecc.

La molecola HD non è rigorosamente omonucleare e deve quindi possedere uno spettro di oscillazione e rotazione; tuttavia è presumibile che, data l'alta simmetria della struttura elettronica della molecola, lo spettro sia estremamente debole. Vedremo infatti che lo spettro ha un'origine diversa da quella ordinaria, essendo dovuto alla asimmetria dell'oscillazione dei nuclei (la differenza essenziale tra H_2 e HD è questa: nella molecola di HD il punto di mezzo della congiungente dei nuclei oscilla; si ha quindi, per inerzia, uno scuotimento del sistema elettronico, che produce il momento oscillante); la sua intensità teorica risulta non nulla soltanto in una approssimazione più elevata di quella di cui ci si contenta ordinariamente nella teoria delle molecole. Essa non è però così piccola da escludere la possibilità di osservare sperimentalmente lo spettro⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(2) Ved., per un orientamento generale, il libro di E. FERMI, *Molecole e cristalli*; per la dimostrazione rigorosa ved. R. DE L. KRONIG, *Band Spectra and Molecular Structure*.

(3) Il dott. H. Beutler mi ha gentilmente informato che sono in corso esperienze a questo proposito. Devo anche ringraziare il dott. Beutler, avendo io appreso l'esistenza del problema qui trattato da una sua lettera, cortesemente mostratami dal dott. U. Fano.

Vi è anche una asimmetria nella rotazione, ma come vedremo la sua influenza è trascurabile. Potremo perciò semplificare assai il problema eliminando i due gradi di libertà corrispondenti alla rotazione. Calcoleremo cioè il dipolo $D(v, w)$ associato alla transizione in cui il quanto d'oscillazione varia da v a w ; avremo così l'intensità globale della banda corrispondente. La distribuzione dell'intensità tra le componenti di rotazione della banda segue poi le solite leggi.

Il momento risulta dal calcolo dato con grossolana approssimazione (ved. § 3) da:

$$(1) \quad D(v, w) = -\frac{2\pi^2 m v^2}{3e} \alpha R(v, w)$$

dove α è la polarizzabilità della molecola nella direzione dell'asse, m e e sono rispettivamente massa e carica dell'elettrone, v è la frequenza associata alla transizione, ossia:

$$(2) \quad v = v(v, w) = \frac{1}{h} [E(v) - E(w)]$$

e $R(v, w)$ è l'elemento di matrice corrispondente dell'ampiezza delle oscillazioni.

Per una semplice valutazione si può prendere per α la polarizzabilità media (nelle varie direzioni) dedotta dall'indice di rifrazione estrapolato:

$$\alpha = 8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^3$$

e supporre inoltre che le oscillazioni siano armoniche; allora:

$$R(v, v+1) = \sqrt{\frac{3h(v+1)}{16\pi^2 M v}}$$

dove M è la massa del protone. Poichè $v = 3800 \text{ cm}^{-1}$ (dallo spettro Raman), si trova:

$$D(v, v+1) = 10^{-22} \sqrt{v+1} \text{ cm}^{5/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$$

che corrisponde, come si è detto, a un'intensità che forse è osservabile.

§ 1. Vogliamo senz'altro studiare l'influenza dell'oscillazione senza rotazione, supponiamo perciò i nuclei mobili lungo una retta che scegliamo come asse χ . Supponiamo inoltre fisso il baricentro dei nuclei, sicchè la posizione di questi è individuata dalla loro distanza R . Scegliamo come origine delle coordinate elettroniche $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ non il baricentro, bensì il punto di mezzo della congiungente dei nuclei. Il dipolo della molecola nella direzione χ è allora dato da:

$$(3) \quad D = -eZ, \quad Z = z_1 + z_2.$$

La Hamiltoniana del sistema è:

$$(4) \quad H = H_0 + \frac{e^2}{R} - \frac{3h^2}{16\pi^2 M} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{h^2}{16\pi^2 M} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial}{\partial \chi_1} + \frac{\partial}{\partial \chi_2} \right) - \frac{h^2}{192\pi^2 M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi_1} + \frac{\partial}{\partial \chi_2} \right)^2$$

dove H_0 è la Hamiltoniana degli elettroni quando i nuclei sono fissi. Trascureremo d'ora in avanti l'ultimo termine di (4), che si potrebbe del resto includere in H_0 , senza per questo alterare sensibilmente le proprietà della molecola. Vediamo allora che il termine più interessante per noi è il penultimo; senza di esso la molecola sarebbe perfettamente omonucleare e non avrebbe dipolo d'oscillazione, per le note ragioni. Converrà quindi studiare il problema con un metodo delle perturbazioni lievemente diverso da quello generalmente impiegato per le molecole⁽¹⁾.

Noi considereremo come perturbazione solo il penultimo termine della (4), supponendo risolta esattamente l'equazione di Schrödinger rimanente. Possiamo poi tener conto della perturbazione in prima approssimazione, approfittando del fatto che la perturbazione non ha elementi di matrice di bassa frequenza, ma solo elementi di matrice tra stati elettronici differenti.

Useremo le seguenti notazioni: w, v, v', v'' numeri quantici di oscillazione, n, m quanti elettronici. Il livello elettronico fondamentale sarà indicato con o . Uno stato del sistema è quindi individuato dai due indici n, v il cui insieme sarà indicato anche mediante un unico indice come a, b, c . Porremo anzi che a rappresenti lo stato o, v , b uno stato nv' che combina con il livello elettronico fondamentale, c lo stato o, w . Porremo inoltre:

$$(5) \quad P = \frac{h^2}{16\pi^2 M} \frac{\partial}{\partial R} \quad , \quad \Gamma = \frac{\partial}{\partial \chi_1} + \frac{\partial}{\partial \chi_2}.$$

L'energia di perturbazione è quindi:

$$(6) \quad W = P\Gamma = \Gamma P.$$

Applicando le solite formule della teoria delle perturbazioni, si trova con facili calcoli che, in prima approssimazione:

$$(7) \quad D(a, c) = -e \sum_b \left\{ \frac{Z(a, b) W(b, c)}{E(c) - E(b)} + \frac{W(a, b) Z(b, c)}{E(a) - E(b)} \right\}$$

dove, secondo le solite notazioni:

$$W(a, b) = \int \bar{\Phi}_a W \Phi_b d\tau.$$

(1) Ved., oltre i libri citati in nota 2 di p. 708, anche: J. C. SLATER, «Proc. Nat. Ac.», 13, 423, 1927; M. BORN e J. R. OPPENHEIMER, «Ann. d. Phys.», 84, 476, 1927; R. DE L. KRONIG, «Zs. f. Phys.», 50, 347, 1928.

§ 2. Per valutare l'espressione (7) cercheremo di ricondurla a proprietà note della molecola. Anzitutto, applicando alla (6) le note proprietà moltiplicative delle matrici, si ottiene:

$$(8) \quad \begin{cases} W(b, c) = \sum_d \Gamma(b, d) P(d, c) \\ W(a, b) = \sum_d P(a, d) \Gamma(d, b). \end{cases}$$

Inoltre, per la relazione tra velocità e impulso, si ha:

$$(9) \quad \Gamma(b, d) = \frac{4\pi^2 m}{h^2} [E(d) - E(b)] Z(b, d).$$

Sostituendo le (8) e (9) nella (7) si trova:

$$(10) \quad D(a, c) = -\frac{4\pi^2 me}{h^2} \sum_{bd} \left[Z(a, b) Z(b, d) P(d, c) - P(a, d) Z(d, b) Z(b, c) + \right. \\ \left. + h\nu(d, c) \frac{Z(a, b) Z(b, d)}{E(c) - E(b)} P(d, c) + h\nu(a, d) P(a, d) \frac{Z(d, b) Z(b, c)}{E(a) - E(b)} \right].$$

Di questa espressione la prima parte si trasforma mediante le proprietà di moltiplicazione delle matrici:

$$(11) \quad \sum_{bd} [Z(a, b) Z(b, d) P(d, c) - P(a, d) Z(d, b) Z(b, c)] \\ = (Z^2 P - P Z^2)(a, c) = 0$$

poichè gli operatori P e Z sono permutabili.

Per valutare la seconda parte di (10) osserviamo che, analogamente a (9):

$$(12) \quad P(a, d) = \frac{1}{6} [E(d) - E(a)] R(a, d)$$

e quindi:

$$(13) \quad D(a, c) = + \frac{2\pi^2 me}{3} \sum_{bd} \left[\frac{Z(a, b) Z(b, d)}{E(c) - E(b)} \nu^2(d, c) R(d, c) + \right. \\ \left. + \nu^2(a, d) R(a, d) \frac{Z(d, b) Z(b, c)}{E(a) - E(b)} \right].$$

Ora, espressioni del tipo:

$$(14) \quad -2e^2 \sum_b \frac{Z(a, b) Z(b, d)}{E(c) - E(b)}$$

hanno un significato ben noto. Prendiamo dapprima il caso $d = a$. Possiamo scrivere a denominatore nella (14) $E(a)$ al posto di $E(c)$ poichè la frequenza di oscillazione $\nu(a, c)$ è piccola rispetto alle frequenze elettroniche. Troviamo allora l'espressione ben nota della polarizzabilità α della molecola nello stato a , nella direzione dell'asse. Analogamente nel termine con $d = c$ nella seconda somma in (13) incontreremo l'espressione della polarizzabilità per lo stato c .

Consideriamo ora il caso in cui d è ancora sempre uno stato appartenente al livello elettronico fondamentale, ma diverso sia da a che da c . L'espressione (14) è allora di quelle che danno l'intensità dell'effetto Raman di oscillazione. Poichè noi sappiamo che l'intensità dell'effetto Raman è piccola rispetto a quella dell'effetto Tyndall, potremo trascurare questi termini. Perciò, se per un momento dimentichiamo i termini rimanenti (d appartenente a un livello eccitato), e ricordiamo che a significa ov , c significa ow , troviamo:

$$(15) \quad D(v, w) = -\frac{2\pi^2 m}{3e} \nu^2(v, w) R(v, w) \frac{\alpha_v + \alpha_w}{2}$$

e uguagliando la media delle due polarizzabilità ad α , giungiamo alla formula (1).

§ 3. Dobbiamo ora però occuparci dei termini con $d = mv''$ dove m è un livello elettronico eccitato. Saremmo dapprima tentati di trascurare questi termini completamente, poichè

$$(16) \quad R(mv'', ow) = 0$$

nella solita approssimazione della teoria delle molecole, cioè quella in cui le autofunzioni Φ della molecola si rappresentano come prodotto di un'autofunzione nucleare $V_{nv}(R)$ per un'autofunzione elettronica $\psi_n(R, x)$, dove le ψ_n formano un sistema ortogonale per ogni valore del parametro R . In realtà l'elemento di matrice (16) non è esattamente nullo, è soltanto molto piccolo, ma tale piccolezza è compensata dal fattore $\nu^2(d, c)$ che è molto più grande di $\nu^2(ov, ow)$.

Usiamo infatti, invece della relazione (12), la:

$$(17) \quad h\nu(d, c) P(d, c) = \frac{h^2}{16\pi^2 M} K(d, c)$$

dove:

$$K = -\frac{\partial V}{\partial R}$$

dove V è l'energia potenziale del sistema.

Ora possiamo impiegare la solita approssimazione. Eseguendo prima l'integrazione sulle coordinate elettroniche, e posto:

$$(18) \quad K_{mn}(R) = \int \bar{\Psi}_m K \psi_n dx_1 \cdots dx_2$$

avremo:

$$(19) \quad K(mv'', ow) = K_{mo}(v'', w) = \int \bar{V}_{mv''}(R) K_{mo}(R) \bar{V}_{ow}(R) dR.$$

Applicando le analoghe relazioni agli elementi di matrice di Z e sostituendo le (17) e (19) nella (10), si trova:

$$(20) \quad D(ov, ow) = -\frac{m}{4M} \sum_{m', m''} \left[\frac{Z_{on}(v, v') Z_{nm}(v', v'')}{E(ow) - E(nv')} K_{mo}(v'', w) + \right. \\ \left. + K_{om}(v, v'') \frac{Z_{mn}(v'', v') Z_{no}(v', w)}{E(ov) - E(nv')} \right].$$

La somma rispetto a v'' si esegue mediante noti teoremi⁽¹⁾. Si ha:

$$(21) \quad \sum_{v''} Z_{nm}(v', v'') K_{mo}(v'', w) = \{Z_{nm} K_{mo}\}(v', w).$$

Analogamente possiamo sommare rispetto a v' se trascuriamo nei denominatori della (20) la struttura di oscillazione. Si trova allora facilmente:

$$(22) \quad D(v, w) = \frac{m}{4M} \sum_{nm} \int \frac{Z_{on} Z_{nm} K_{mo} + K_{om} Z_{mn} Z_{no}}{E(n) - E(o)} \bar{V}_v(R) V_w(R).$$

Nella formula (15) oppure (1) noi abbiamo tenuto conto solo dell'addendo con $m = 0$. Vediamo ora che in (22) compaiono termini che in uno sviluppo secondo potenze di $\left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ sono del medesimo ordine. Sarebbe però assai difficile tener conto in modo soddisfacente dei termini con $m \neq 0$. Osserviamo soltanto che essi probabilmente sono più piccoli di quelli di cui abbiamo tenuto conto, perchè mentre nella somma che dà la polarizzabilità tutti gli addendi hanno lo stesso segno, nella somma con $m \neq 0$ si hanno in generale segni diversi, e avviene quindi una parziale distruzione per interferenza. D'altra parte è anche probabile che $\frac{d}{dR} K_{mo}$ sia alquanto più piccolo di $\frac{d}{dR} K_{oo}$. Dobbiamo concludere che con estrema pro-

(1) Ved. H. J. VAN VLECK, «Proc. Nat. Ac.», 15, 754, 1929.

babilità l'ordine di grandezza della formula (1) è corretto. Osserviamo ancora che la formula (22) nel caso in cui $v = w$ ci dice che la molecola possiede un momento permanente; esso è però troppo piccolo per avere un'influenza apprezzabile sulle proprietà dielettriche della molecola.

§ 4. Per finire consideriamo brevemente l'influenza della rotazione. Poichè l'asse di rotazione della molecola passa per il baricentro, che è posto a distanza $\frac{1}{6}R$ dal centro della molecola, potremo rappresentare l'effetto della rotazione mediante la perturbazione

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{i=1}^2 \left[x_i^2 + \left(z_i + \frac{R}{6} \right)^2 \right]$$

che si può decomporre:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \sum \left[x_i^2 + z_i^2 + \frac{1}{36} R^2 \right] + m \omega^2 \frac{R}{6} Z$$

di cui la prima parte non produce momento per ragioni di simmetria e la seconda è formalmente uguale all'interazione con un campo elettrico parallelo all'asse della molecola. Ma, come si vede facilmente, l'effetto è dell'ordine di $\left(\frac{m}{M} \right)^2$, cioè assai più piccolo di quello considerato precedentemente.

Chimica (Chimica biologica). — *Ricerche sul ricambio dell'acqua*. IX. *Variazione della diuresi e pH urinario in animali a dieta acidogena e alcalogena*⁽¹⁾. Nota di M. SAVIANO, presentata⁽²⁾ dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

A complemento e spiegazione di precedenti ricerche⁽³⁾, ho voluto studiare le modificazioni del pH urinario in animali a dieta acidogena e alcalogena, quando si provoca in essi una poliuria da ingestione di acqua.

Le presenti ricerche vanno distinte in due gruppi: il primo riguardante animali a dieta acidogena, il secondo quelli a dieta alcalogena.

Per il primo gruppo mi sono servito di un cane del peso di Kg. 16 tenuto per diversi giorni a dieta costante, consistente in: pane gr. 400, polvere di carne gr. 15, acqua cc. 800. In via preliminare avevo osservato che la razione così composta (compresa l'acqua), veniva sicuramente consumata per intero. Determinavo il valore del pH sulle urine raccolte col catetere dalle 9 alle 12 del mattino, dopo di che offrivo all'animale il pasto che veniva rapidamente consumato e raccoglievo le urine delle rimanenti ore della giornata. I valori di pH delle urine di queste due raccolte, separatamente esaminate, non presentavano sensibili differenze e si aggiravano tra 5,4 e 5,5.

In alcuni giorni, alle 9 del mattino, a digiuno, mediante sonda introdotta nello stomaco, somministravi all'animale 200 cc. di acqua di fonte ed esaminai il pH delle urine raccolte nelle tre ore immediatamente successive e di quelle delle rimanenti ventun'ore. I valori ottenuti sono riferiti nella prima metà della Tabella I. Essi dimostrano che nel cane a dieta acidogena la poliuria da ingestione di acqua provoca una diminuzione della concentrazione idrogenionica urinaria abbastanza notevole (in un caso il pH varia da 5,4 a 6,6).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(3) M. SAVIANO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1933, 8, 770.

TABELLA I.

Cane maschio del peso di Kg. 16.

N. espe- rienze	Condizioni sperimentali	pH dell'urina eliminata				
		con dieta acidogena		con dieta alcalogena		
		dalle ore 9 alle 12	nelle ri- manenti 21 ore	dalle ore 9 alle 12	dalle ore 12 alle 15	nelle ri- manenti 18 ore
1	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,0	5,7	8,0	7,7	7,1
	Giorno precedente	5,4	5,4	8,0	8,1	7,5
2	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,5	5,8	7,8	7,6	7,1
	Giorno precedente	5,5	5,5	7,9	7,9	7,5
3	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,4	5,7	7,9	7,6	7,2
	Giorno precedente	5,5	5,4	7,9	7,9	7,5
4	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,5	5,6	7,9	7,7	7,3
	Giorno precedente	5,5	5,5	8,0	7,9	7,5
5	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,6	5,7	7,9	7,5	7,3
	Giorno precedente	5,4	5,5	7,8	7,9	7,4
6	Giorno della diuresi pro- vocata (1)	6,3	5,7	7,9	7,6	7,4
	Giorno precedente	5,5	5,5	7,9	7,9	7,5

(1) 200 cc di acqua di fonte furono introdotti nello stomaco dell'animale, alle ore 9 nelle esperienze a dieta acidogena, alle ore 12 in quelle a dieta alcalogena.

Il secondo gruppo di esperienze tentai di condurlo egualmente sul cane, rendendo alcalogena la dieta suindicata per aggiunta di 10 gr. *pro die* di bicarbonato sodico. Ma accadeva che, consumando l'animale il pasto alle ore 12, l'urina eliminata durante il giorno e anche nella notte era alcalina, mentre quella raccolta dalle ore 9 alle 12 era nettamente acida. Anticipai, pertanto, l'orario del pasto dalle ore 12 alle ore 9. Ottenni in questo modo che le urine eliminate in due periodi di tre ore ciascuno immediatamente successivi al consumo del pasto erano fortemente alcaline ($\text{pH} = 8,1$) ed

alcaline erano pure, sebbene in grado minore ($\text{pH} = 7,5$), quelle complessivamente eliminate nelle rimanenti 18 ore.

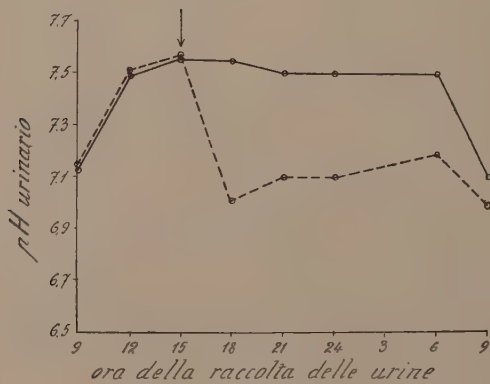
Abituato l'animale a questo regime, in alcuni giorni, 3 ore dopo il pasto, e cioè alle 12 del mattino, provocai la diuresi introducendo nello stomaco, mediante sonda, 200 cc. di acqua di fonte, ed esaminai il pH delle urine eliminate nelle 3 ore immediatamente successive e nelle seguenti 18 ore. I risultati ottenuti sono riferiti nella seconda metà della Tabella I. Essi dimostrano che nel cane a dieta alcalogena, per effetto della diuresi acquosa, la concentrazione idrogenionica urinaria tende ad aumentare (in un caso il pH varia da 8,1 a 7,7).

Ho creduto, poi, utile eseguire alcune ricerche anche nei conigli, che eliminano normalmente urine alcaline. Dico subito, però, che anche in questi animali mi è stato praticamente impossibile eseguire le esperienze di diuresi acquosa al mattino a digiuno, giacchè nel coniglio, tenuto a digiuno dalla sera precedente, la reazione delle urine del mattino è praticamente neutra ($\text{pH} = 7-7,1$). Ond'è che ho creduto di non poter fare di meglio che lasciare un coniglio sempre libero di consumare verdura, che gli veniva offerta in eccesso, e determinare separatamente i valori del pH sulle urine raccolte durante la giornata in 6 periodi di 3 ore ciascuno, e durante la notte in un periodo di 6 ore (dalla mezzanotte alle sei del mattino). Tali determinazioni misero in rilievo una tendenza della reazione attuale delle urine a raggiungere valori pressochè neutri nelle prime ore del mattino e nelle tarde ore della sera. In alcuni giorni, poi, somministrai, mediante sondina introdotta nello stomaco dell'animale, una quantità di acqua di fonte che si aggirò intorno ai 100 cc. per conigli del peso medio di Kg. 2,5 ed esaminai sempre le urine delle 3 ore immediatamente successive ed, in tre esperienze, quelle delle rimanenti ore della giornata, raccolte in separati periodi di 3 ore ciascuno ed in uno di 6 ore (dalla mezzanotte alle 6 del mattino). Anche in queste esperienze i valori di pH delle urine delle singole raccolte dei giorni in cui fu provocata la diuresi sono rigorosamente confrontabili con quelli corrispondenti dei giorni precedenti.

Per brevità, nella grafica qui annessa riferisco l'andamento di una esperienza completa, quello delle altre essendo pressochè identico. In detta grafica viene rappresentato con la linea tratteggiata il comportamento del pH urinario nei vari periodi della giornata in cui fu provocata la diuresi, introducendo l'acqua al momento indicato colla freccia, e con la linea continua il comportamento del medesimo in corrispondenti periodi di tempo del giorno precedente. Nella Tabella II, invece, sono raccolti i dati di tutte le esperienze riferentisi alle urine delle sole 3 ore immediatamente successive alla somministrazione di acqua ed a quelle di un corrispondente periodo di tempo del giorno precedente.

TABELLA II.

Conigli N.	Urine eliminate					
	nelle 3 ore successive alla introduzione di 100 cc di acqua			nelle corrispondenti 3 ore del giorno precedente		
	volume cc	densità	pH	volume cc	densità	pH
1	130	1,009	7,05	50	1,019	7,6
»	100	1,011	7,1	43	1,020	7,7
»	150	1,001	7,1	70	1,018	7,5
»	125	1,006	7,15	63	1,019	7,6
2	136	1,007	7,1	48	1,021	7,7
»	130	1,001	7,05	62	1,018	7,6
»	143	1,002	7,15	58	1,019	7,6
»	120	1,006	7,05	60	1,018	7,5
3	160	1,003	7,1	73	1,018	7,5
»	150	1,001	7,0	50	1,019	7,6
»	118	1,007	7,1	39	1,019	7,7
»	132	1,009	7,05	50	1,018	7,6



Sia dalla grafica, sia dalla Tabella risulta che nel coniglio, come nel cane a dieta alcalogena, l'aumento della diuresi provoca un aumento della concentrazione idrogenionica urinaria (il pH varia in qualche caso da 7,7 a 7,1-7,9).

Dai risultati riferiti in questa Nota appare dimostrato che ogni qual volta si provoca una poliuria con ingestione di acqua, la reazione dell'urina tende a divenire meno acida negli animali a dieta acidogena, meno alcalina in quelli a dieta alcalogena.

L'opinione di qualche ricercatore⁽¹⁾ che la diluizione dell'urina, quale si produce nella diuresi acquosa, non debba di per sè modificare il pH dell'urina, perchè questa è fortemente pufferata, non è, dunque, confermata dalla osservazione, come non giustificata appare, del resto, da un punto di vista teorico. Certamente, l'urina può essere diluita 10 volte o anche di più senza che il pH vari sensibilmente, ma una cosa è diluire l'urina *in vitro*, altra cosa è provocare una poliuria.

L'ultrafiltrato glomerulare, perchè ultrafiltrato, deve avere lo stesso pH del sangue, o, se mai, un pH un po' minore, per effetto dell'equilibrio di membrana. È nei tubuli, come hanno dimostrato Wearn e Richards⁽²⁾, che avviene riassorbimento (o eliminazione) di radicali basici o acidi, a seconda che nel sangue vi è un eccesso degli uni o degli altri. Ora, quando la velocità con cui l'ultrafiltrato glomerulare scorre attraverso i tubuli è abnormemente aumentata, come accade nella diuresi acquosa, evidentemente il riassorbimento (o l'eliminazione) riferito all'unità di volume dell'ultrafiltrato è meno cospicuo, e perciò la reazione dell'urina si allontana tanto meno da quella dell'ultrafiltrato, quanto maggiore è l'intensità della diuresi. Ciò non importa necessariamente un disturbo dell'equilibrio acido-basico dell'organismo, perchè la quantità di acidi o di alcali che si elimina dal sangue nell'urina può restare imm modificata e variare solo la concentrazione.

Che l'equilibrio acido-basico non si alteri sensibilmente per effetto della diuresi risulta, del resto, anche da mie precedenti ricerche⁽³⁾, nelle quali ratti e conigli furono tenuti per lungo tempo (fino a 51 giorni) a dieta povera o ricca di acqua (il volume dell'urina *pro die* variò da cc. 1,4 a 95 nei ratti, e da 9 cc. a 600 nei conigli, ossia nel rapporto di 1 : 67 in media), senza che mai si manifestassero segni di alcalosi o di acidosi, e solo alla fine della ricerca si trovò che la riserva alcalina degli animali con diuresi abbondante era un po' più bassa (dell'8%) di quella degli animali con scarsa diuresi. Questa diminuzione della R. A. che si verifica sia negli animali a dieta acidogena, sia in quelli a dieta alcalogena, è da riferirsi, in ultima analisi, alla perdita di sostanze minerali che subisce l'organismo con

(1) R. MARTINETTI, « Il Problema Alimentare », 1933, 3, 235.

(2) J. T. WEARN a. A. N. RICHARDS, « Amer. J. of Physiol. », 1924, 71, 209.

(3) M. SAVIANO, loc. cit.

diuresi abbondante. In altre ricerche⁽¹⁾, infatti, per un'eguale quantità di cibo introdotta, in uno stesso periodo di tempo, topi tenuti a molta acqua (che emettevano circa 30 cc. di urina *pro die* di peso specifico 1001) eliminarono complessivamente attraverso i reni una quantità di sostanze minerali notevolmente superiore (più del doppio) rispetto a quelli tenuti a poca acqua (che emettevano meno di 1 cc. di urina *pro die* di peso specifico 1071).

Se, come abbiamo detto, per effetto della diuresi acquosa, la reazione dell'urina tende ad avvicinarsi a quella del sangue, si comprende benissimo come nel cane, in seguito a introduzione di acqua, l'urina diviene meno acida, se la dieta è acidogena, meno alcalina, se la dieta è alcalogena, pur senza raggiungere mai il pH del sangue. Ma dalle esperienze condotte sui conigli a dieta normale (alcalogena) risulta che il pH delle urine eliminate successivamente all'introduzione di acqua si porta a 7,1 e in qualche caso sino a 7, ossia l'urina diviene un po' più acida del sangue. Questo potrebbe far sospettare, che l'organismo, anziché liberarsi dell'eccesso di alcali, ne trattenga, onde dovrebbe andare incontro ad una alcalosi, cosa che, come abbiamo ora ricordato, non avviene affatto.

Io credo che, in realtà, la lieve differenza tra il pH del sangue e quello dell'urina in questi animali sia da attribuire esclusivamente all'acido carbonico. La concentrazione di questo acido nell'urina essendo determinata, infatti, essenzialmente dalla sua tensione nel rene stesso^(2, 3) è largamente indipendente dal volume e dalla reazione dell'urina; ma la sua influenza sul pH è tanto maggiore quanto minore è la concentrazione dell'urina e particolarmente quella del bicarbonato.

Conclusione. — La reazione dell'urina si avvicina tanto più a quella del sangue, quanto più abbondante è la diuresi. Negli animali a dieta alcalogena può anche divenire meno alcalina di quella del sangue. Quest'ultimo fatto è da attribuirsi, verosimilmente, all'acido carbonico, perchè, mentre la concentrazione del bicarbonato nell'urina diminuisce per effetto della diluizione, quella dell'acido carbonico (tensione CO₂) resta praticamente immodificata.

Chimica. — *Sugli ossidi di platino di Lafitte.* Nota di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) M. SAVIANO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1934, 9, 990.

(2) J. L. GAMBLE, « J. of Biol. Chem. », 1922, 51, 295.

(3) D. D. VAN SLYKE, J. SENDROY a. S. SEELIG, « J. of Biol. Chem. », 1934, 106, 479.

Biologia. — *Sullo sviluppo del “ sarcoma di Jensen ” in alcune particolari condizioni di alimentazione* ⁽¹⁾. Nota di V. FAMIANI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. BAGLIONI.

Da lungo tempo l'influenza del fattore alimentare sullo sviluppo dei tumori è stata oggetto di indagine da parte di numerosi sperimentatori, i quali hanno studiato l'azione di varie sostanze nutritive (glicidi, lipidi, protidi, vitamine) considerandole separatamente o variamente associate, e notando gli effetti del loro eccesso o della loro deficienza, sulla insorgenza di tumori spontanei, o sull'accrescimento e sviluppo dei comuni tumori trapiantabili (sarcoma tipo Rous, tipo Jensen, adenocarcinoma tipo Erlich).

Ma i risultati di tanta messe di ricerche, specie riguardo al comportamento delle vitamine, non sono stati tutti tra loro concordanti.

Mentre per ciò che concerne determinati gruppi di sostanze, i glicidi, ad es., i risultati ottenuti dai diversi ricercatori (Rondoni, Van Alstyne e Beebe, Handel e Tadenuma, Marchesi ecc.), sia pure con metodi differenti, concordano tra loro, nel senso che la somministrazione o la privazione delle sostanze studiate influenza favorevolmente o sfavorevolmente l'attecchimento e la crescita del tumore, non altrettanto può dirsi per tutto il resto, ed in maniera particolare per le vitamine. Difatti in questo caso, in cui forse più ricca è la messe di lavori, disparate sono le opinioni, sicchè ben poco può accettarsi come accertato. Tuttavia si ammette da molti, se non generalmente, che il complesso B influenzi l'accrescimento dei tumori, nel senso che la sua presenza favorisce, la sua deficienza rallenta.

Per le altre vitamine una qualsiasi azione o è negata, o è molto discussa. Ma che la presenza delle vitamine nella dieta agevoli, o la sua deficienza ritardi lo sviluppo dei tumori sperimentali — come giustamente è stato osservato da P. Rondoni ⁽³⁾ — « può essere semplicemente espressione del fatto che gli stati di denutrizione e sofferenza dell'ospite hanno una innegabile ripercussione nel senso di rallentare la crescita dei tumori trapiantabili comunemente in uso nei laboratori », esistendo a tal proposito osservazioni di indubbio valore.

Non ci risulta tuttavia che sia stato finora studiato il comportamento di tumori sperimentali innestati in animali a lungo e uniformemente alimen-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(3) P. RONDONI, *La biochimica del cancro*. « Bull. d. R. Accad. Med. di Roma », 1934.

tati con diete complete ovvero più o meno gravemente deficienti dal lato qualitativo. Pertanto, disponendo di alcuni ratti albinì tenuti da oltre un anno a dieta esclusiva di grano, e di altri a dieta esclusiva di orzo — ma colla completa correzione, in questi casi, delle deficienze qualitative⁽¹⁾ mercè aggiunta di adatti correttivi —, nonchè dei relativi controlli ad alimento misto ordinario; e disponendo altresì di un ceppo attivissimo di « sarcoma di Jensen » (fornitoci, per ricerche tendenti ad altro scopo, dall'Istituto di Patologia generale di questa R. Università), abbiamo creduto utile approfittare dell'occasione, per stabilire se eventuali differenze si verificassero nei tre casi, nei riguardi dell'attecchimento e sviluppo del tumore innestato.

Abbiamo utilizzato 13 ratti albinì i quali fin dall'epoca dello slattamento erano stati così nutriti: un gruppo con alimento misto ordinario; un gruppo con grano, integrato con l'aggiunta di miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker (4 %), olio di fegato di merluzzo (2 %) e di caseina (10 %); ed un terzo gruppo con dieta di orzo, più miscuglio salino, olio di fegato di merluzzo e caseina come nel caso precedente del grano. Tutti gli animali presentavano, all'atto dell'innesto, condizioni generali ottime.

L'innesto fu eseguito mediante la immissione sotto la cute di uno dei fianchi, sterilmente, con lungo ago a lume assai ampio, di tre pezzettini di tessuto neoplastico prelevato da parti diverse — ma sempre lontano dalla zona centrale necrotica — del tumore di un ratto, di recente ucciso con cloroformio, avendo cura che la massa totale innestata fosse il più possibile eguale in ogni caso.

Gli animali continuarono poi ad assumere la rispettiva dieta. Al 24° giorno dall'innesto furono uccisi (al solito con cloroformio) contemporaneamente tutti quelli in cui si era avuto attecchimento del tumore, che fu accuratamente escisso e pesato.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella I, dalla quale appare evidente, che differenze sostanziali nei tre casi in esame non si sono osservate: sembrerebbe fare eccezione la percentuale di attecchimento, minore nel caso degli animali nutriti con alimento misto ordinario, ma la discordanza è più apparente che reale. Per il resto non si è notata differenza alcuna per ciò che riguarda lo sviluppo raggiunto dalla massa neoplastica nei diversi animali; del che fan fede i pesi riflettenti i tumori escissi, sia se considerati singolarmente, sia — e ancor meglio, potendosi avere oscillazioni entro limiti abbastanza estesi, pel semplice fattore individuale —, se si considera invece il peso medio nei vari gruppi. Anche l'andamento del peso corporeo degli animali durante lo sviluppo del tumore, non ha subito sostanziali modificazioni; e le femmine, gravide al momento del trapianto, hanno potuto portare regolarmente a termine la gravidanza.

(1) V. FAMIANI, *Sul valore alimentare del grano (semi di « Triticum vulgare Vill. »)*. « Il Problema alimentare », 1932, 2, 55; ID., *Sul valore alimentare dei semi di « Hordeum vulgare L. »*. « Ibidem », 1933, 3, 269.

Successivamente abbiamo voluto esaminare anche il comportamento del tumore trapiantato in animali adulti, che da lungo tempo fossero alimentati esclusivamente ed uniformemente con diete incomplete dal punto di vista qualitativo (per accertate deficienze di vario grado). A tal fine 18 ratti albinici (di ambo i sessi, adulti e in ottime condizioni generali) furono divisi in tre gruppi, di cui uno fu alimentato con solo grano (per cui è risultata una deficienza mista salino-proteica), uno con riso brillato (per cui è risultata una deficienza grave mista salino-vitaminica e forse anche proteica⁽¹⁾), ed il terzo lasciato come controllo ai precedenti, con alimento ordinario misto e variato.

Dopo 3 mesi di tale alimentazione, agli animali sopravvissuti al trattamento fu innestato il « sarcoma di Jensen » con la tecnica precedentemente descritta. Alcuni animali morirono nel giro di pochi giorni successivi. Gli altri che continuarono a ricevere la rispettiva dieta, furono uccisi a 26 giorni dall'innesto con cloroformio; ed i tumori escissi e pesati.

Per ciò che concerne i dati così raccolti e riassunti nella tabella II, non possiamo dar serio peso alla percentuale di attecchimento, data la eccessiva mortalità verificatasi poco dopo l'innesto. Per ciò che concerne invece lo sviluppo della massa neoplastica, per quanto modesto possa considerarsi, per la stessa ragione suaccennata, il valore dati ottenuti al riguardo, risulta evidente come il peso medio da essa raggiunto negli animali alimentati con grano (gr. 11,30) e con riso (gr. 12,77) è stato nettamente inferiore a quello (gr. 23,14) raggiunto negli animali ad alimento misto.

Riassumendo, i nostri animali, alimentati a lungo ed esclusivamente con diete uniformi o monotone, affatto complete dal punto di vista qualitativo, non hanno mostrato alcuna differenza di comportamento, circa l'attecchimento e lo sviluppo del « sarcoma di Jensen », rispetto ai relativi controlli ad alimento ordinario misto e variato; invece nei ratti esclusivamente da tempo alimentati con diete qualitativamente incomplete (per deficienza proteica, vitaminica e minerale di vario grado) lo sviluppo del tumore trapiantato è apparso di gran lunga inferiore a quello osservato nei rispettivi controlli.

(1) V. FAMIANI, *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con alcuni cereali*. « Il Problema alimentare », 1931, 1, 165; Id., *Sul valore alimentare del riso brillato*. « Fisiologia e Medicina », 1935, 6, 23.

TABELLA I.

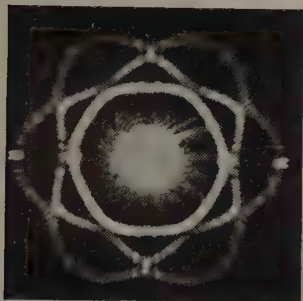
Gruppo	Numero e sesso del l'animale	Alimento	Peso del- l'animale all'inizio dell'esp. gr.	Età del tumore giorni	Peso del- l'animale dopo escissione del tumore gr.	Percen- tuale di attecchi- mento	Peso del tumore gr.	Peso medio del tumore gr.
I	1 ♂	Alimento misto or- dinario	190	24	172	80 %	23,18	24,72
	2 ♂		205		229		35,95	
	3 ♂		160		165 (non attec.)		—	
	4 ♀		160		160		25,68	
	5 ♀		155		190 (gravida)		14,09	
II	6 ♂	Grano + sali + olio di fegato di merluzzo + ca- seina	250	24	257	100 %	27,87	26,43
	7 ♂		250		235		23,25	
	8 ♀		205 (gravida)		222		32,34	
	9 ♀		190 (gravida)		178		32,27	
III	10 ♂	Orzo + sali + olio di fegato di merluzzo + ca- seina	200	24	191	100 %	29,80	24,95
	11 ♂		195		186		26,16	
	12 ♀		175		176		18,86	
	13 ♀		180		181		23,38	

TABELLA II.

Gruppo	Numero e sesso del- l'animale	Alimento	Peso del- l'animale all'inizio dell'esp. gr.	Età del tumore giorni	Peso del- l'animale dopo escissione del tumore gr.	Percen- tuale di attecchi- mento	Peso del tumore gr.	Peso medio del tumore gr.
I	1 ♂	Alimento misto ordinario	175	26	205	66 % ?	14,72	23,14
	2 ♀		180		+			
	3 ♀		170		220 (gravida)		31,60	
	4 ♀		160		170 (non attec.)			
II	5 ♂	Solo grano	160	26	158	100 % ?	9,50	11,30
	6 ♂		130		125		5,52	
	7 ♂		120		+			
	8 ♂		130		+			
	9 ♂		118		100		18,90	
	10 ♀		95		+			
III	11 ♂	Solo riso brillato	135	26	118	100 %	17,85	12,77
	12 ♂		135		110		10,22	
	13 ♂		60		74		10,57	

Fisiologia. — *Sull'azione dell'insulina nei colombi digiunanti.* Nota di D. GIGANTE, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

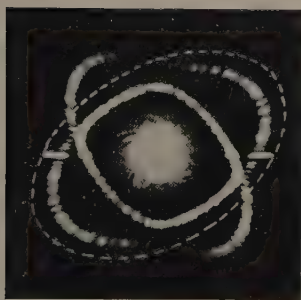
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



1



2



3



4



5



6

Un nuovo metodo ottico per la determinazione
delle costanti elastiche dei cristalli.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 31 maggio 1935 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano prof. G. CASTELNUOVO.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Analisi). — *A proposito di un recente lavoro di A. A. Albert. Nota* ⁽¹⁾ *del Corresp. G. SCORZA.*

Nel fascicolo degli *Annals of mathematics* pubblicato nel gennaio di quest'anno è apparsa una Nota di A. A. Albert ⁽²⁾ alla quale desidero dedicare qualche breve commento.

Ricordato che cosa sia una matrice di Riemann ed enunciato il teorema di Poincaré sugli integrali abeliani riducibili come una proposizione relativa alle matrici di Riemann legate a curve algebriche, l'Albert così passa a dichiarare lo scopo del suo lavoro:

The above theorem — quello di Poincaré — was generalized to the case where ω is any Riemann matrix by G. Scorza. Scorza used a rather complicated projective geometric method and his proof (as well as all previous proofs) is not very simple. I shall give here an elementary matrix proof of the above theorem and the later Scorza reduction of any impure Riemann matrix to its pure components.

1. Ora qui vi è luogo a parecchie osservazioni.

In primo luogo che il teorema di Poincaré sia estendibile a qualsiasi matrice di Riemann è osservazione di tale immediatezza che proprio non ci terrei a vedermela attribuita anche se fossi stato io ad averla messa in ri-

(1) Presentata nella seduta del 31 maggio 1935.

(2) Dal titolo: *A note on the Poincaré theorem ou impure Riemann matrices.*

lievo⁽¹⁾; ma essa trovasi già esplicitamente indicata, e senza darle alcun peso, in una classica Memoria del Castelnuovo⁽²⁾.

In secondo luogo non vedo come possa dirsi che la dimostrazione, trovata — presso che al tempo medesimo e in piena indipendenza reciproca — da me e dal Rosati⁽³⁾ non sia *very simple* ed usi *a rather complicated projective geometric method*, quando essa non richiede che conoscenze di geometria proiettiva assolutamente elementari (le proposizioni di appartenenza e le proprietà dei sistemi nulli che sono conseguenze immediate della loro definizione). E ove pur volesse concedersi che la dimostrazione in discorso non fosse *very simple*, non sarebbe giusto metterla alla pari... per scarsezza di semplicità con tutte le dimostrazioni precedenti; fra le quali quella del Poincaré — anche nella forma datale dal Wirtinger⁽⁴⁾ — è viziata da un errore in un punto fondamentale, e quella — elegantissima — del Castelnuovo non può certo esser compresa da chi non abbia profonde conoscenze di analisi e geometria algebrica.

2. Ma vi è qualcosa di più strano da osservare: la dimostrazione che l'Albert crede nuova è, sotto veste diversa e con modifiche insignificanti, un ragionamento già indicato per via incidentale e per tutt'altro scopo in una mia Memoria del 1919⁽⁵⁾; ragionamento che piegato a stabilire il teorema di Poincaré ne fornisce una dimostrazione niente affatto più semplice di quella cui ed io ed il Rosati facemmo ricorso.

(1) Piuttosto non mi sarebbe dispiaciuto che l'Albert avesse trovato modo di avvertire che a me è dovuto il teorema 5 col quale la sua Nota si chiude e col quale fin dal 1917 ho caratterizzato le algebre legate a matrici di Riemann. Veggasi G. SCORZA, *Il rango di una matrice di Riemann*. Questi «Rendiconti», ser. 5^a, vol. XXVI, 2° sem. 1917, pp. 177-182.

(2) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*. Questi «Rendiconti», ser. 5^a, vol. XIV, 1° sem. 1905, pp. 545-556, 593-598, 655-663, p. 596.

(3) G. SCORZA, a) *Sugli integrali abeliani riducibili*. Questi «Rendiconti», ser. 5^a, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 412-418 e pp. 645-654; b) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLI, 1916, pp. 263-379, p. 297; C. ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. L, 1914-15, pp. 685-694.

(4) Riprodotta dal KRAZER a p. 495 e sgg. del suo classico *Lehrbuch der Thetafunktionen*. L'errore cui qui sopra si accenna consiste in ciò che nelle dimostrazioni del Poincaré e del Wirtinger si suppone nullo l'indice di singolarità di una matrice riemanniana impura, che, invece, è necessariamente > 0 .

(5) G. SCORZA, *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLIII, 1918-19, pp. 213-238.

3. Nella detta mia Memoria per dimostrare che, se

$$\omega = \left\| \begin{array}{ccccccc} \omega_{1,1} & , & \dots & , & \omega_{1,2q} & , & 0 & , & \dots & , & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{q,1} & , & \dots & , & \omega_{q,2q} & , & 0 & , & \dots & , & 0 \\ \omega_{q+1,1} & , & \dots & , & \omega_{q+1,2q} & , & \omega_{q+1,2q+1} & , & \dots & , & \omega_{q+1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p,1} & , & \dots & , & \omega_{p,2q} & , & \omega_{p,2q+1} & , & \dots & , & \omega_{p,2p} \end{array} \right\|$$

è una matrice riemanniana, tale è pure la matrice

$$\omega_1 = \left\| \begin{array}{ccccccc} \omega_{q+1,2q+1} & , & \dots & , & \omega_{q+1,2p} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \omega_{p,2q+1} & , & \dots & , & \omega_{p,2p} & & \end{array} \right\|$$

si ragiona nel seguente modo ⁽¹⁾.

In uno spazio proiettivo a $2p-1$ dimensioni nel quale sia stabilito un sistema di coordinate proiettive omogenee con la piramide fondamentale $A_1, \dots, A_{2p}$ siano: Q e Q_1 gli spazi $A_1, \dots, A_{2q}$ e $A_{2q+1}, \dots, A_{2p}$, aventi le dimensioni rispettive $2(q-1)$ e $2(p-q)-1$, τ l'immagine di ω , Q_j il punto di τ che ha per coordinate gli elementi della j^{ma} riga di ω .

Per l'ipotesi i punti $O_1, \dots, O_q$ stanno sullo spazio Q e dunque Q è un'asse di ω ed ω è impura.

I punti $O_{q+1}, \dots, O_p$ determinano in τ un S_{p-q-1} indipendente da Q e quindi sono proiettati da Q su Q_1 in $p-q$ punti $O'_{q+1}, \dots, O'_p$ congiunti da un S_{p-q-1} , α' .

Sia Q' un asse complementare a Q e si dica σ un sistema nullo riemanniano di ω , certo esistente, che abbia per asse Q e che subordini su Q' un sistema nullo principale per Q' .

Allora σ è tagliato da Q_1 in un sistema nullo razionale non degenerare trasformante in sè α' e atto a mostrare che α' è nello spazio Q_1 l'immagine di una matrice riemanniana del genere $p-q$. Ma entro Q_1 le coordinate del punto O'_{q+1} sono gli elementi della l^{ma} riga di ω_1 , dunque ω_1 è una matrice di Riemann con l'immagine α' .

4. In questo ragionamento si presuppongono già noti il teorema di Poincaré e la proposizione che garantisce l'esistenza dei sistemi nulli riemanniani degeneri di una matrice riemanniana impura aventi per asse un suo asse comunque assegnato, ma lo si converte subito in un ragionamento atto a dimostrare il teorema di Poincaré e nella forma che a questo teorema dà l'Albert, cioè a provare che ω è isomorfa alla matrice

(1) Loc. ora cit., § 3.

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,2q}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{q,1}, \dots, \omega_{q,2q}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, \dots, 0, & \omega_{q+1,2q+1}, \dots, \omega_{q+1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, \dots, 0, & \omega_{p,2q+1}, \dots, \omega_{p,2p} \end{array} \right\|$$

ponendo

a) che Q' sia lo spazio polare di Q in un sistema nullo principale di ω, Σ ;

b) che σ sia il sistema nullo degenero di asse Q che porta ciascun punto di Q' nell'iperpiano della stella di centro Q nel quale lo muta Σ ;

e imaginando inoltre di eseguire nello spazio ambiente una trasformazione omografica razionale Φ che lasci fermi i singoli punti di Q e subordini fra Q' e Q , la prospettività di centro Q .

5. Orbene, la dimostrazione così delineata, è, tradotta in linguaggio algebrico puro, la *elementary matrix proof* dell'Albert.

Infatti, se

$$C = \|c_{ij}\|$$

è la matrice dei coefficienti di Σ , lo spazio Q' è l'intersezione degli iperpiani polari dei punti $A_1, \dots, A_{2q}$ aventi per equazioni

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{1 \dots 2p} c_{1,r} x_r = 0, \dots, \sum_{r=1}^{1 \dots 2p} c_{2q,r} x_r = 0,$$

Un punto esterno a Q dello spazio proiettante O_{q+1} da Q ha le coordinate del tipo

$$(2) \quad -\lambda_{1,1} + \omega_{q+1,1}, \dots, -\lambda_{1,2q} + \omega_{q+1,2q}, \quad \omega_{q+1,2q+1}, \dots, \omega_{q+1,2p}$$

quindi sta nello spazio Q' , se per le λ si ha

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{j=1}^{1 \dots 2q} c_{1,j} \lambda_{1,j} + \sum_{r=1}^{1 \dots 2p} c_{1,r} \omega_{q+1,r} = 0, \\ \dots \\ -\sum_{j=1}^{1 \dots 2q} c_{2q,j} \lambda_{1,j} + \sum_{r=1}^{1 \dots 2p} c_{2q,r} \omega_{q+1,r} = 0, \end{array} \right.$$

ossia

$$(4) \quad \lambda_{1,j} = \omega_{q+1,j} + \sum_{i=1}^{1 \dots 2q} \sum_{s=1}^{1 \dots 2(p-q)} \gamma_{i,j} c_{i,2q+s} \omega_{q+1,2q+s} \quad \left(\begin{array}{l} l=1, 2, \dots, p-q \\ j=1, 2, \dots, 2p \end{array} \right),$$

dove con $\gamma_{i,j}$ si è indicato il reciproco di $c_{i,j}$, nel minore principale di C d'ordine $2q$ contenuto nelle prime $2q$ righe.

Ciò porta che O_{q+l} è proiettato da Q su Q' nel punto O''_{q+l} di coordinate

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{1 \dots 2q} \sum_{j=1}^{1 \dots 2(p-q)} \gamma_{i,1} c_{2q+j,i} \omega_{q+l,2q+j}, \dots, \sum_{i=1}^{1 \dots 2q} \sum_{j=1}^{1 \dots 2(p-q)} \gamma_{i,2q} c_{2q+j,i} \omega_{q+l,2q+j}, \\ & \omega_{q+l,2q+1}, \dots, \omega_{q+l,2p}, \end{aligned}$$

punto che naturalmente appartiene a τ . Ma allora la matrice ω è isomorfa all'altra Ω che ha per righe le coordinate dei punti $O_1, \dots, O_q, O''_{q+1}, \dots, O''_p$ e questa è isomorfa a quella che ha per righe le coordinate dei punti $O_1, \dots, O_q, O'_{q+1}, \dots, O'_p$ giacchè l'omografia Φ lascia fermi i punti $O_1, \dots, O_q$ e porta $O''_{q+1}, \dots, O''_p$ in $O'_{q+1}, \dots, O'_p$.

Ora le matrici $\alpha\omega$ ed A che compariscono nella dimostrazione dell'Albert sono precisamente la matrice quivi indicata con Ω e la trasposta della matrice dei coefficienti dell'omografia Φ .

Concludendo:

La dimostrazione dell'Albert, tradotta in linguaggio geometrico, si muta in quella or ora indicata, visibilmente assai meno semplice della dimostrazione del teorema di Poincaré data da me e Rosati. E dunque quest'ultima, dal punto di vista concettuale, resta ancora la più semplice tra quelle finora conosciute.

Ma, lasciando pur da parte il punto di vista concettuale, contesto che il linguaggio puramente algebrico, cui ha voluto attenersi l'Albert, per le questioni riguardanti le matrici di Riemann agitate nel lavoro che qui si esamina sia il più conveniente ed opportuno.

Il lettore, che sia padrone dei due linguaggi, voglia considerare:

a) che la dimostrazione, di cui fin qua si è discorso, perde ogni spontaneità e luminosità quando sia spogliata della sua veste geometrica;

b) che il lemma 1 dell'Albert, quando si adotti la rappresentazione geometrica da me indicata, si enuncia nel modo che segue:

Se Σ è un sistema nullo principale della matrice riemanniana ω con l'immagine τ , r punti, che siano coniugati in Σ a ciascun punto di τ , appartengono necessariamente a τ ;

cioè si converte in un'osservazione... ingenua, giacchè dire che Σ è un sistema nullo di ω (non occorre nemmeno che sia principale) significa che τ , concepito come luogo di punti, è mutato da Σ in sè, concepito come stella di iperpiani⁽¹⁾;

(1) Lo ZARISKI nel suo recente volume *Algebraic surfaces* (Berlin, Springer, 1935) per dimostrare il teorema di Poincaré riproduce con lievi modificazioni il ragionamento algebrico dell'Albert e naturalmente comincia dallo stabilire il lemma di cui qui sopra si discorre. Lemma cui lo ZARISKI, per non ripetere quella dell'Albert, dedica una dimostrazione in due tempi!

c) che qualcosa di simile può dirsi del teorema 3 dell'Albert, cioè del teorema:

Matrici riemanniane pure o non sono vincolate o sono isomorfe.

A proposito del quale egli sembra ignorare che mi appartiene ⁽¹⁾.

Meccanica. — *Una questione sulla forza sollecitante un polo magnetico in un campo.* Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova metrologia elettrica.* Nota ⁽²⁾ del Socio L. PUC-
CIANTI.

In questa Nota mi propongo di chiarire come nella moderna concezione dei fenomeni elettrici, che, riprendendo la idea amperiana di riduzione del magnetismo ad elettrodinamica, si conforma alla reale costituzione dei corpi dielettrici e magnetici, e che si accorda con la prima relatività einsteiniana, possano risolversi concezioni precedenti, non ancora del tutto abbandonate; e come alcune apparenti antinomie si dissolvano agevolmente con una critica obiettiva, e scompaiono adottando una nomenclatura appropriata. E mi propongo ancora, ponendo in rapporto tali concetti generali con l'adozione di un sistema metrico a quattro unità fondamentali (una di natura elettrica), di mostrare come un tale sistema si presti bene ad agevolare la comprensione dei concetti, e come questi chiariscano il pregio e l'interesse scientifico del sistema.

PRIMA PARTE.

Comincio col ricordare in che consistano le accennate apparenti antinomie.

§ 1. — Da un lato:

1° la concezione relativistica non consente di attribuire allo spazio vuoto proprietà analoghe a quelle dei mezzi corporei elettrici e magnetici (includendo in questa denominazione tutti i corpi considerati nelle loro proprietà magnetiche: diamagnetici, paramagnetici, ferromagnetici). Con la quale attribuzione inevitabilmente si stabilirebbe un riferimento privilegiato tra gli

(1) Loc. cit. (5) b), p. 296.

(2) Presentata nella seduta del 31 maggio 1935.

altri riferimenti inerziali, che devono invece rimanere perfettamente equivalenti tra loro; non consente cioè di parlare, nel caso dello spazio vuoto, di induttività elettrica e d'induttività magnetica nel comune senso delle parole;

2° la diversità della costante dielettrica ϵ per i vari corpi isolanti, che si manifesta come un maggiore o minore aumento di capacità, rispetto a quella che si ha per uguale figura geometrica dei conduttori nel vuoto, *sappiamo* che risulta da un indebolimento del campo di forza elettrica prodotto, in grado maggiore o minore, dalle cariche elementari già presenti nell'isolante, capaci di *spostarsi senza migrare* (migrazione importerebbe conduzione) e neutralizzare così, parzialmente, le cariche comunicate ai conduttori;

3° la diversità della costante magnetica μ per i diversi corpi, che si manifesta come un aumento o diminuzione dei coefficienti di induzione rispetto al valore che si ha per uguale figura geometrica dei *filì* conduttori nel vuoto, *sappiamo* esser prodotta da un rinforzo o indebolimento (rispettivamente per $\mu > 1$ e per $\mu < 1$) del campo elettrodinamico per l'intervento del campo prodotto dalle correnti di Ampère;

4° ciò costringe a considerare ϵ e μ come numeri puri, perchè rapporti tra quantità omogenee: ϵ è il rapporto tra il campo elettrico prodotto da una parte delle cariche (quelle sovente chiamate « elettricità vera ») e il campo prodotto da tutte le cariche (comprese cioè quelle dette « elettricità libera »⁽¹⁾); μ è il rapporto tra il campo prodotto da tutte le correnti (comprese tutte le correnti di Ampère), e quello prodotto dalle correnti che rimangono, escluse che siano le correnti di Ampère locali, che col loro momento costituiscono la locale magnetizzazione.

Numeri puri, dico, finchè si tratti di corpi isotropi, che si generalizzano in omografie vettoriali, se si tratta di corpi anisotropi; ma sempre omografie trasformanti un vettore in un altro vettore ad esso omogeneo.

§ 2. — D'altro lato, in sede di metrologia elettrica, si suole insistere ancora sulla eterogeneità di B e di H, e sopra il concetto che l'induttività μ sia veramente una grandezza fisica, le cui dimensioni vengono convenzionalmente abolite con l'adozione del sistema elettromagnetico di misura, nel quale, convenzionalmente, se ne assume per unità il valore che essa ha nel vuoto, mentre compaiono per ϵ le dimensioni $[L^{-2} T^2]$. Inversamente adottando il sistema elettrostatico vengono abolite le dimensioni di μ , e figurano per ϵ le dimensioni $[L^{-2} T^2]$.

Adottando un sistema a quattro unità, una di natura elettrica, e seguendo tale concetto, μ ed ϵ risultano entrambe dimensionate, e si possono assegnare i loro valori μ_0 ed ϵ_0 nel vuoto, che si è condotti a chiamare rispettivamente « induttività magnetica » e « costante dielettrica » del vuoto.

(1) Ordinariamente si considera al limite tra due isolanti; qui si considera al limite tra isolante e conduttore.

§ 3. — A prima vista l'antinomia si presenta come irriducibile.

E un'ulteriore considerazione sembra togliere la speranza che si tratti di una pura questione di parole: procedendo sempre secondo questa concezione (che ho riferita dopo, ma che storicamente è precedente, non ad Ampère, ma ad Einstein) bisogna ritenere che le costanti ϵ_0 e μ_0 non figurano nelle equazioni di Maxwell per lo spazio vuoto, quali ordinariamente esse si scrivono, solo in conseguenza della particolare convenzione metrica, generalmente adottata, di misurare il campo elettrico in unità elettrostatiche e il campo magnetico in unità elettromagnetiche; e vi compare così solo (come numero di ragguaglio) la costante universale c . Ma senza questa particolare convenzione metrica ϵ_0 e μ_0 debbono comparire entrambe nelle equazioni maxwelliane per lo spazio vuoto, e la velocità di propagazione delle onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

non si può pensare che come relativa a quello stesso mezzo (comunemente detto etere), cui si è attribuito le proprietà fisiche espresse da ϵ_0 e μ_0 ; e si trova chiusa la porta per la teoria della relatività. Infatti in questa teoria, la velocità c della luce nel vuoto è posta quale indipendente da qualsiasi riferimento inerziale, e invece quella

$$\frac{c}{n} \quad \text{con} \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}}$$

in un mezzo corporeo di indice n , è posta come relativa al mezzo stesso, tanto è vero che viene composta mediante la formola relativistica

$$\frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{nv}{c^2}}$$

con la velocità v del mezzo relativo al riferimento adottato, per giungere alla spiegazione della classica esperienza di Fizeau.

§ 4. — A chi accetti la posizione realistica e relativistica indicata in principio, sarebbe facile rigettare senza spiegazioni l'altra posizione come un reliquato delle ideologie faradayane.

È precisamente ciò che non voglio fare in questa Nota. Non è, a mio avviso, il caso di rigettare una *opinione* che si *creda* superata, perchè non è questa questione di *opinioni*. L'Elettrologia nelle sue leggi fondamentali non è materia opinabile, ma positiva; e una divergenza non può consistere che in un malinteso.

Per toglierlo di mezzo, ciò che appunto mi propongo di fare, bisogna ben rammentare il principio generale: che lo stesso fatto fisico può presentarci due quantità eterogenee tra loro, se viene raggiunto dalla esperienza metrica per due vie diverse, pur usando lo stesso sistema di unità; ma bisogna poi badar bene, se così si sono introdotte due diverse misure di uno stesso oggetto fisico, o se invece si sono definiti due diversi enti matematici inerenti a uno stesso fenomeno, ma non rappresentanti uno stesso oggetto fisico. E questo è appunto il caso che ci interessa.

Orbene, io ritengo che coloro, i quali sostengono la eterogeneità tra B e H , in ultima analisi considerino B quale si misura con una esperienza di induzione, oppure (che è lo stesso) di azioni meccaniche su un filo percorso da corrente nota; ed H quale si calcola dal valore noto della corrente, che, circolando in un filo, ne è causa.

Caso tipico; *campo uniforme*:

a) misurazione per mezzo dell'effetto: il momento meccanico M agente in una spira di area piana A ad esso parallela, percorsa da corrente I_1 ci dà (nel vuoto)

$$B = \frac{M}{A I_1};$$

b) calcolo della causa: corrente I_2 circolante nelle spire (n per unità di lunghezza) di un solenoide lunghissimo:

$$H = 4 \pi n I_2 \quad (1).$$

B e H così determinate risultano, senza dubbio, eterogenee. Solo il sistema di misure elettro-magnetiche, stabilito ponendo nel vuoto

$$B = H$$

nasconde tale eterogeneità con una opportuna (?) scelta della unità di corrente.

Ma scrivendo in generale (sempre per il vuoto)

$$B = \mu_0 H$$

μ_0 non è numero puro ma dimensionato.

Su questo possiamo tutti convenire; e convenire anche che la scelta delle unità elettromagnetiche sia opportuna al fine di... non vedere chiara la cosa.

E nemmeno il sistema elettrostatico porterebbe la chiarezza; infatti adottando questo, le dimensioni $[L^{-2} T^2]$ compaiono per μ_0 perchè sono abolite quelle di ϵ_0 , che nell'altro sistema sarebbero esse $[L^{-2} T^2]$.

(1) Quando col coefficiente 4π seguo l'uso comune; perchè qui non mi occupo della « razionalizzazione ».

Solo l'adozione di una quarta unità fondamentale di natura elettrica (qualunque ne sia la specie) lascia alle formule la loro naturale logicità e chiarezza.

§ 5. — Ma la chiarezza raggiunta nelle formule si offusca, nel concetto, se si vuole interpretare questa μ_0 come la misura di una induttività, cioè di una proprietà dello spazio vuoto analoga a quella del ferro, oppure del bismuto, o di un altro corpo qualunque; perchè il vuoto non è un corpo, e non diventa un corpo chiamandolo etere.

Quale è dunque il vero significato di μ_0 ? Per vederlo chiaro bisogna pensare al fatto fisico quale è nella realtà.

Esso consiste nell'azione meccanica che si esercita sul filo conducente I_1 per la presenza del solenoide percorso da I_2 , la quale è espressa dal momento meccanico

$$M = 4 \pi A I_1 I_2 n \mu_0$$

il significato di μ_0 è dunque questo: *la costante universale elettrodinamica*. E tale rimane se la determinazione si fa per mezzo della forza elettromotrice indotta, valendosi della legge di Neumann

$$e = 4 \pi A n \mu_0 \frac{dI_2}{dt},$$

perchè l'equivalenza di due metodi è indubitabile.

Se vogliamo esprimere l'azione meccanica con l'intermediario di un campo vettoriale prodotto dal solenoide ed agente sulla spira, siamo naturalmente condotti ad associare i fattori così:

$$M = (A I_1) \cdot (\mu_0 4 \pi n I_2);$$

la prima parentesi contiene l'espressione del momento elettrodinamico o magnetico della spira, la seconda l'espressione dell'intensità del campo prodotto dal solenoide. E non vi è nessuna ragione di scomporre in due l'associazione dei fattori della seconda parentesi, perchè il gruppo $4 \pi n I$ non ha significato fisico da solo.

La scrittura

$$4 \pi n I_2 = H$$

e

$$B = \mu_0 H$$

sanziona questa inutile scissione.

Abbandoniamola dunque e scriviamo:

$$\mu_0 4 \pi n I_2 = H$$

riservando B al caso in cui vi è ragione di introdurre un secondo campo vettoriale.

Cioè al caso che il solenoide sia ripieno di un mezzo corporeo.

Le correnti di Ampère in questo presenti (le quali, senza fare nessuna ipotesi particolare sul loro andamento, si può dire che sono correnti come la I_2) producono lo stesso effetto come il mutare da n a n' la frequenza delle spire.

Ponendo

$$\mu_p = \frac{n'}{n}$$

(l'indice p ricorda il carattere di numero puro) scriviamo:

$$B = \mu_o 4\pi n' I_2 = \mu_p \mu_o 4\pi n I_o = \mu_p H$$

e a μ_p conserviamo pure il nome di induttività, o di permeabilità magnetica di quel certo corpo; costante questa specifica, < 1 per i corpi diamagnetici, > 1 per i paramagnetici, non costante, ma valore numerico determinato in ogni caso singolo, per i corpi ferromagnetici: coincidente insomma col valore della induttività o permeabilità nel sistema elettromagnetico; quale infine si è nella pratica sempre usata e ancora si usa.

La considerazione della forza elettromagnetica indotta al variare di I_2 è del tutto equivalente a quella ora fatta dell'azione meccanica.

In conclusione ritengo che tutto risulti chiaro e pacifico se consideriamo:

μ_o come costante universale elettrodinamica (grandezza fisica);

μ_p come induttività o permeabilità di un corpo (valore specifico, numero puro).

§ 6. — Le azioni elettrostatiche portano a considerazioni analoghe solo in parte (perchè non vi può essere analogia completa, stante la realtà fisica della carica elettrica, e il carattere puramente fittizio della massa magnetica).

Viceversa è strettissima, come ognun sa, la analogia fra elettrostatica e forze newtoniane.

Teniamo presente dunque la legge di Newton:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

k è la costante di gravitazione universale (grandezza fisica dimensionata), che si può nascondere adottando il cosiddetto sistema astronomico, con due sole unità fondamentali; il che ora non vogliamo fare.

Da questa legge è definito un campo vettoriale di accelerazione, prodotto da m_2

$$a = \frac{F}{m_1} = k \frac{m_2}{r^2}$$

col potenziale

$$-k \frac{m_2}{r} + \text{costante}.$$

Per le azioni elettrostatiche nel vuoto scriviamo la legge di Coulomb:

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ϵ_0 esprime la costante universale elettrostatica (scritta ora al denominatore per seguire l'uso comune), la quale costante si può *nascondere* usando il sistema di misura elettrostatico con tre unità fondamentali, ciò che ora non vogliamo fare; invece supponiamo di usare un sistema a quattro unità fondamentali.

Dalla legge così scritta è definito un campo vettoriale di forza elettrica:

$$E = \frac{F}{q_1} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2}.$$

Se le cariche interagenti sono immerse in un mezzo corporeo isolante indefinito, questo per lo spostamento delle cariche elettriche che contiene, neutralizza parzialmente esse cariche interagenti, riducendo la forza

$$\text{da } F \quad \text{a } \frac{F}{\epsilon_p}$$

(l'indice p ricorda che trattasi di un numero puro) e abbiamo:

$$\epsilon_p E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2}.$$

Il vettore $\epsilon_p E$ si suol chiamare induzione elettrica.

Ovvero possiamo scrivere:

$$E = \frac{1}{\epsilon_p} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2}.$$

È naturale chiamare ϵ_p induttività elettrica o costante dielettrica del corpo che riempie lo spazio, come del resto si è fatto e si seguita a fare nella pratica.

§ 7. — Naturalmente negli sviluppi ulteriori sia elettrostatici che elettrodinamici o magnetici, ϵ_p accompagna ϵ_0 , μ_p accompagna μ_0 ; e niente si

oppone ad associare per semplicità di calcolo l'una e l'altra coppia di fattori ponendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_p \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_p \mu_0 .$$

Ma non vi è nessuna buona ragione per chiamare ε induttività elettrica assoluta, μ permeabilità o induttività magnetica assoluta, anzi tale nomenclatura, per lo spazio vuoto, ove è $\varepsilon_p = 1$, $\mu_p = 1$, porta all'inconveniente di presentare ε_0 e μ_0 sotto l'aspetto di proprietà fisiche del vuoto analoghe alle proprietà fisiche dei corpi, che sono fisicamente interpretabili con la presenza di enti fisici (cariche spostabili, circolanti e rotanti) che sappiamo in essi realmente esistere.

§ 8. — La nomenclatura da me adottata mi sembra la più conveniente per chiarire i concetti; ma, naturalmente, non intendo di attribuire ad essa nessun valore intrinseco: qualunque nomenclatura è ammissibile, purchè si tenga presente che le parole sono usate in un significato del tutto convenzionale, diverso dal loro significato comune.

In questa prima parte ho trattato due casi tipici elementari, nella seconda parte tratterò sommariamente le leggi generali e le relazioni con la teoria della prima relatività.

Patologia. — *Produzione sperimentale di un mioblastoma della lingua di un ratto albino.* Nota preventiva ⁽¹⁾ del Socio B. MORPURGO.

I mioblastomi sono tumori molto rari: nella bibliografia ne sono registrati una cinquantina e non tutti questi sono sicuramente verificati. La genesi dei mioblastomi è del tutto incerta. Secondo alcuni essa dipende da congenita malformazione, secondo altri da iperrigenerazione di fibre muscolari differenziate, danneggiate.

Uno studio accurato di quattro mioblastomi, due benigni e due maligni, tre della lingua ed uno del polpaccio, mi hanno persuaso che la genesi dei mioblastomi non è in tutti i casi eguale e che nei tumori sviluppati non si può trovare prove che essi provengano da trasformazione blastomatosa di prodotti di neoformazione delle fibre muscolari della sede del tumore.

Perciò sono ricorso all'esperimento ed ho scelto per le mie prove i ratti albi di una razza che da circa quaranta anni alleva nel mio Istituto e nella quale, su più che centomila esemplari osservati nel corso dei miei studi, non è stato mai trovato un mioblastoma spontaneamente sviluppato.

Per produrre una reazione formativa in muscoli di questi animali mi sono servito di un estratto di tabacco (mozziconi di sigari forti, fumati), con aggiunta di poche gocce d'olio di vaselina.

I più di questi esperimenti furono fatti con iniezioni nello spessore della lingua.

Su 13 esperimenti, finora in uno mi è riuscito di provocare lo sviluppo di un mioblastoma molto atipico, del tutto identico a quelli dell'uomo.

Le esperienze sono ancora in corso, ma il risultato ottenuto in una basta a provare che certi fattori esterni possono cagionare nelle fibre muscolari striate una reazione formativa, che degenera in blastomatosa. Non si tratta d'iperrigenerazione, sibbene di neoformazione rigenerativa, i cui prodotti, in certe circostanze, si trasformano in mioblasti atipici, con carattere di malignità.

(1) Presentata nella seduta del 31 maggio 1935.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un teorema sulle funzioni di Baire.* Nota di G. SCORZA DRAGONI, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

In questa breve Nota mi propongo di stabilire una proprietà delle funzioni di Baire, atta a completare le caratteristiche di chiusura del loro sistema, fornite dal fatto che ogni funzione, limite di una successione di funzioni di Baire, è anch'essa tale, per definizione.

Per le funzioni di due variabili, la proprietà in discorso, sulla quale ha richiamato la mia attenzione il Picone, è espressa nel seguente teorema:

Se

$$f(x, y)$$

è una funzione di Baire nel quadrato

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

e se per ogni x^0 dell'intervallo

$$0 \leq x \leq 1$$

si indica con

$$\varphi(x^0)$$

il massimo limite di $f(x^0, y)$ nel punto $y = 0$; allora $\varphi(x)$ è una funzione di Baire nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Il teorema si estende alle funzioni di più che due variabili, come vedremo.

La sua dimostrazione sarà resa agevole da un lemma relativo alla proiezione di un insieme di Baire, lemma del quale non sussiste l'equivalente per gli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Anche il teorema non è più vero per le funzioni misurabili: cioè, se $f(x, y)$ si suppone misurabile, $\varphi(x)$ può non essere misurabile.

I. IL LEMMA. — Dico che:

Se

E

è un insieme di Baire contenuto nello spazio

$$S \equiv (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$$

(1) Nella seduta del 31 maggio 1935.

e se

e

è la sua proiezione ortogonale sullo spazio

$$\Sigma \equiv (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0),$$

allora e è ancora un insieme di Baire.

Infatti se E è aperto, e è aperto del pari (rispetto a Σ). Vale a dire, il lemma è esatto, se E è di classe zero⁽¹⁾, nel qual caso e è di classe zero.

Il lemma sarà quindi stabilito, se, ammessolo vero per gli insiemi di classe minore di α ($\alpha > 0$), lo si riconoscerà vero anche per gli insiemi di classe α .

Sia E di classe α . Sia $E_1, E_2, \dots$ una successione di insiemi, di classe minore di α , con

$$E = \lim_{m \rightarrow +\infty} E_m^{(2)}.$$

Sarà allora, per definizione,

$$E = I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \dots$$

se

$$I_m = E_m \cdot E_{m+1} \dots^{(3)} \quad (m = 1, 2, \dots);$$

e

$$e = i_1 \dot{+} i_2 \dot{+} \dots$$

se i_m è la proiezione ortogonale di I_m su Σ ; indi per dimostrare che e è un insieme di Baire, basta dimostrare che tali sono $i_1, i_2, \dots$

Ora, posto

$$I_{m,n} = E_m \cdot E_{m+1} \dots E_{m+n} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots),$$

$I_{m,n}$, come prodotto di un numero finito di insiemi di classe minore di α , è ancora un insieme di classe minore di α ; indi la sua proiezione ortogonale su Σ , diciamola $i_{m,n}$, è un insieme di Baire.

Ma, evidentemente,

$$i_m = \lim_{n \rightarrow +\infty} i_{m,n},$$

indi i_m è un insieme di Baire.

(1) Uniformandomi alla terminologia usata da PICONE nelle lezioni di analisi superiore, tenute all'Università di Roma nell'anno accademico in corso, chiamo di classe zero un insieme aperto; di classe uno ogni insieme non aperto che sia limite di una successione di insiemi aperti ecc.

(2) Una simile successione esiste sempre, per definizione.

(3) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Lipsia, 1918), §§ 115-118.

OSSERVAZIONE - Il lemma non è vero per gli insiemi misurabili secondo Lebesgue, una porzione non misurabile di Σ essendo misurabile (e avendo misura nulla), se considerata come porzione di S .

2. IL TEOREMA. — Premesso questo, passiamo a dare l'enunciato e la dimostrazione del teorema.

Sia

$$f(x_1, \dots, x_p | y_1, \dots, y_q)$$

una funzione di Baire nell'insieme

$$R: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq y_q \leq 1,$$

e per ogni

$$(x^0) \equiv (x_1^0, \dots, x_p^0)$$

dell'insieme

$$r: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_p \leq 1$$

sia

$$\varphi(x^0)$$

il massimo limite di

$$f(x^0 | y),$$

dove $(y) = (y_1, \dots, y_q)$, nel punto

$$y_1 = \dots = y_q = 0;$$

allora $\varphi(x)$ è una funzione di Baire in r ⁽¹⁾.

Supponiamo $f(x | y)$ limitata e per ogni (x) di r indichiamo con

$$\varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

l'estremo superiore di $f(x | y)$ quando

$$0 \leq y_1 \leq \frac{1}{n}, \dots, 0 \leq y_q \leq \frac{1}{n}.$$

Allora è

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) \quad (2);$$

e il teorema sarà dimostrato, non appena avremo visto che

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

(1) Un teorema analogo vale naturalmente per il minimo limite.

(2) Cfr. CARATHÉODORY, loc. cit., § 124.

sono funzioni di Baire; cioè, non appena avremo visto che, scelto ad arbitrio un numero reale

$$k,$$

la porzione

$$e_{n,k}$$

di r , in cui

$$\varphi_n(x) > k,$$

è un insieme di Baire.

Cosa questa immediata.

Infatti, se indichiamo con

$$R_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

la porzione di R in cui

$$0 \leq y_1 \leq \frac{1}{n}, \dots, 0 \leq y_q \leq \frac{1}{n},$$

$e_{n,k}$ è evidentemente la proiezione ortogonale di $E_{n,k}$, se $E_{n,k}$ è la porzione di R_n in cui

$$f(x|y) > k.$$

Ma $E_{n,k}$ è un insieme di Baire, perchè $f(x|y)$ è una funzione di Baire (in R e quindi anche in R_n); indi, in virtù del lemma precedente, anche $e_{n,k}$ è un insieme di Baire.

Il caso che $f(x|y)$ non sia limitata si esaurisce con un ragionamento analogo a quello svolto, oppure approssimando la $f(x|y)$ mediante una conveniente successione di funzioni di Baire limitate.

OSSERVAZIONE. — Se a è una porzione non misurabile di r , e se a_n è la proiezione ortogonale di a sullo spazio $\left(x_1, \dots, x_p, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, l'insieme $A = a_1 + a_2 + \dots$ è una porzione di R di misura $(p+q)$ -dimensionale nulla. Se $f(x|y)$ è uguale ad 1 in A e a zero in $R - A$, allora $f(x|y)$ è misurabile, mentre $\varphi(x)$ non è tale, perchè uguale ad 1 su a e a zero su $r - a$. Il teorema cade quindi in difetto per le funzioni misurabili.

Matematica. — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* — IV. *Funzioni periodicamente variabili.* Nota di L. LABOCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

In conformità a quanto indicato nel preambolo della prima delle mie Note ⁽²⁾ sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue, la terza di esse avrebbe dovuto trattare insieme della integrazione delle funzioni periodiche e di quelle periodicamente variabili. Ragioni di spazio avendo impedito la trattazione di quest'ultima categoria di funzioni nella detta terza Nota, do ora un breve cenno della loro integrazione nella Nota presente.

1. *Funzioni periodicamente variabili.* — Le più semplici funzioni periodicamente variabili sono le serie, le somme dei cui termini sono rappresentabili, come ho già mostrato ⁽³⁾, con integrali definiti di funzioni scalariformi. Data infatti una serie, per es. una serie di potenze, il cui termine generale è $u_n = \varphi(n) x^n$ è chiaro che la funzione

$$(1) \quad y = \varphi(Iv) x^{Iv}$$

nella quale v è la variabile continua i cui valori intieri indicano il numero d'ordine dei termini della serie, è tale che il suo integrale esteso all'intervallo da $v = n + 1$ a $v = n + m + 1$ ⁽⁴⁾ dà la somma di m termini successivi della serie, si ha cioè

$$(2) \quad S_{n+1}^{n+m} u_n = \int_{n+1}^{n+m+1} \varphi(Iv) x^{Iv} dv.$$

Poichè l'integrando resta costante in ogni intervallo unitario ($n \leq v < n + 1$) e l'integrale esteso a questo intervallo ha il valore u_n , l'integrazione è immediata e si ha, per es., per l'intervallo da 0 a v

$$(3) \quad \int_0^v \varphi(Iv) x^{Iv} dv = S_0^{-1+Iv} u_n + \varphi(Iv) x^{Iv} \text{Fr } v$$

(1) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(2) «R. C.», ser. 6^a, vol. XVI, luglio 1932, pp. 27-32.

(3) «R. C.», vol. I, ser. 6^a, maggio 1925, pp. 517-522.

(4) Il numero di ordine di ogni termine è l'intiero che misura l'ascissa dell'estremo sinistro dell'intervallo che ad esso corrisponde, quindi l'intervallo $0 \mid -1$ corrisponde al termine di ordine zero.

il termine con $\text{Fr } v$ al secondo membro annullandosi per tutti i valori interi di v .

2. *Integrali definiti estesi da zero a ∞ .* — L'integrazione poi estesa da 0 a $+\infty$ dà la somma della serie, se essa è convergente, ed appunto sotto forma d'integrali definiti di quest'ultima specie si possono porre i valori di talune classi di numeri razionali, irrazionali o trascendenti dati da serie. Si ha così per esempio:

$$(4) \quad \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{10^i - 1} = a_1 a_2 \dots a_i \int_0^{\infty} 10^{-i(i+1v)} dv = 0, a_1 a_2 \dots a_i a_1 a_2 \dots a_i \dots$$

$$(5) \quad N_1 = \int_0^{\infty} 10^{-(1+1v)!} dv = 0, 110001000000000001 \dots$$

$$(6) \quad N_a = \int_0^{\infty} a 10^{-\frac{1}{2} 1v(1+1v)} dv = a, a0a00a000a00000 \dots$$

$$(7) \quad \log 2 = \int_0^{\infty} \text{Fal } v (1 + 1v)^{-1} dv = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$(8) \quad e = \int_0^{\infty} \{ (1v)! \}^{-1} dv = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$(9) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^{\infty} \text{Fal } v (1 + 21v)^{-1} dv = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Come si scorge la (4) è relativa ad un numero razionale espresso con una frazione decimale periodica ed in essa si deve intendere che alle $a_1, a_2, \dots, a_i$ corrispondono delle cifre da 0 a 9 senza escludere che a due diversi indici possa corrispondere la stessa cifra. La (5) e la (6) si riferiscono a dei numeri irrazionali costruiti col metodo di Liouville, e nella (6) è da intendersi che la a può essere una qualsiasi delle cifre significative. Nella (8) è seguita la convenzione di porre $0! = 1$, e la (9) insieme con la (7) fornisce interessanti esempi di equivalenza fra integrali definiti di funzioni continue e funzioni discontinue, poichè si ha evidentemente:

$$(10) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^{\infty} \text{Fal } v (1+1v)^{-1} dv, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \text{Fal } v (1+21v)^{-1} dv.$$

In modo analogo si giunge alla rappresentazione di talune funzioni definite mediante i loro sviluppi in serie; si ottiene però in questo caso un integrale dipendente da un parametro che è propriamente l'argomento della funzione e si ha così per esempio:

$$(11) \quad e^x = \int_0^{\infty} x^{1\nu} \{ (1\nu)! \}^{-1} d\nu = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(12) \quad \sin x = \int_0^{\infty} \text{Fal } \nu x^{1+21\nu} \{ (1+21\nu)! \}^{-1} d\nu = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$(13) \quad \cosh x = \int_0^{\infty} x^{21\nu} \{ (21\nu)! \}^{-1} d\nu = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(14) \quad \arctan x = \int_0^{\infty} \text{Fal } \nu x^{1+21\nu} (1+21\nu)^{-1} d\nu = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(15) \quad \text{arc tanh } x = \int_0^{\infty} x^{1+21\nu} (1+21\nu)^{-1} d\nu = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

3. *Integrali definiti estesi a un intervallo finito.* — Della (3) considereremo a titolo di esempio due casi semplicissimi: quello di una progressione aritmetica ($\varphi(1\nu) = r1\nu$; $x = 1$) e quello di una progressione geometrica ($\varphi(1\nu) = 1$; $x = r$) estese entrambe all'intero intervallo $-\infty, +\infty$; considereremo cioè le due funzioni:

$$(16') \quad y_a = r1\nu \quad (16'') \quad y_g = r^{1\nu}$$

che danno con l'integrazione

$$(17) \quad \int_0^{\nu} r1\nu d\nu = r \left[\frac{1}{2} I \{ |\nu| - \text{sem sgn}(\nu; 1) \} + \right. \\ \left. + \text{Fr } |\nu| \right] I \{ |\nu| - \text{sem sgn}(\nu; 1) + 1 \}$$

$$(18) \quad \int_0^{\nu} r^{1\nu} d\nu = (r^{\text{sgn } \nu 1|\nu|} - 1)(r^{\text{sgn}(\nu; 1)} - 1)^{-1} r^{\frac{1}{2}(\text{sgn } \nu - 1)} + \text{sgn } \nu r^{1\nu} \text{Fr } |\nu|.$$

Entrambe le funzioni così ottenute sono continue: esse rappresentano delle poligonalì inscritte nelle curve

$$(19) \quad y = \frac{1}{2} r^{\nu} (\nu - 1) \text{sgn } \nu$$

$$(20) \quad y = (r^{\nu} - 1)(r^{\text{sgn}(\nu; 1)} - 1) \text{sgn } \nu r^{\frac{1}{2}(\text{sgn } \nu - 1)}.$$

Facendo nella (16') $r = 1$ la (17) diventa l'integrale della serie dei numeri naturali. Poligonalì di questa specie si presentano nello studio delle

catenarie dei ponti sospesi ⁽¹⁾; di una di esse era già stata data da Darboux ⁽²⁾ l'equazione con notazione alquanto diversa

$$(21) \quad y = [E(x)]^2 + [2\bar{E}(x) + 1][x - E(x)].$$

Dalla (16'') presa insieme con la sua simmetrica (esponente negativo) si ricavano le due funzioni

$$(22') \quad y_1 = \frac{1}{2}(r^{1\nu} + r^{-1\nu}), \quad (22'') \quad y_2 = \frac{1}{2}(r^{1\nu} - r^{-1\nu})$$

che, per il caso particolare di $r = e$ forniscono delle funzioni scalariformi i cui diagrammi sono costituiti da tratti orizzontali poggianti con uno dei loro estremi sui diagrammi del coseno e del seno iperbolici.

4. *Integrali complementari o associati.* — Come ho ricordato in una precedente Nota ⁽³⁾ ogni funzione discontinua F_d è scomponibile nella somma di una funzione continua F_c , il nucleo di essa, e di una costante discontinua C'_d , la funzione dei salti, che si ottiene appunto come sommazione della funzione puntiforme esprimente il valore dei salti; si ha cioè

$$(23) \quad F_d = F_c + C'_d.$$

Se si pone $C_d = -C'_d$, si indica cioè con C_d la funzione dei salti col segno cambiato, si ottiene la relazione

$$(24) \quad F_c = F_d + C_d$$

la quale mostra che ogni funzione continua è invece, ed in infiniti modi, scomponibile nella somma di due funzioni discontinue, aventi i punti di discontinuità in comune, una delle quali resta perfettamente determinata quando l'altra sia assegnata.

Fra tutti i possibili modi di decomposizione è importante quello che consiste nello scegliere come punti di discontinuità i punti di ascissa intera. La funzione continua si risolve allora nella somma di una funzione scalariforme i cui valori corrispondono a quelli che la funzione continua prende per i valori interi della variabile, e di una funzione periodicamente variabile il cui diagramma in ogni periodo, intervallo unitario, è costituito dal corrispondente archetto del diagramma della funzione continua spostato parallelamente all'asse delle y . Si ha cioè la relazione identica

$$(25) \quad F(x) = F(Ix) + \varphi(Fx)$$

(1) V. un mio scritto « Politecnico », nn. 11-12, 1923.

(2) V. es. 22 a p. 29, vol. I di TH. LECONTE ed R. DELTEIL, *Élém. de cal. diff. et de cal. intégral*. Paris, 1926.

(3) « R. C. », vol. XVI, ser. 6^a, 1932, pp. 95-101.

dove si è indicato con $\varphi(\text{Fr } x)$ la differenza $F(x) - F(Ix)$. Le due funzioni $F(Ix)$ e $\varphi(\text{Fr } x)$ le diremo fra loro *complementari* rispetto alla funzione $F(x)$ ed a questa *associate*.

Dalla (25) poi si deduce immediatamente

$$(26) \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^b F(Ix) dx + \int_a^b \varphi(\text{Fr } x) dx$$

relazione che mostra che uno qualsiasi dei tre integrali resta determinato quando siano conosciuti gli altri due.

Per mostrare le applicazioni di cui è suscettibile questa relazione darò di essa tre esempi, relativi: il primo al caso in cui è finito l'intervallo a, b e sono finiti i valori dei tre integrali; il secondo al caso in cui restando finiti i valori dei tre integrali, l'intervallo diventa infinito, ed il terzo al caso in cui essendo infinito l'intervallo d'integrazione sono infiniti anche due degli integrali, il primo ed il secondo.

Si prenda come primo esempio la funzione semplicissima $y = x$, da integrare nell'intervallo $0, t$ (t numero intero). Si ha la decomposizione

$$(27) \quad \int_0^t x dx = \int_0^t Ix dx + \int_0^t \text{Fr } x dx \\ = \frac{1}{2} t(t-1) + \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} t^2.$$

Il risultato è naturalmente ovvio, ma è interessante osservare quel che avviene se invece dell'unità si prende $1/n$ come intervallo periodico di variabilità delle due funzioni discontinue facendo poi tendere n verso ∞ . Si ha in tal caso, posto che sia ax la funzione da integrare

$$(28) \quad \int_0^t ax dx = \int_0^t \frac{a}{n^2} I(nx) dx + \int_0^t \frac{a}{n^2} \text{Fr}(nx) dx \\ = \frac{a}{n^2} \frac{nt(nt-1)}{2} + \frac{a}{n^2} \frac{nt}{2} \\ = \frac{at(nt-1)}{2n} + \frac{at}{2n}.$$

Come si scorge al crescere di n , per $n \rightarrow \infty$, il termine proveniente dall'integrazione della funzione periodicamente variabile tende a zero; l'integrale della funzione continua resta dunque, per n infinitamente grande, espresso dal solo integrale della funzione scalariforme, il quale a sua volta

si semplifica perchè il termine negativo $-at/2n$ si annulla e si ottiene quindi

$$(29) \quad \int_0^t ax \, dx = \frac{1}{2} at^2.$$

Il procedimento ora seguito mostra che dalla (28) discende la effettiva espressione analitica dell'integrale secondo Riemann, ed in pari tempo essa equivale alla esecuzione, per via analitica, della integrazione con la quale Galileo assegnando la legge della caduta dei gravi iniziava la dinamica moderna.

Come secondo esempio si prenda la funzione esponenziale $y = e^{-x}$. Si ha la decomposizione

$$(30) \quad \int_0^\infty e^{-x} \, dx = \int_0^\infty e^{-1x} \, dx + \int_0^\infty e^{-x} \{1 - e^{-x}\} \, dx.$$

I primi due integrali essendo noti,

$$(31) \quad \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1/e \int_0^\infty e^{-1x} \, dx = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots = 1/(1 - e)$$

si ottiene per l'integrale della funzione periodicamente variabile

$$(32) \quad \int_0^\infty e^{-x} \{1 - e^{-x}\} \, dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{1 - e} = \frac{1 - 2e}{1 - e}$$

è come si scorge l'integrale della funzione scalariforme, è in questo caso quello di una particolare progressione geometrica che si presenta nella dimostrazione della formola di Planck che dà la legge della radiazione del corpo nero.

Come terzo esempio si prenda la funzione $y = 1/x$, per la quale si ha la decomposizione

$$(33) \quad \int_1^n \frac{dx}{x} = \int_1^n (1x)^{-1} \, dx + \int_1^n \{x^{-1} - (1 + 1x)^{-1}\} \, dx.$$

In questo caso i due primi integrali tendono all'infinito per $n \rightarrow \infty$, poichè

$$(34) \quad \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n, \quad \int_1^n (1x)^{-1} \, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ma la loro differenza data dal terzo integrale

$$(35) \int_1^n \{ x^{-1} - (1 + Ix)^{-1} \} dx = \int_1^n \frac{-1 + Fr x}{1 + Ix} dx = \int_0^n \frac{-Cm x}{1 + Ix} dx$$

resta finita e si ha

$$(36) \int_0^\infty \frac{-1 + Fr x}{1 + Ix} dx = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)_{n \rightarrow \infty} = C$$

e cioè l'integrale della funzione periodicamente variabile è la costante di Eulero-Mascheroni che viene così espressa anche a mezzo delle funzioni circolari e poligonali, $Fr x$, Ix , la cui generazione geometrica elementare è stata indicata in due precedenti Note ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes.* Nota di TH. MOTZKIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) «R. C.», vol. XIII, ser. 6^a, 1931, pp. 912-917, e «R. C.», vol. XIV, ser. 6^a, 1931, pp. 3-6.

Fisica (Fisica tecnica). — *La decantazione delle sospensioni cristalline.* — II. *Funzioni caratteristiche* ⁽¹⁾. Nota di G. BOZZA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

In una precedente Nota sono state scritte le equazioni differenziali che rispecchiano il fenomeno della decantazione in generale. In esse figurano diverse funzioni che si possono considerare come caratteristiche della decantazione, funzioni che conviene esaminare prima di trattare dei singoli casi cui si riferiscono le equazioni stesse.

La funzione sperimentale $\varphi(c)$, che lega la velocità di caduta libera di un grano a quella di caduta in una sospensione di concentrazione c attraverso la relazione (I, I) ⁽³⁾, è conosciuta per grani di quarzo di diverse grandezze. I dati sperimentali ⁽⁴⁾, per grani di dimensioni tali che per essi valga la legge di Stokes, si rappresentano bene con le due espressioni

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi = \frac{(1-c)^2}{(1-c)^2 + 23.4 c^2} & \text{per } c > 0.222 \\ \varphi = \frac{(1-c)^{5/4}}{(1-c)^{5/4} + 9.30 c^{5/4}} & \text{per } c < 0.222. \end{array} \right.$$

Esse coincidono per $c = 0.222$, che rappresenta la concentrazione di passaggio fra uno stato nel quale i grani sono reciprocamente liberi e uno stato nel quale i grani si disturbano nel loro moto ⁽⁵⁾.

Interpolando sui dati sperimentali, in modo da eliminare il punto di discontinuità nella derivata φ' che risulterebbe dall'impiego delle espressioni sopraindicate, risultano i valori riportati nella seconda colonna della seguente tabella.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano (Cattedra di Termotecnica).

(2) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(3) « Rend. Lincei », vol. XXI, fasc. 10, p. 697. Le relazioni della Nota I saranno richiamate con il loro numero seguito dal numero d'ordine della Nota.

(4) G. BOZZA, « Mem. Lincei », 3 (1929), p. 447, tab. XXII.

(5) Cfr. FINZI e BOZZA, *Resistenza idro ed aerodinamica*. Milano, 1935, p. 380.

c	φ	$(1-c)\varphi$	$c(1-c)\varphi$	$\frac{d\varphi}{dc} = \varphi'$	$\frac{d}{dc} \{ c(1-c)\varphi \} =$ $= c(1-c)\varphi' + (1-2c)\varphi$
1	2	3	4	5	6
0.00	1.000	1.000	0.000	0.00	1.000
0.05	0.806	0.766	0.0383	- 3.93	0.539
0.10	0.627	0.565	0.0565	- 3.20	0.214
0.15	0.483	0.411	0.0616	- 2.60	0.007
0.20	0.369	0.295	0.0590	- 2.09	- 0.113
0.25	0.271	0.203	0.0508	- 1.65	- 0.174
0.30	0.190	0.133	0.0399	- 1.28	- 0.193
0.35	0.129	0.084	0.0294	- 0.94	- 0.175
0.40	0.087	0.052	0.0209	- 0.65	- 0.139
0.45	0.060	0.033	0.0148	- 0.43	- 0.101
0.50	0.042	0.021	0.0105	- 0.27	- 0.068
0.55	0.028	0.013	0.0069	- 0.18	- 0.042

Le funzioni che si ricavano dalla φ e che hanno interesse sono:

$(1-c)\varphi$ che definisce il rapporto fra la velocità di caduta in massa di sospensioni a concentrazione c e quella di caduta libera (colonna 3 della tabella);

$c(1-c)\varphi$ che, moltiplicata per V_1 , definisce la quantità in volume di solido che passa per caduta in massa attraverso una sezione unitaria nell'unità di tempo in una sospensione di concentrazione c (colonna 4);

$\frac{d}{dc} \{ c(1-c)\varphi \} = c(1-c)\varphi' + (1-2c)\varphi$ derivata rispetto a c della funzione precedente, che si calcola facilmente nota che sia la $\varphi' = \frac{d\varphi}{dc}$ (colonne 5 e 6).

L'andamento di queste diverse funzioni è immediatamente visibile nel diagramma riportato. È caratteristica la presenza di un massimo nella $c(1-c)\varphi$ (nel caso considerato per $c = 0.152$), dell'esistenza del quale si vedrà a suo tempo l'importanza. L'esistenza di questo massimo non dipende poi dalla speciale funzione φ ; qualunque sia il materiale decantante, φ ha valori compresi fra 1 e 0, e decrescenti al crescere di c : perciò φ' è sempre negativa. La derivata di $c(1-c)\varphi$, cioè

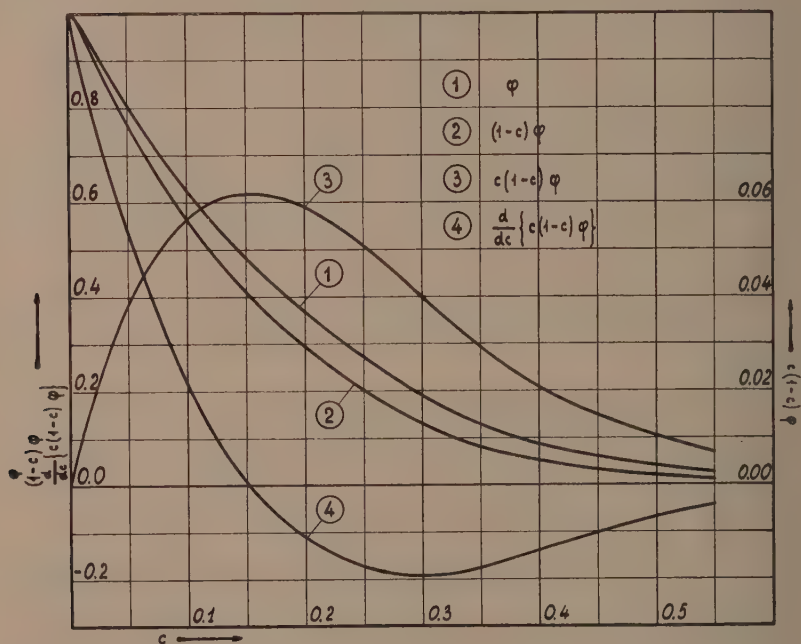
$$(1-2c)\varphi + c(1-c)\varphi',$$

qualunque sia l'andamento della φ si annulla per un valore di concentrazione inferiore od uguale a 0.5; per questo valore corrisponde un massimo

della funzione in questione $c(1-c)\varphi$, massimo inerente alla natura stessa del fenomeno della decantazione.

Il fattore ψ , che abbiamo chiamato fattore di rallentamento, del quale si vedrà l'importanza nei problemi di decantazione discontinua, è una funzione della distanza di un grano dal fondo del recipiente. È noto che, all'avvicinarsi di una sferetta cadente, per la quale valga la legge di Stokes, al fondo del recipiente, essa rimane rallentata perchè la resistenza aumenta: precisamente, secondo Lorentz,

$$(2) \quad R = 6\pi\mu a C \left(1 + \frac{9}{8} \frac{a}{y}\right)$$



essendo a il raggio delle sferetta, y la sua distanza dal fondo, C la velocità, μ la viscosità del liquido (relazione comprovata cinematicamente da Schmiedel)⁽¹⁾. Risulta perciò come velocità di caduta libera in presenza del fondo

$$(3) \quad V_l^* = V_l \frac{1}{1 + \frac{9}{8} \frac{a}{y}}$$

(1) Vedi FINZI e BOZZA cit., pp. 367 e 369, dove pure i richiami bibliografici.

e la funzione ψ per i grani isolati è

$$(4) \quad \psi = \frac{1}{1 + \frac{9}{8} \frac{a}{y}}.$$

Si può, in mancanza di dati ulteriori più precisi, supporre che questo fattore mantenga la stessa espressione di Lorentz anche per un insieme di particelle. In questo caso però si può avere anche la presenza di uno strato di particelle fortemente inspessito presso il fondo, del quale si dovrà tener conto come causa rallentante. La distanza y^* per un grano che cada al disopra di tale strato dovrà essere scelta opportunamente in base alla struttura dello strato, ossia alla distribuzione in altezza della sua concentrazione. Discuteremo questo problema quando si tratterà della decantazione discontinua.

In qualunque modo però sia determinata la distanza attiva y^* , quello che interessa il fattore di rallentamento non è il suo valore effettivo, ma il rapporto fra la distanza stessa e le dimensioni dei grani che possono essere individuate dal loro diametro equivalente D . Se si pone

$$(5) \quad \xi^* = \frac{y^*}{D} = \frac{y^*}{2a}$$

il fattore ψ di Lorentz diviene

$$(6) \quad \psi = \frac{16 \xi^*}{16 \xi^* + 9}$$

espresso nella stessa coordinata adimensionale ξ che figura nell'equazione differenziale della Nota I.

Si supporrà che la relazione sia valida fino a $\xi^* = 0$; l'arresto della caduta avvenga cioè quando il centro della particella cade a livello del fondo o dello strato totalmente inspessito.

Con il valore (6) si ha corrispondentemente

$$(7) \quad \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{144}{(16 \xi^* + 9)^2} \cdot \frac{\partial \xi^*}{\partial \xi}.$$

Quanto sopra verrà applicato in Note successive ai casi di decantazione continua e discontinua più importanti.

Fisica (Fisica tecnica). — *La decantazione delle sospensioni cristalline.* — III. *Decantatori continui cilindrici.* Nota di G. BOZZA, presentata dal Corrisp. L. CAMBI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sugli ossidi di platino di Laffitte*⁽¹⁾. Nota di A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

L'esistenza degli ossidi di platino è stata oggetto di ricerca da parte di molti sperimentatori⁽³⁾: nella letteratura si trovano descritti i composti PtO , Pt_3O_4 (di esistenza incerta), PtO_2 e PtO_3 . In modo particolare recentemente è apparso un lavoro di Laffitte e Grandadam⁽⁴⁾ i quali avrebbero preparato l'ossido PtO allo stato puro sottoponendo del nero di platino all'azione di ossigeno compresso a 8-8,5 atm. e ad una temperatura di 420°-440° per un tempo variabile a seconda della finezza del nero di platino usato. Il prodotto da loro ottenuto, che all'analisi corrisponderebbe al 99,09 % di PtO , si presenterebbe come una polvere nera che a temperatura ordinaria provoca all'aria la combustione dell'idrogeno e del gas illuminante ed è facilmente solubile in acido cloridrico ed in acqua regia; in acido cloridrico al 50 % essa si scioglie in meno di un minuto se si opera in presenza di tracce di acido cloroplatinico.

Precedentemente gli stessi autori avevano studiato l'ossidazione del platino sotto pressione di ossigeno allo scopo di preparare il PtO_2 ⁽⁵⁾. Operando in autoclave in acciaio inossidabile a 450° e a 150° atm. avevano ottenuto un nero contenente 0,1394 gr. di ossigeno per grammo di platino, tenore superiore a quello corrispondente a PtO (gr. 0,0819) ma inferiore a PtO_2 (gr. 0,164); poi hanno seguito l'ossidazione con lo studio della densità di campioni di spugna o di nero di platino ossidati nelle stesse condizioni di temperatura e pressione (450° e 150 atm.) per tempi variabili. L'andamento non lineare della densità in funzione dell'ossigeno assorbito, ha condotto questi autori a ritenere logicamente che nella reazione si abbia la formazione di una miscela dei due ossidi PtO e PtO_2 e a ricercare quindi un metodo per il loro isolamento allo stato puro. Essi hanno osservato che i

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(3) WÖHLER e MARTIN «Z. Elektrochemie», 15, 792 (1909) e «Berichte», 42, 3963 (1909); WÖHLER e FREY, «Z. Elektrochemie», 15, 133 (1909); JÖRGENSEN, «J. Prakt. Chem.», 16, 344 (1877); WÖHLER, «Z. Anorg. Chem.», 40, 450 (1904); DUDLEY, «J. Am. Chem. Soc.», 28, 66 (1902); VON MEYER, «J. Prakt. Chem.», 18, 322 (1878); BRUNCK, «Z. anorg. Chem.», 10, 247 (1895); CH. MARIE, «Compt. Rend.», 146, 477 (1908) e 145, 117 (1907).

(4) «Compt. Rend.», 200, 4 febbraio 1935, p. 456.

(5) «Compt. Rend.», 198 (1934), p. 1925.

prodotti ottenuti sono parzialmente solubili in acqua regia. La parte insolubile filtrata, lavata con alcool e con benzolo ed essicata a 130° – 140° , si presenta come una polvere di colore bleu-nero e di densità 10,2; all'analisi dà una composizione corrispondente a quella di PtO_2 .

Lafitte e Grandadam hanno studiato l'attività catalitica dei due ossidi da loro preparati di confronto ad altri neri, ed hanno osservato che il PtO_2 è un ottimo catalizzatore per l'idrogenazione dei doppi legami $\text{C}=\text{C}$ e $\text{C}=\text{O}$ con attività 2–3 volte superiore a quella di tutti i neri ordinari ed il PtO ha una buona attività catalitica per l'idrogenazione di $\text{C}=\text{C}$ e media invece per quella di $\text{C}=\text{O}$.

Io ho voluto verificare i risultati di questi Autori per vedere se gli ossidi da loro preparati esistessero come composti chimicamente definiti o come composti di assorbimento.

Infatti Wohler⁽¹⁾ già da tempo aveva osservato che la rete di platino assorbe l'ossigeno fra 700 e 900° ; che il nero di platino a circa 450° assorbe da 63 a 77 volte il suo volume di ossigeno e che la spugna di platino scaldata a 420° – 450° in ossigeno elettrolitico trattiene 3,66 % di ossigeno e contiene 43 % del suo peso di ossido PtO .

Le esperienze vennero da me condotte usando del nero di platino ottenuto per riduzione con alluminio, in soluzione acida, dell'acido cloroplatinico e seguendo tutte le indicazioni date dai precedenti autori. Un riscaldamento di questo nero di platino a 420 – 440° con ossigeno a 8,5 atm. prolungato per 24 ore mi ha permesso di ottenere un prodotto che all'analisi ha dato i seguenti risultati:

Peso sostanza	Perdita peso alla calcinazione	o %, teorico per PtO	o % trovato
—	—	—	—
gr. 0,1282	gr. 0,0097	7,57	7,56

Ciò permette di stabilire che la quantità di ossigeno assorbita in queste condizioni corrisponde ad un tenore in PtO nel prodotto del 99,7 %.

Ho successivamente riscaldato un nero di platino, preparato nel modo sopra detto, con ossigeno a 150 atm. e ad una temperatura di 450° per 50 ore. Dopo raffreddamento ho trattato il prodotto con acqua regia, filtrato il residuo insolubile e dopo lavaggio con acqua e successivamente con alcool e benzolo lo ho seccato a 130° . Esso corrisponde a 70 % del prodotto iniziale ed all'analisi dà una composizione corrispondente a quella di PtO_2 , come risulta dai dati seguenti:

(1) « *Berichte* », 36, 3482 (1903).

Peso sostanza	Perdita peso alla calcinazione	o % teorico per PtO_2	o % trovato
gr. 0,1741	gr. 0,0252	14,14	14,13

Entrambi i prodotti da me preparati presentano quindi le caratteristiche descritte da Laffitte e Grandadam.

Per decidere se essi siano o no dei veri composti chimici li ho analizzati röntgenograficamente fotografandoli con un tubo ad anticatodo di ferro. I fotogrammi ottenuti sono risultati perfettamente identici a quelli dati dal nero di platino, però con un minor sbandamento delle linee dovuto ad una maggiore cristallinità del prodotto per effetto del prolungato riscaldamento.

Ho cercato di esaminare questi prodotti anche coi raggi elettronici, che nello studio dei fenomeni superficiali presentano una maggior sensibilità e delicatezza dei raggi X, ma mi è stato impossibile perchè i granuli presentano dimensioni superiori a quelle richieste da questo metodo d'indagine.

I miei risultati mi permettono quindi di concludere che i prodotti preparati da Laffitte e Grandadam non devono essere considerati come composti chimici, ma solo come prodotti di assorbimento superficiale; rispetto all'ossigeno, il platino manifesta cioè le stesse proprietà occludenti che manifesta rispetto a numerosi altri gas e non è quindi possibile pensare, allo stato attuale delle ricerche, ad una vera ossidazione del platino.

Il comportamento del PtO e del PtO_2 di Laffitte rispetto all'acido cloridrico e all'acqua regia può essere interpretato ammettendo che nel primo caso si tratti di ossigeno atomico, e quindi più attivo, e nel secondo di ossigeno molecolare.

Chimica. — *Ricerche nella serie dell'1-cloro-3-4-dinitrobenzolo*⁽¹⁾.
Nota III di A. MANGINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Le esperienze che riferisco, sono il naturale proseguimento delle ricerche⁽³⁾, che ho iniziate da tempo sulla reattività del nitrogruppo, nella posizione 3, dell'1-cloro-3-4-dinitrobenzolo. In questa Nota, mi occupo della reazione di sostituzione verso le seguenti quattro classi di sostanze: nitroaniline, toluidine, aminofenoli, acidi aminobenzoici.

I risultati sperimentali hanno messo in evidenza i fatti seguenti, che ritengo interessante segnalare: 1) la reazione di sostituzione, che ha luogo con relativa facilità con la meta- e para-toluidina, meta- e para-aminofenolo⁽⁴⁾, acidi meta- e para-aminobenzoici, non ha luogo invece con la orto-toluidina, orto-aminofenolo, e acido orto-aminobenzoico; 2) le tre nitroaniline non reagiscono⁽⁵⁾ col dinitrocorpo, anche in soluzione amilica dopo molte ore di ebollizione (circa 36 ore).

Se da una parte — dunque — il nitrogruppo nelle nitroaniline, in qualsiasi posizione esso si trovi, inibisce la reazione di sostituzione, la presenza nella molecola di gruppi decisamente acidi, come l'ossidrilico e il carbossilico, — purché in meta o para- non impediscono la sostituzione stessa; d'altro lato però, se la posizione orto è impegnata — CH₃, OH, COOH — la reazione non ha luogo, ciò che si deve evidentemente ricercare in ragioni di impedimenti spaziali da parte dell'orto sostituito. Rimane pertanto interessante verificare se, con altri reattivi e in particolare amine aromatiche sostituite, la reazione procede normalmente o se si notano gli stessi impedimenti; ho, appunto, ricerche in corso sull'argomento.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Perugia.

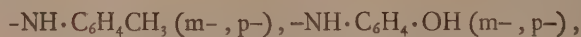
(2) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(3) Nota I e II, «Gazz. Chim. Ital.», 63, 612 (1933); «Ib.», 65, 216 (1935); ved. anche *Su alcune fenilamine sostituite*, com. al V Congresso Chimica pura e applicata, 1935.

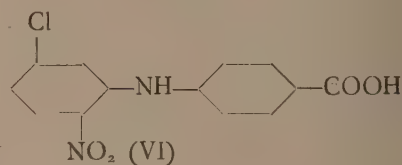
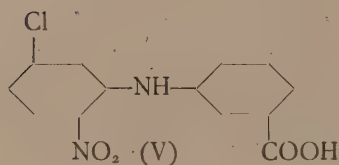
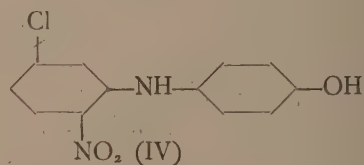
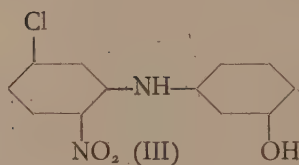
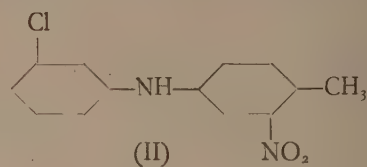
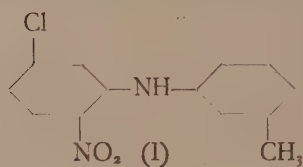
(4) La ortotoluidina reagisce con l'1-cloro-2-4-dinitrobenzolo, per fornire la 2-4-dinitro-2'-metildifenilammina alla temperatura del b. m., solo in presenza di cloruro di zinco come agente condensante, o a 200° in presenza di acetato sodico: «Ber.», 15, 1236 (1882); «Ib.», 36, 30 (1903); «Bull.», (3), 29, 235.

(5) La paranitroanilina, a dire il vero, reagisce coll'1-bromo- e 1-cloro-2-nitrobenzolo, per fornire (entrambi) la 2-4'-dinitrodifenilammina solo ad alta temperatura (200°) ed in presenza di ioduro di rame e carbonato potassico: «J. Chem. Soc.», 95, 582; «D.R.P.», 185663, e «Chem. Zentr.», 1907, 957; evidentemente però queste reazioni — come quella di cui a nota precedente — non possono considerarsi delle vere e proprie reazioni di sostituzione del tipo di quelle da me studiate.

La reazione di sostituzione del nitrogruppo del clorodinitrobenzolo-1-3-4 con i residui



mi ha permesso di ottenere le metil-, ossi- e carbossi-difenilamine-(meta)-cloro-(orto)-nitro- sostituite, che solo attraverso la sintesi indicata possono riuscire di facile preparazione. A queste difenilamine, in analogia a quanto con numerose trasformazioni ho dimostrato ⁽¹⁾, spettano le seguenti strutture:



Le difenilamine in parola si sciolgono facilmente in acido solforico concentrato dando soluzioni debolmente colorate, generalmente in giallo, e con potassa alcoolica - specie a caldo - si colorano in rosso-violetto, come tutte le difenilamine orto-nitro-sostituite. Verso gli acidi nitroso e nitrico, non tutte si comportano ugualmente mancando in particolar modo per le carbossi-, la reazione cromatica che le difenilamine in genere mostrano precisamente verso gli agenti ossidanti ⁽²⁾.

(1) Loc. cit.

(2) Ved. ad es. KERMANN, MICEWITZ, «Ber.», 45, 2641 (1912); WIELAND, «Ib.», 46, 3300 (1913).

PARTE SPERIMENTALE.

2-Nitro-5-Cloro-3'-Metil-Difenilammina (form. I).

La soluzione alcoolica del clorodinitrobenzolo-1-3-4 (a circa il 10 %) viene aggiunta di metatoluidina (rapporto delle molecole 1 : 2) e fatta bollire a ricadere per circa 30/40 min. L'olio rosso, che si ottiene versando la soluzione fredda di reazione in acqua acida per ac. cloridrico, si riprende poi in una massa rosso-granato, che filtrata alla pompa e asciugata su porcellana porosa, viene ridisciolta in alcool e fatta bollire con nero animale. Si satura quindi con etere, e col riposo si separano delle minute tavolette rettangolari, intensamente colorate in rosso-viola a splendore metallico; fonde con decomp. a 192-193 (1).

Analisi:	trov. % Cl =	13,23
per $C_{13}H_{11}O_2N_2Cl$	calc.	13,52.

I rendimenti oscillano sul 12-20 %. Il prodotto è insolubile in etere di petrolio, ligroina, benzolo e acetone, poco solubile in xilolo; si scioglie bene in ac. acetico glaciale e alcool bollenti.

2-Nitro-5-Cloro-4'-Metil-Difenilammina (form. II).

2 grammi di dinitroclorobenzolo vengono sciolti in 20 cc. di benzene, e aggiunti di gr. 2,14 di base (si nota, come al solito, colorazione rosso-ciliegia, e per riscaldamento la base passa in soluzione) e dopo ebollizione di circa 20 minuti si distilla a metà il solvente; per successiva evaporazione si deposita un prodotto rosso, che si cristallizza dall'alcool: aghi rosso vivo, p. f. 125-126 (2).

Analisi:	trov. % Cl =	13,58
per $C_{13}H_{11}O_2N_2Cl$	calc.	13,52.

(1) A seconda della velocità di riscaldamento del bagno ad ac. solf. il p. f. può variare fino a 200°; con riscaldamento molto lento il p. f. è costantemente quello indicato.

(2) Questa sostanza fu già preparata da LAUBENHEIMER [«Ber.», 11, 1157 (1878)] in sol. alcoolica a freddo; più tardi KERMANN e KRAZLER [«Ber.», 34, 1102 (1901)] la prepararono per fusione in presenza di acetato sodico (il p. f. dato dagli AA. citati è 124). La resa della reazione in sol. benzenica (25-30 %) è uguale a quella che si ottiene operando in soluzione alcoolica a caldo (eboll. a ricadere, nelle stesse proporzioni, di circa 20 min.). Come ho potuto verificare in seguito, anche l'idrato di idrazina, reagisce col dinitroclorobenzolo (per fornire la 2-nitro-5-cloro-fenilidrazina, Nota I, loc. cit.) in presenza di solvente inerte (etere di petrolio): e ciò starebbe a dimostrare che la presenza dell'alcool, non è in via « assoluta » necessaria al normale svolgimento della reazione di sostituzione.

2-Nitro-5-Cloro-3'-Ossi-Difenilammina (form. III).

Si fa bollire a ricadere la soluzione alcoolica del dinitrocorpo e meta-aminofenolo (1 : 2 mol.) per circa 50 min. La soluzione fortemente colorata in rosso-bruno, versata in acqua acida per ac. cloridrico, fornisce un precipitato oleoso, il quale per riposo si trasforma in una sostanza peciosa nera. Si estrae con xilolo bollente in presenza di carbone, purificando poi il prodotto dallo stesso solvente: tavolette esagonali lucenti, colorate in arancio, p. f. 143-144, con parziale decomp.

Analisi:	trov. % Cl = 13,30
per $C_{12}H_9O_3N_2Cl$	calc. 13,42.

Il prodotto è facilmente solubile in alcool, e si scioglie in potassa alcoolica con colorazione rosso-carminio; non si colora con cloruro ferrico.

2-Nitro-5-Cloro-4'-Ossi-Difenilammina (form. IV).

Si opera come per il composto precedentemente descritto facendo bollire mezz'ora; e il prodotto grezzo, che precipita allo stato oleoso per poi rapprendersi in una massa peciosa nerastra, si purifica dallo xilolo e infine da ligroina: aghetti gialli p. f. 141-142.

Analisi:	trov. % C = 54,47; H = 3,60
per $C_{12}H_9O_3N_2Cl$	calc. 54,40; 3,40.

I rendimenti, che per il meta-composto prima descritto, sono scadenti, si aggirano ora sul 50 %. Con potassa alcoolica si colora in rosso-bruno, e con cloruro ferrico non assume alcuna colorazione caratteristica.

2-Nitro-5-Cloro-3'-Carbossi-Difenilammina (form. V).

La reazione si fa procedere in soluzione alcoolica (1 : 2 mol. di acido), prolungando il riscaldamento per circa 10 ore; il prodotto, che cristallizza per raffreddamento con resa del 50/60 %, si purifica dall'alcool: aghi arancioni, appiattiti, fondenti a $240\frac{1}{2}$ -241.

Analisi:	trov. % Cl = 12,06
per $C_{13}H_9O_4N_2Cl$	calc. = 12,13.

Questa carbossidifenilammina è poco solubile nella potassa acquosa, carbonato sodico e idrato ammonico a freddo, più facilmente a caldo; solubile invece facilmente nella potassa alcoolica con colorazione violetta.

2-Nitro-5-Cloro-4'-Carbossi-Difenilammmina (form. VI).

Si opera come per il composto precedentemente descritto, solo che la ebollizione si deve protrarre per circa 18 ore. Per raffreddamento della soluzione alcoolica precipita il prodotto di reazione, che si purifica cristallizzando da alcool amilico, in presenza di carbone animale: tavole arancione, p. f. 270-272 con decomp.

Analisi:	trov. % C = 53,62 ; H = 3,06
per $C_{13}H_9O_4N_2Cl$	calc. 53,33 ; 3,30.

La resa della reazione è del 60 % circa; il prodotto si comporta come il meta derivato.

Le ricerche continuano.

Chimica. — *La suscettività magnetica degli ossidi misti di Neodimio e Praseodimio e Neodimio e Samario.* Nota di L. MAZZA, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sull'azione dell'insulina nei colombi digiunanti*⁽¹⁾. Nota di D. GIGANTE, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Con precedenti esperienze su colombi⁽³⁾ abbiamo dimostrato, che pure questi animali permettono di distinguere molto bene nel processo dell'inanizione le tre fasi o periodi, che L. Luciani⁽⁴⁾ segnalò in base a osservazioni fatte sia sul digiuno di cani e sia studiando il digiuno del Succi: il breve periodo iniziale *della fame*, il lungo periodo d'*inanizione fisiologica*, e infine il terzo dell'*inanizione morbosa* o della *crisi*. Anche nel caso dei colombi, sia giovani (di 3-5 mesi), che adulti, come ammette il Luciani pei cani o pel digiuno umano, il decorso della curva del peso, che durante il più lungo periodo dell'inanizione fisiologica è assai regolare, sicchè si ha

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1935.

(3) G. GIGANTE, *Contributo alla conoscenza della fase critica del digiuno secondo Luciani*. « Riv. di Pat. sper. », 1935.

(4) L. LUCIANI, *Fisiologia dell'uomo*. Soc. Editrice Libreria, 5ª ed., vol. V, cap. 1, 1921.

una discesa graduale (grazie a « congegni regolatori » [Luciani] delle perdite) durante il periodo finale (della crisi) subisce una brusca variazione, per un crollo del peso, che è giustificato — secondo lo stesso Luciani — dal logorio dei « congegni regolatori » suddetti. Noi abbiamo eseguito un minuto studio del comportamento di questa terza fase nei colombi, e rimandiamo per dettagli al lavoro originale. Qui ci limitiamo a rilevare, che detta fase della crisi ci risulta caratterizzata, oltrechè dalla brusca caduta del peso corporeo, anche da modificazioni della temperatura cloacale, nonché da variazioni dei movimenti respiratori e delle pulsazioni cardiache.

Dalle nostre numerose esperienze sui colombi digiunanti riportammo l'impressione che, col passaggio dell'animale dalla fase fisiologica a quella critica, dovesse in effetti coincidere, oltre la brusca caduta del peso, anche un complesso di modificazioni interne, connesse col « logorio dei congegni regolatori », e tali da giustificare la designazione del suddetto periodo come particolarmente critico. Ci siamo pertanto proposto di indagare, se ciò corrispondesse a realtà, escogitando condizioni adatte per un serio accertamento. A tale scopo ci è sembrato opportuno riportarci a ricerche eseguite già nel Laboratorio di G. Amantea: V. Zagami^(1,2), iniettando a colombi normali dosi relativamente molto elevate di insulina, non aveva ottenuto mai convulsioni; noi stessi⁽³⁾, misurando la resistenza di colombi normali all'insulina, siamo riusciti a provocare convulsioni insuliniche solo con dosi superiori alle 500 U. Cl. pro chilo; mentre invece G. Martino⁽⁴⁾, sperimentando su colombi, che avevano digiunato fino a un limite sempre spinto fino alla fase critica o oltre, aveva ottenuto nettissime convulsioni ipoglicemiche anche con piccole dosi di insulina.

Fondandoci su tali fatti, ci è sembrato opportuno precisare, se la notevole e accertata insulin-resistenza dei colombi normali durante il digiuno diminuisse gradualmente, oppure bruscamente crollasse in coincidenza col manifestarsi della fase critica.

Tralasciando le prove preliminari, riferiremo di 21 esperienze su 15 colombi.

Si sono utilizzati animali in ottime condizioni: 7 giovani (di 3-5 mesi) e 8 adulti, ma non vecchi (cioè di circa un anno di età). Ci hanno corrisposto ugualmente bene l'insulina Lilly e quella Meister-Lucius, che sempre abbiamo somministrato per iniezione nei pettorali. Durante il digiuno l'acqua

(1) V. ZAGAMI, *Contributo alla conoscenza dell'azione dell'insulina negli uccelli*. « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. », 1927, 2, 541.

(2) V. ZAGAMI, *Contributo alla conoscenza dell'azione dell'insulina con particolare riguardo alla sindrome ipoglicemica*. « Arch. Fisiol. », 1930, 28, 339.

(3) D. GIGANTE, *Sul limite di resistenza del Colombo all'insulina*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XIX, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 12, 1934.

(4) G. MARTINO, *Sull'azione dell'insulina nei colombi digiunanti*. « Boll. Soc. Ital. di Biol. Sper. », 1927, 2, 545.

fu sempre lasciata a volontà. Gli animali, dopo iniettata l'insulina, furono sempre bene sorvegliati, anche per più di 12 ore; ottenute le convulsioni, si rialimentarono con cibo misto appropriato. In alcuni fu pure iniettato glucosio nei pettorali (2 cc. di una soluzione al 50 %). I tre colombi, nei quali si decise di somministrare insulina prima dell'entrata in crisi, furono sottoposti a digiuni preliminari, allo scopo di fissare il comportamento di ciascun animale durante l'inanizione.

Riassumiamo schematicamente nell'annessa tabella i dati raccolti.

I nostri risultati confermano pienamente le conclusioni di G. Martino, secondo cui i colombi, nella fase critica dell'inanizione, a differenza dei normali, presentano convulsioni anche con piccole dosi di insulina. Infatti nei colombi 1 (esp. 1), 3 (esp. 4), 4 (esp. 5), 5 (esp. 6), 6 (esp. 7), 10 (esp. 11), 11 (esp. 12) e 15 (esp. 21), abbiamo ottenuto convulsioni con 2 U. Cl. in 1ª giornata di crisi. Al contrario l'iniezione di 1 U. Cl. di insulina, bene tollerata, in 1ª giornata di fase critica, dai colombi 2 (esp. 2), 3 (esp. 3), 12 (esp. 13), ha provocato invece convulsioni, in 2ª giornata di detta fase, nei colombi 7 (esp. 8), 9 (esp. 10), 12 (esp. 14). Dimostrativi ci sembrano il Colombo 3, che nell'esp. 3 e in 1ª giornata di crisi, con 1 U. Cl., non ebbe disturbi degni di nota, mentre nell'esp. 4, nelle stesse condizioni sperimentali, ebbe convulsioni con 2 U. Cl.; inoltre il Colombo 12, che nell'esp. 13 e in 1ª giornata di crisi tollerò bene 1 U. Cl., mentre nell'esp. 14, con la stessa dose, ebbe convulsioni in 2ª giornata di fase critica; ed infine anche il Colombo 8 (esp. 9), in cui ottenemmo convulsioni con 1 $\frac{1}{2}$ U. Cl. di insulina iniettate la sera tra la 1ª e la 2ª giornata di crisi.

Risultati corrispondenti hanno fornito colombi giovani ed adulti. Ma siccome i giovani presentano la crisi dopo una perdita percentuale di peso molto più elevata che non gli adulti⁽¹⁾, ne segue ovviamente che in essi deve precedere una più rilevante liquidazione di materiali di riserva, rispetto agli adulti, prima che piccole dosi di insulina divengano atte a provocare convulsioni.

I fenomeni convulsivi insorsero dopo 1-7 ore; furono in ogni caso precedute da un netto periodo preconvulsivo, in cui l'animale giaceva astenico, con arti paretici, e si manifestarono come accessi violenti, più volte ripetuti, con opistotono, iperestensione degli arti inferiori, spiegamento a ventaglio delle ali, codrione eretto e boccheggiamenti. Accertate le convulsioni, in 9 casi su 12, iniettammo glucosio (1 gr. circa, ripetendo talora la dose dopo 2-3 ore). Si ebbe sempre effetto curativo, con scomparsa delle convulsioni dopo 10'-15' circa. Ma nonostante tale azione del glucosio, e benché gli animali fossero con cura rialimentati, tutti morirono nel giro delle 12 ore successive, senza più rappresentare convulsioni. Invece i tre colombi,

(1) D. GIGANTE, loc. cit.

in cui, a scopo di confronto, non si intervenne con glucosio, morirono dopo 30' circa dai primi accessi convulsivi, che si ripeterono fino alla morte.

Il glucosio vale dunque a curare lo stato convulsivo da insulina, nei colombi digiunanti, ma non basta, neppure se associato ad alimento, ad assicurare la sopravvivenza degli animali. Ciò concorda con osservazioni analoghe di V. Zagami e U. Saltalamacchia⁽¹⁾, su conigli e ratti molto denutriti.

Accertata la differenza di comportamento tra colombi normali e colombi in fase critica dell' inanizione, restava da provare se la notevole insulino-resistenza iniziale di tale animale, nel digiuno, degradasse lentamente, ovvero crollasse bruscamente al presentarsi della crisi. Abbiamo sperimentato a tal fine sui colombi 13, 14 e 15, ma nonostante si somministrassero, in prossimità della crisi, rispettivamente dosi di insulina di 5 U. Cl., di 20 U. Cl. e di 50 U. Cl., non si riuscì mai a provocare alcun fenomeno convulsivo apprezzabile. Particolarmente interessante ci sembra il Colombo 15, che nell'esp. 20, in prossimità della fase morbosa, sopportò 50 U. Cl. di insulina, mentre nell'esp. 21, in 1ª giornata di crisi, presentò convulsioni con 2 U. Cl.

Il complesso delle esperienze riferite, più che una graduale diminuzione della tipica insulino-resistenza del Colombo durante il digiuno, induce evidentemente ad ammettere un vero e proprio tracollo della medesima, in coincidenza colla fase critica dell' inanizione. E ciò senza dubbio avvalorata la convinzione, già espressa, che precisamente la suddetta fase critica o morbosa del digiuno, caratteristicamente rivelata dal crollo del peso corporeo, in effetti deve corrispondere a svariate e complesse modificazioni interne funzionali, che giustificano il « logorio dei congegni regolatori » (Luciani), nonché la scomparsa di resistenze organiche.

(1) V. ZAGAMI e U. SALTALAMACCHIA, *Contributo alla conoscenza dell'azione del glucosio nella sindrome ipoglicemica da insulina*. « Arch. Fisiol. », 1927, 25, 539.

TABELLA.

Esperienza	Colombo	Età	Peso all'inizio del digiuno	Peso alla fine del digiuno	Peso perduto nel digiuno	Perdita percentuale di peso	Durata del digiuno in giorni	Giornata in cui fu iniettata l'insulina	Insulina iniettata		<i>Osservazioni</i>
									U. Cl. com-ple-siva	U. Cl. pro-chilo	
1 ^a	1 ^o	Adulto	gr. 380	gr. 250	gr. 130	34,2%	14	1 ^a giornata di fase critica	2	8	Fenomeni convulsivi dopo 6 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 12 ^h dagli accessi convulsivi.
2 ^a	2 ^o	»	360	260	100	27,7 »	8	»	1	3,8	L'animale tollera bene la dose somministrata: non accessi convulsivi.
3 ^a	3 ^o	»	370	270	100	27 »	9	»	1	3,7	L'animale tollera bene la dose somministrata: non accessi convulsivi.
4 ^a	»	»	300	210	90	30 »	10	»	2	9,5	Fenomeni convulsivi dopo 5 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 3 ^h dagli accessi convulsivi.
5 ^a	4 ^o	»	430	300	130	30,2 »	11	»	2	6,6	Fenomeni convulsivi dopo 5 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 11 ^h dagli accessi convulsivi.
6 ^a	5 ^o	Giovane	400	230	170	42,5 »	17	»	2	8,7	Fenomeni convulsivi dopo 2 ^h 1/2 dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 3 ^h dagli accessi convulsivi.
7 ^a	6 ^o	»	430	260	170	39,5 »	18	»	2	7,6	Fenomeni convulsivi dopo 5 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 10 ^h dagli accessi convulsivi.
8 ^a	7 ^o	»	400	240	160	40 »	12	2 ^a giornata di fase critica	1	4,1	Fenomeni convulsivi dopo 1 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 3 ^h dagli accessi convulsivi.
9 ^a	8 ^o	»	335	185	150	48 »	18	La sera tra la 1 ^a e la 2 ^a giornata di fase critica	1,5	8,6	Fenomeni convulsivi dopo 3 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 5 ^h dagli accessi convulsivi.
10 ^a	9 ^o	»	390	220	170	43,5 »	19	2 ^a giornata di fase critica	1	4,5	Fenomeni convulsivi dopo 3 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 10 ^h dagli accessi convulsivi.

Esperienza	Colombo	Età	Peso all'inizio del digiuno	Peso alla fine del digiuno	Peso perduto nel digiuno	Perdita percentuale di peso	Durata del digiuno in giorni	Giornata in cui fu iniettata l'insulina	Insulina iniettata		<i>Osservazioni</i>
									U. Cl. complessiva	U. Cl. pro chilo	
11 ^a	10 ^o	Giovane	370 gr.	225 gr.	145 gr.	39,1 %	13	1 ^a giornata di fase critica	2	9,3	Fenomeni convulsivi dopo 2 ^h 1/2 dall'iniezione. Non si inietta glucosio: s'imbecca alimento. Morto dopo 30' dal presentarsi degli accessi convulsivi.
12 ^a	11 ^o	»	325	200	125	38,4 »	15	»	2	10	Fenomeni convulsivi dopo 2 ^h dall'iniezione. Non si inietta glucosio: s'imbecca alimento. Morto dopo 30' dal presentarsi degli accessi convulsivi.
13 ^a	12 ^o	Adulto	360	280	80	22,2 »	7	»	1	3,5	L'animale tollera bene la dose somministrata: non astenia, non fenomeni convulsivi.
14 ^a	»	»	350	250	100	28,5 »	8	2 ^a giornata di fase critica	1	4	Fenomeni convulsivi dopo 3 ^h dall'iniezione. Si inietta glucosio e si dà alimento. Morto dopo 5 ^h dagli accessi convulsivi.
15 ^a	13 ^o	»	340	250	90	26,4 »	8	1 ^a giornata di fase critica	—	—	Non si inietta insulina, si dà alimento. Si riprende.
16 ^a	»	»	350	280	70	20 »	7	Alla vigilia della fase critica	5	17,8	L'animale tollera bene la dose somministrata: non astenia, né fenomeni convulsivi.
17 ^a	14 ^o	»	470	350	120	25,5 »	9	1 ^a giornata di fase critica	—	—	Non si inietta insulina, si dà alimento. Si riprende.
18 ^a	»	»	510	407	103	20,2 »	9	Alla vigilia della fase critica	20	39,2	L'animale tollera bene la dose somministrata: non astenia, non fenomeni convulsivi.
19 ^a	15 ^o	»	500	380	120	24 »	11	1 ^a giornata di fase critica	—	—	Non si inietta insulina, si dà alimento. Si riprende.
20 ^a	»	»	500	400	100	20 »	10	Alla vigilia della fase critica	50	100	L'animale tollera bene la dose somministrata: non astenia, non fenomeni convulsivi.
21 ^a	»	»	500	350	150	30 »	22	1 ^a giornata di fase critica	2	5,7	Fenomeni convulsivi dopo 7 ^h dall'iniezione. Non s'inietta glucosio: s'imbecca alimento. Morto dopo 35' dal presentarsi degli accessi convulsivi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE annuncia la morte del Socio Straniero UGO DE VRIES e rievoca brevemente la figura dell'illustre Scienziato scomparso, formulando il voto che qualcuno dei Soci più competenti nelle materie che il de Vries professò, tenga di lui, in una delle prossime sedute, una degna commemorazione.

Comunica infine che con recente decreto Reale sono stati nominati Soci Nazionali dell'Accademia i proff. LUIGI BERZOLARI e UGO AMALDI, S. E. ARTURO CROCCO, l'ammiraglio ALBERTO ALESSIO, il Sen. EMANUELE SOLER, S. E. CARLO VALLAURI, S. E. ENRICO FERMI, S. E. FRANCESCO GIORDANI, i professori RAMIRO FABIANI e GAETANO QUAGLIARIELLO, S. E. PIETRO RONDONI.

A tutti i nuovi eletti invia il saluto cordiale dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. BORDONI presenta a nome della Associazione Ottica Italiana e del R. Istituto Nazionale di Ottica, gli « Atti del I Congresso Nazionale di Ottica ». Rileva come la importanza del volume dipenda sia dalla attestazione concreta che esso fornisce della rinascita in Italia, in buona parte sotto gli auspici del R. I. N. D. O, degli studi di ottica applicata, sia del valore intrinseco di parecchi dei lavori contenuti. Illustra brevemente i più importanti fra questi lavori, uno dei quali costituisce una felice continuazione dell'opera, nel campo ottico, che MOSSOTTI svolse oltre ottanta anni or sono.

Il Corrisp. ABETTI presenta all'Accademia un volume contenente le « Immagini spettroscopiche del bordo solare osservate a Catania, Dubossari (Romania), Madrid, Zurigo negli anni 1929-1930 », pubblicate per cura del R. Osservatorio di Arcetri sotto gli auspici della Unione Astronomica Internazionale. Ricorda che questa pubblicazione è stata iniziata fino dal 1869 dal Respighi qui in Roma e continuata dal Secchi, Tacchini, Riccò. Tranne un breve intervallo degli anni di guerra le « Immagini » sono complete da quell'anno fino al 1930, ed hanno portato a conclusioni notevoli sulla distribuzione e migrazione delle protuberanze che si osservano ai bordi del sole. Presenta anche alcune Note che fanno parte del Fasc. 53 dell'Osservatorio

di Arcetri in corso di stampa, contenenti ricerche eseguite nello scorso anno fra le quali una alla Torre solare, che prova un risultato teorico già previsto da qualche tempo, cioè a dire che la temperatura del sole deve essere maggiore ai poli che non all'equatore. Inoltre ricerche su stelle doppie spettroscopiche eseguite dal dott. Colacevich all'Osservatorio di Lick in California, dove si trova presentemente.

Il Socio BIANCHI annunzia l'avvenuta pubblicazione del volume VI delle *Opere* di G. SCHIAPARELLI, che è dolente di non poter presentare personalmente, non essendo ancora pervenuto all'Accademia.

Il Socio SACCO presenta un suo volume su « Le Alpi » e ne parla.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli Atti Accademici i Soci GIORGI, MORPURGO, PUCCANTI, ROLLA, SCORZA, SEVERI, SOMIGLIANA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 31 maggio 1935

- ABETTI GIORGIO. — Immagini spettroscopiche del bordo solare osservate a Catania, Dubosari, Madrid, Zurigo negli anni 1929 e 1930. Firenze, 1935. 8°, pp. 1-12.
- ABETTI G. e CASTELLI I. — Intensità centrali delle righe dei metalli e del cianogeno nello spettro del sole al centro e ai lembi. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Volume VIII, n. 4). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-15.
- Western Surgical Association. — Names of surgical operations. Compiled and arranged by the W. S. A. through its special Committee. Minnesota, 1935. 8°, pp. I-XX, 1-102.
- Associazione ottica italiana. — Atti della 1ª riunione dell'Associazione. Firenze, 21-24 maggio 1934-XII. Annuario 1934-1935, anno XII-XIII. Firenze, 1934. 8°, pp. 1-518.
- Atti del III Congresso Nazionale di Nipologia. Perugia 20-23 settembre 1932. Varallo Sesia, 1934. 8°, pp. 1-390, I-VIII.
- CASTELLI I. — Vedi ABETTI G.
- COLACEVICH A. — Provisional elements of the spectroscopic binary ζ *Phoenicis* and ν *Octantis*. (Reprinted from the «Publications of the Astronomical Society of the Pacific». Vol. 47, pp. 84-88). S. l. 1935. 8°.
- COLACEVICH A. e FRACASTORO. M. G. — Osservazioni di stelle occultate dalla luna (1934). (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Volume VIII, n. 4). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-11.
- FAVARO GIUSEPPE. — Vedi Pensa ANTONIO.
- FRACASTORO M. G. — Vedi COLACEVICH A.
- GUMBEL E. J. — Les plus grands âges en Suisse. (Extr. du «Journal de statistique et Revue économique Suisse». 70^e année, fascicule 4, 1934, pp. 601-614). Lyon, 1934. 8°.
- PENSA ANTONIO e FAVARO GIUSEPPE. — Trattato di anatomia sistematica. Vol. I. Torino, 1933. 8°, pp. 1-668.
- SACCO FEDERICO. — Le Alpi. Milano, Touring Club Italiano, 1934. 8°, pp. 1-697.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 giugno 1935 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes.* Nota di TH. MOTZKIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Dans cette communication nous continuerons à poursuivre les considérations contenues dans notre Note récente « Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes » ⁽²⁾. En nous appuyant seulement sur le § 1 de la Note citée, nous démontrerons de nouveau et d'une façon indépendante, pour le cas d'un ensemble borné, son théorème 1 qu'un ensemble plan doit être convexe, si chaque point extérieur a sur lui une seule projection ⁽³⁾. Mais notre objet est surtout de préciser nos résultats antérieurs par la déduction du

THÉORÈME A. — *Si la frontière extérieure d'un ensemble fermé et borné E n'est pas un ovale (donc p. e. si E (borné et non-convexe) n'a qu'un seul domaine complémentaire), alors il y a un $\rho_0 > 0$ tel que pour chaque $\rho > \rho_0$ il existe (dans le domaine complémentaire infini unique F de E) au moins un point extraordinaire ⁽³⁾ relatif à E ayant la distance ρ de E.*

Le terme *frontière extérieure* signifie la partie de la frontière de E qui forme la frontière de F; *ovale* s'appelle la frontière d'un ensemble convexe borné.

(1) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(2) Ces « Rendiconti », vol. XXI, pp. 562-567.

(3) Pour la définition de cette notion, v. le § 1, loc. cit. (2). *Addition pendant l'impression.* Je viens de voir que le théorème 1 de ma Note citée a été trouvé, d'une autre manière et avec d'autres généralisations, par M. BUNT dans son intéressante thèse (Amsterdam, 1934).

Dans un *appendice*, nous traiterons une autre question concernant les points extérieurs à un ensemble plan et leurs projections sur lui.

2. Le théorème 1 cité (pour un ensemble E borné) suit immédiatement du théorème A, excepté (tout au plus) dans le cas où il existe un ou plusieurs domaines complémentaires bornés G de E . Mais nous pouvons montrer l'existence d'un point extraordinaire dans chacun des G par la voie directe suivante.

Considérons tous les cercles d'appui⁽³⁾ K_0 centrés dans G . On voit facilement (par un bien-known théorème de Weierstrass) qu'à chaque G correspond un K_0 maximum (au moins). Aucun cercle C centré dans un tel K_0 et ayant le même rayon que ce K_0 ne pourra être tout extérieur à E ; le croissant formé par C et K_0 et contenu dans C contiendra donc au moins un point R de E . En faisant approcher le centre de C du centre de K_0 sur un rayon fixe r de K_0 , les points R auront un point d'accumulation (au moins) sur la demi-circonférence de K_0 dont le milieu est l'extrémité de r . Cela étant vrai pour chaque r et par conséquence pour chaque demi-circonférence de K_0 , K_0 doit avoir au moins deux points communs avec E . Le centre de chaque K_0 maximum est donc un point extraordinaire.

3. Dans la démonstration du théorème A nous nous appuyerons sur le
LEMME. — *La frontière extérieure d'un ensemble plan, fermé et borné E est ou bien un ovale ou bien il existe au moins un pont sur E.*

Le terme⁽¹⁾ *pont* (sur E) signifie un segment situé sur une droite d'appui de E et dont les extrémités seules appartiennent à E .

Ce lemme peut être établi comme suit: si la frontière extérieure de E n'est pas un ovale, c'est-à-dire que la réunion de E avec tous ses ensembles complémentaires bornés G n'est pas convexe, alors il y a évidemment un point P_1 de F situé sur un segment avec extrémités en E . Un tel P_1 appartient au plus petit ensemble convexe E^* contenant E . Joignons P_1 par un chemin en F avec un point P_2 extérieur à E^* , et soit P_0 le premier point de E^* qu'on rencontre sur ce chemin, si on le parcourt en partant de P_2 . E^* étant la réunion de tous les aires de triangles (dégénérés ou non) avec sommets en E , et P_0 se trouvant sur la frontière de E^* , P_0 sera situé sur un segment s ayant ses extrémités en E , à savoir sur un côté d'un triangle avec sommets en E qui contient P_0 . La droite contenant s est évidemment une droite d'appui de E et contient donc un pont sur E .

4. Passons à la démonstration du théorème A. Le lemme précédent nous assure de l'existence d'un pont AB sur E et d'un demi-plan ouvert Π , limité par la droite AB et extérieur à E . Soit M un point du segment

(1) Dû à M. AMIRÀ.

fermé AB et m la demi-droite ouverte perpendiculaire à AB érigée en M et située dans Π . Faisons approcher de E, en partant de l'infini, un cercle centré sur m à diamètre fixe $2r > \overline{AB}$. Ce cercle sera évidemment pour une distance e (et une seule) de son centre à M un cercle d'appui K_0 relatif à E. De l'unicité de e on conclut facilement que e est une fonction continue de $\overline{AM}$, égale à r seulement pour $M = A$ et $M = B$; pour d'autres M, on a $0 < e < r$ et il y a deux points d'intersection $U \neq V$ de K_0 avec le segment fermé AB.

Pour M variable sur ce segment, la fonction continue e de $\overline{AM}$ a une valeur minimum e_r qui dépend de r . Soit C_r au centre P_r , situé sur m_r , un cercle correspondant à ce minimum; m_r passe par M_r , milieu de $U_r V_r$. En laissant r fixe et faisant approcher M de M_r sur AB, c'est-à-dire K_0 de C_r , on voit à l'aide des croissants formés par K_0 et C_r , à peu près comme plus haut (au n. 2), que C_r doit avoir avec E au moins un point en commun sur chacune des demi-circonférences fermées découpées par la droite $P_r M_r$. Nous en déduisons que le point P_r n'est ordinaire relatif à E que si sa projection $Q_r = Q(P_r)$ sur E est située sur la droite $P_r M_r$.

On pourrait donc, si le théorème A était faux, trouver une suite $r_v \uparrow \infty$ ($v = 1, 2, \dots$) telle que P_{r_v} soit ordinaire et que Q_{r_v} soit donc toujours situé sur $P_{r_v} M_{r_v}$ et même telle que la distance $\overline{AM_{r_v}}$ croisse (ou décroisse) d'une façon monotone quand v croît. Cette suite étant fixée, nous décrivons par U_{r_v} et V_{r_v} le cercle Γ , centré sur m_{r_v} , de rayon r_{v+1} ; alors Γ sûrement n'aura pas de points communs avec E. La distance g du centre de Γ à M_{r_v} est donc $> e_{r_{v+1}}$; il s'en suit, en vertu de

$$4r_{v+1}^2 = 4g^2 + \overline{U_{r_v} V_{r_v}}^2 = 4e_{r_{v+1}}^2 + \overline{U_{r_{v+1}} V_{r_{v+1}}}^2,$$

que $\overline{U_{r_{v+1}} V_{r_{v+1}}} > \overline{U_{r_v} V_{r_v}}$. D'autre part, pour un $v_1 > v_0$ assez grand, presque la moitié de $U_{r_{v_1}} V_{r_{v_1}}$ devra être située au dehors de $U_{r_{v_0}} V_{r_{v_0}}$, afin que $Q_{r_{v_1}}$ se trouve à l'extérieur du segment de cercle $\{U_{r_{v_0}} Q_{r_{v_0}} V_{r_{v_0}}\}$. En passant d'une façon semblable de v_1 à un $v_2 > v_1$ etc., nous trouverions un v_i tel que $M_{r_{v_i}}$ dépasserait B (ou A) ce qui est impossible.

Nous avons donc établi le théorème A et même démontré l'existence des points extraordinaires pour chaque distance suffisamment grande dans toute demi-bande limitée par deux demi-droites perpendiculaires, dans ses extrémités, sur un pont de E.

5. Du théorème A nous tirons encore une propriété caractéristique des ensembles convexes:

THÉORÈME A'. — Si tous les points en dehors d'un certain cercle sont ordinaires, la frontière de l'ensemble donné, fermé et borné est convexe.

Notre démonstration des théorèmes précédents reste encore exacte, avec certaines modifications peu importantes, pour le cas de l'espace à plusieurs dimensions et celui d'une métrique de Minkowski. Donnons, dans cette direction, un exemple.

Etant donnés deux ensembles arbitraires simplement-connexes, fermés et bornés K_1 et K_2 dont la frontière ne contient ni des angles ni des segments linéaires, tâchons, après une homothétie appropriée préalable, de les emmener (par une translation parallèle, en partant de l'infini) dans une situation où ils ont au moins deux points de contact. Sur les possibilités d'y réussir nous sommes informés par le

THÉORÈME A". — *Ce contact se laisse toujours atteindre, excepté dans le seul cas où K_1 et K_2 sont tous les deux convexes.*

Nous allons indiquer en quelques mots la démonstration. Pour obtenir le contact cherché, on approchera l'un des deux ensembles à l'autre du côté d'un pont de celui-là; alors le premier ensemble ou bien aura lui-même un pont sur le côté correspondant, et l'on pourra supposer que les deux ponts soient de longueur égale, ou bien il y sera convexe, et alors on procédera d'une manière analogue à celle du n. 4.

Je ne saurais pas dire si, dans le cas de deux ensembles non-convexes, on pourra remplacer l'homothétie par une rotation.

APPENDICE.

1. Dans notre Note citée ⁽¹⁾ nous avons montré que les énoncés y dérivés concernant la distribution des points ordinaires ⁽²⁾, extraordinaires etc. relatifs à un ensemble donné se laissent transposer dans une métrique assez générale de Minkowski, et nous venons de voir le même pour les résultats de la Note présente. Il est peut-être intéressant à constater que des énoncés reliés de M. Vergnères, contenus dans sa Note « Sur l'unicité du " minimum " de la distance d'un point à un ensemble » ⁽³⁾, valent, au contraire, seulement pour la métrique usuelle (une transformation triviale étant admise, v. au n. 7). Nous sommes concernés de la proposition suivante qui implique les résultats essentiels de M. Vergnères ⁽⁴⁾:

THÉORÈME B. — *Tous les points (resp. les points ordinaires) P du plan ayant pour projection sur l'ensemble fermé E le point fixe Q_0 de E, forment, joint à Q_0 , un ensemble convexe fermé $\bar{\Sigma}_0 = \bar{\Sigma}(Q_0)$ (resp. un ensemble convexe $\Sigma_0 = \Sigma(Q_0)$).*

(1) Loc. cit., note (2).

(2) Pour la définition de cette notion, v. le § 1, loc. cit. (2).

(3) Ces « Rendiconti », vol. XVIII, pp. 542-546.

(4) M. VERGNÈRES considère aussi le cas de l'espace à trois dimensions.

2. Pour examiner la validité de ce théorème pour une métrique donnée de Minkowski, remarquons d'abord que Q_0 est une (resp. la seule) projection (Minkowskienne, v. le § 5 de notre Note citée) de P sur E dans le seul cas où l'on a, pour tout point R de E autre que Q_0 ⁽¹⁾:

$$(1) \quad \overline{PQ_0} \leq \overline{PR} \quad (\text{resp. } \overline{PQ_0} < \overline{PR}),$$

si l'on mesure les distances dans la métrique donnée. Il s'en suit que l'ensemble $\Sigma_0(\Sigma_0)$ de tous les points cherchés P s'obtient par la formation de la partie commune (du « produit ») de tous les ensembles $\Pi(Q_0, R)$ caractérisés par l'inégalité (1), R parcourant tous les points, autres que Q_0 , de E . Par conséquent, $\Sigma_0(\Sigma_0)$ possède les qualités de convexité et de fermeture (resp. la qualité de convexité), exigées par le théorème B, pourvu que les ensembles $\Pi(Q_0, R)$ les (resp. la) possèdent.

3. Evidemment ces derniers ensembles $\Pi(Q_0, R)$ sont précisément les $\bar{\Sigma}(Q_0)(\Sigma(Q_0))$, formés à l'égard de l'ensemble (Q_0, R) , composé des deux points Q_0, R ; la proposition examinée est donc vraie, selon la métrique fixée, si elle est vraie, selon la même métrique, pour tous les ensembles consistant de deux points du plan. On en déduit, par une voie différente de celle de M. Vergnères, la validité du théorème B pour la métrique usuelle, les $\Pi(Q_0, R)$ se réduisant alors à des demi-plans fermés (resp. ouverts).

4. Maintenant il s'agit de montrer que le théorème B perd sa validité pour les métriques dont la courbe d'étalon diffère d'une ellipse. D'après le sus-dit, il suffira à considérer les ensembles $E = (Q_1, Q_2)$ de deux points. La démonstration comporte trois pas.

1° *pas*. Etant donnée une métrique Minkowskienne quelconque, un ensemble (Q_1, Q_2) définit les cinq ensembles

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \Sigma(Q_1) & , & \Sigma_2 = \Sigma(Q_2) & , & \bar{\Sigma}_1 = \Sigma(Q_1), \\ \bar{\Sigma}_2 = \bar{\Sigma}(Q_2) & , & s = \bar{\Sigma}_1 - \Sigma_1 = \bar{\Sigma}_2 - \Sigma_2 = \bar{\Sigma}_1 \cdot \bar{\Sigma}_2. \end{cases}$$

de façon que tout le plan se décompose en $\Sigma_1 + s + \Sigma_2$. Les ensembles (ouverts) Σ_1 et Σ_2 sont convexes en même temps que leurs enveloppes fermées $\bar{\Sigma}_1$ et $\bar{\Sigma}_2$, et s'ils sont convexes, s doit aussi être convexe.

Mais la convexité de s exige que s soit une droite. En effet, s qui est l'ensemble des points extraordinaires relatifs à (Q_1, Q_2) , consiste de tous les points S du plan qui remplissent

$$(3) \quad \overline{SQ_1} = \overline{SQ_2}$$

(1) Nous pouvons supposer que E contient plus d'un point.

et ne peut donc avoir en commun avec la droite $Q_1 Q_2 \equiv q$ que le milieu M du segment $Q_1 Q_2$. D'autre part, s'il y avait deux points S_1, S_2 de s qui ne se trouveraient pas sur une même droite par M , l'ensemble s , d'après (3), devrait aussi contenir le point symétrique S_3 de S_2 relatif à M , et même, étant convexe, les deux segments $S_1 S_2$ et $S_1 S_3$, dont l'un rencontrerait q dans un point différent de M , en contradiction avec le sus-dit.

L'ensemble s ne contient donc que des points d'une certaine droite; et il les comprend tous, car dans le cas contraire on pourrait joindre Σ_1 avec Σ_2 (p. e. Q_1 avec Q_2) par un chemin qui ne rencontre pas s .

5. 2° *pas*. Choisissons, maintenant, parmi les points de la droite s , autres que M , un point fixe S_0 , et décrivons un cercle relatif fixe C autour de S_0 . Soit S un point arbitraire de s , autre que M ; les demi-droites par S_0 parallèles aux demi-droites SQ_1 et SQ_2 coupent C en deux points U_1, U_2 , et les droites $S_0 U_1$ et $S_0 U_2$ coupent q en deux points T_1, T_2 . De

$$(4) \quad \overline{SQ_1} : \overline{S_0 T_1} = \overline{SM} : \overline{S_0 M} = \overline{SQ_2} : \overline{S_0 T_2} \quad , \quad \overline{S_0 U_1} = \overline{S_0 U_2}$$

et de (3) (toutes les distances sont Minkowskiennes) on tire la proportion

$$(5) \quad \overline{S_0 U_1} : \overline{S_0 U_2} = \overline{S_0 T_1} : \overline{S_0 T_2}.$$

Donc $U_1 U_2$ est parallèle à q et s passe par le milieu de la corde $U_1 U_2$. En faisant S décrire la droite s on voit que le diamètre σ de C contenu en s divise en deux parties égales toutes les cordes de C parallèles à q .

La situation de l'ensemble (Q_1, Q_2) étant arbitraire, on déduit du dernier résultat que le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes de la courbe d'étalon Γ (ou d'un autre cercle relatif) parallèles à un diamètre quelconque fixe τ de Γ est un autre diamètre σ de Γ qui sera dit *conjugué* à τ . Comme deux telles cordes, symétriques par rapport au centre de Γ , déterminent un parallélogramme dont les deux autres côtés sont parallèles à σ et ont leur point milieu sur τ , τ est, à son tour, le diamètre conjugué de σ .

6. 3° *pas*. Il nous reste à reconnaître qu'un ovale centré Γ ayant un diamètre conjugué τ à chaque diamètre donné σ ne peut être qu'une ellipse. On s'en convainc comme suit.

Les droites d'appui aux extrémités de σ doivent être parallèles à τ . Elles sont donc uniques et n'ont qu'un seul point d'appui, c'est-à-dire que Γ est tout rond ⁽¹⁾. Il s'en suit que τ varie d'une façon continue et monotone

(1) Pour la définition de cette notion, v. le § 5, loc. cit. (1).

avec σ , de sorte que les éléments σ_1, τ_1 de toute autre paire de diamètres conjugués de Γ sont séparés par σ et τ .

Si les diamètres σ et τ sont orthogonaux, ainsi que σ_1 et τ_1 , et si l'angle $\sigma\sigma_1 = \tau\tau_1$ n'est pas une fraction rationnelle de π , on peut, par réflexion d'un point arbitraire de Γ sur σ et σ_1 , comme axes de symétrie, en déduire de nouveaux points de Γ et obtenir, en répétant ce procédé, un nombre infini de points de Γ partout denses sur un cercle (au sens commun): donc Γ est un cercle.

Comme il est connu que deux paires arbitraires de droites (qui se séparent) se laissent transformer, par une transformation affine, en deux paires orthogonales, il s'en suit que Γ est une ellipse pourvu qu'il y a deux paires de diamètres conjugués de Γ qui ont un rapport anharmonique α pour lequel $\frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\alpha}$ n'est pas un nombre rationnel. Mais, comme α parcourt tous les nombres positifs quand on tourne une paire en laissant l'autre fixe, deux telles paires existent toujours.

7. Comme nous nous sommes proposé de faire, nous avons donc démontré que la courbe d'étalon d'une métrique de Minkowski pour laquelle le théorème B est vraie, est une ellipse, c'est-à-dire que cette métrique n'est que la métrique ordinaire, soumise à une transformation affine. Inversement, comme un ensemble convexe reste convexe après une telle transformation, et comme l'ensemble Σ (resp. Σ) du théorème B est certainement convexe pour la métrique ordinaire, la proposition considérée est vraie pour chaque métrique dont la courbe d'étalon est une ellipse.

Je ne puis finir sans remercier M. Fekete de ses conseils à la rédaction de cette Note.

Matematica. — *Alcune osservazioni sopra un teorema di Fabry.* Nota di V. BERNSTEIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

Abbiasi una funzione $f(\zeta)$ definita per mezzo di una serie di potenze a raggio di convergenza finito e non nullo

$$(I) \quad f(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^n + \dots$$

È noto il teorema di Fabry, secondo il quale *un punto α del cerchio di convergenza della (I) è certamente singolare per la funzione $f(\zeta)$ se il rapporto a_n/a_{n+1} tende, per $n \rightarrow \infty$, al limite α ⁽²⁾*. È pure nota l'interessante osservazione a proposito di questo teorema, secondo la quale *nel caso particolare in cui la $f(\zeta)$ non possiede sul suo cerchio di convergenza altre singolarità all'infuori di un numero finito di poli, una condizione necessaria e sufficiente affinché un punto α del cerchio di convergenza sia un polo di $f(\zeta)$ d'ordine superiore a quello degli altri poli situati sul cerchio di convergenza, è che il rapporto a_n/a_{n+1} tenda, per $n \rightarrow \infty$, al limite α ⁽³⁾*.

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(2) FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction* etc. (« Ann. Ec. Norm. Sup. », 3^a ser., to. XIII, 1896, p. 367).

(3) Questa proposizione si trova - sotto forma di osservazione incidentale - nel vol. III del *Cours d'Analyse* di E. GOURSAT (3^a ed., Paris, 1923, p. 421), il quale la considera come conseguenza immediata ed evidente della formola che dà, nel caso considerato, un'espressione asintotica dei coefficienti

$$(\circ) \quad a_n = \alpha_1^{-n} P_1(n) + \alpha_2^{-n} P_2(n) + \dots + \alpha_r^{-n} [P_r(n) + \varepsilon_n] \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \right);$$

qui $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono i poli di $f(\zeta)$ situati sul cerchio di convergenza, e $P_i(n)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) denota un polinomio il cui grado è inferiore di una unità all'ordine del polo α_i ; veggasi G. DARBOUX, *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*. (« Journ. de Math. », 3^a serie, to. IV, 1878, p. 14).

Nel 1931 U. BROGGI enunciava la stessa proposizione, dimostrando però solo la necessità della condizione (« Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », v. LXIV, 1931, p. 238), e successivamente J. REY-PASTOR ne pubblicava una dimostrazione completa, identica in sostanza a quella del GOURSAT, che egli non conosceva, o di cui non si ricordava (*Sulle funzioni regolari all'infinito*. « Giorn. di Mat. », to. LXXI, 1933, pp. 157-160). Riferendo nello « Zentralblatt für Mathematik », (to. 8, 1934, p. 362) su tale Memoria, e non ricordandomi allora neppure io dell'osservazione del GOURSAT, scrissi che, per quanto concerne la sufficienza della condizione, un ragionamento più dettagliato sarebbe desiderabile, non parendomi che questa parte dell'asserto fosse conseguenza immediata ed evidente della ($\circ$). In seguito a

Una generalizzazione parziale della proposizione precedente è stata data da R. Jüngen⁽¹⁾. Conveniamo di chiamare « elemento singolare algebro-logaritmico » ogni espressione del tipo

$$(2) \quad (\zeta - c)^{-s} [\log (\zeta - c)]^l \varphi (\zeta)$$

ove $\varphi (\zeta)$ denota una funzione olomorfa nell'intorno di c , mentre s è un numero complesso qualunque, e l denota un intero non negativo se $s \neq 0, -1, -2, \dots$; ed un intero positivo se s è eguale allo zero o ad un intero negativo. Diciamo inoltre che la funzione $f(\zeta)$ ha nel punto α una singolarità algebro-logaritmica, se essa può essere rappresentata quale somma di una funzione olomorfa in un certo intorno di α , e di un numero finito di elementi singolari del tipo (2), con $c = \alpha$. Ciò posto, chiamiamo *peso*

ciò il prof. REY-PASTOR mi comunicò una dimostrazione dettagliata molto elegante, dimostrazione che mi permetto di riprodurre qui.

Si ammetta che il raggio di convergenza della (1) sia eguale ad uno, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k - k (> 1)$ poli diversi di $f(\zeta)$, situati sul cerchio di convergenza e tutti dello stesso ordine $p + 1$, superiore a quello degli altri poli situati sullo stesso cerchio. Dalla (o) scende, per via di calcoli elementari, che, se il rapporto a_n/a_{n+1} tende, per $n \rightarrow \infty$, al limite α , deve essere

$$\frac{n^p}{(n+1)^p} \cdot \frac{A_1 \alpha_1^{-n} + A_2 \alpha_2^{-n} + \dots + A_k \alpha_k^{-n} + O(n^{-1})}{A_1 \alpha_1^{-(n+1)} + A_2 \alpha_2^{-(n+1)} + \dots + A_k \alpha_k^{-(n+1)} + O(n^{-1})} \rightarrow \alpha$$

per $n \rightarrow \infty$,

ove A_i denota il coefficiente del termine di maggior grado di $P_i(n)$. Ne scende che

$$(oo) \quad M_1 \alpha_1^{-n} + M_2 \alpha_2^{-n} + \dots + M_k \alpha_k^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

ove $M_i = A_i \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_i}\right)$, e si può dimostrare che una simile eguaglianza asintotica può aver luogo solo se tutti gli M_i sono nulli, mentre nel nostro caso uno solo degli M_i può essere nullo.

Infatti, si ammetta per assurdo che una relazione del tipo (oo) possa aver luogo per un certo $k > 1$, degli M_i tutti diversi da zero, e degli α_i numeri complessi di modulo uno, distinti due a due. Posto $\alpha_i/\alpha_k = \beta_i$, la (oo) dà

$$(ooo) \quad M_1 \beta_1^{-n} + M_2 \beta_2^{-n} + \dots + M_{k-1} \beta_{k-1}^{-n} \rightarrow -M_k \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Scrivendo qui $n+1$ al posto di n , e sottraendo la relazione così ottenuta dalla (ooo), si trova che

$$N_1 \beta_1^{-n} + N_2 \beta_2^{-n} + \dots + N_{k-1} \beta_{k-1}^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

con $N_i = M_i (1 - \beta_i^{-1})$. Ora questa è una relazione dello stesso tipo della (oo), ma con un termine di meno. Ripetendo lo stesso ragionamento $k-1$ volte, si giungerà ad una relazione ancora dello stesso tipo, ma con un termine solo, la quale sarebbe manifesta-mente assurda. Il nostro asserto è così dimostrato.

(1) R. JÜNGEN, *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébriques-logarithmiques sur leur cercle de convergence*. (« Comm. Math. Helv. », vol. 3, 1931, p. 276).

dell'elemento singolare (2) la coppia di numeri reali $[\sigma, \lambda]$, in cui σ denota la parte reale di s , mentre λ è eguale a l se s è diverso dallo zero e dagli interi negativi ed a $l-1$ nel caso contrario. Diciamo che, di due pesi $[\sigma, \lambda]$ e $[\sigma', \lambda']$, il primo è superiore al secondo se $\sigma > \sigma'$, oppure se $\sigma = \sigma'$ e $\lambda > \lambda'$, e chiamiamo peso di una singolarità algebro-logaritmica, il più grande dei pesi degli elementi singolari corrispondenti.

Stabilita questa nomenclatura, l'accennata proposizione dello Jungen si enuncia così: *se la funzione $f(z)$ non ha sul cerchio di convergenza della (I) altre singolarità all'infuori di un numero finito di singolarità algebro-logaritmiche, e se fra queste ve n'è una nel punto α , il cui peso sia superiore a quello delle altre, il rapporto a_n/a_{n+1} tende al limite α quando n cresce prendendo successivamente tutti i valori interi positivi, eccettuati tutt'al più certi valori speciali formanti una successione di densità nulla⁽¹⁾.*

Lo scopo della presente Nota è quello di mostrare che anche questo teorema può essere invertito (come ciò avveniva nel caso dei poli).

Sussiste infatti la proposizione seguente: *se la funzione $f(z)$ non ha sul cerchio di convergenza della (I) altre singolarità all'infuori di un numero finito di singolarità algebro-logaritmiche, una condizione necessaria e sufficiente affinché $f(z)$ abbia, nel punto α del cerchio di convergenza, una singolarità algebro-logaritmica, di peso superiore a quello delle altre singolarità situate sul cerchio di convergenza, è che il rapporto a_n/a_{n+1} tenda al limite α quando n cresce prendendo successivamente tutti i valori interi positivi, eccettuati eventualmente certi valori formanti una successione di densità nulla.*

La necessità della condizione è stata dimostrata dallo Jungen. Rimane a dimostrare che essa condizione sia anche sufficiente. Lo faremo usando alcuni risultati dello Jungen e generalizzando un po' il ragionamento del Rey-Pastor riportato nella nota⁽³⁾ di p. 780.

Si supponga che la $f(z)$ non abbia sul cerchio di convergenza della (I) altre singolarità all'infuori di singolarità algebro-logaritmiche, e che fra queste ve ne siano $k (> 1)$ del medesimo peso $[\sigma, \lambda]$, superiore a quello delle altre; indichiamole con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Si può ancora ammettere che il raggio di convergenza della (I) sia uno, per cui $|\alpha_i| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Da quanto ha mostrato lo Jungen⁽²⁾ risulta che in tal caso sarà valida la formula asintotica

$$(3) \quad a_n = n^{\sigma-1} (\log n)^{\lambda} \left[f_1(\alpha_1) \alpha_1^{-n} + f_2(\alpha_2) \alpha_2^{-n} + \dots + f_k(\alpha_k) \alpha_k^{-n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right]^{(3)},$$

(1) Si chiamano così le successioni $\{m_\mu\}$ per le quali $\mu/m_\mu \rightarrow 0$ per $\mu \rightarrow \infty$.

(2) Veggasi loc. cit., p. 281.

(3) Per quanto i simboli $O[\varphi(n)]$ ed $o[\varphi(n)]$ siano ormai diventati di uso quasi comune, ci permettiamo di ricordare che essi servono ad indicare qualunque espressione $A(n)$ - non sempre la stessa - soddisfacente rispettivamente alla condizione che il rapporto $A(n)/\varphi(n)$ rimanga limitato, oppure tenda al limite zero, quando $n \rightarrow \infty$.

ove si è posto $z_n = \log n$, e

$$f_v(z) = \sum_{h=1}^{h=r_v} A_h^{(v)} e^{i\gamma_h^{(v)} z};$$

(qui $A_h^{(v)}$ denota dei numeri complessi non nulli, $\gamma_h^{(v)}$ dei numeri reali qualunque, ed r_v degli interi positivi).

Si supponga ora che il rapporto a_n/a_{n+1} tenda ad un limite α quando n percorre la successione di valori interi

$$(N) \quad n_1, n_2, \dots, n_v, \dots,$$

la cui successione complementare sia densità nulla ⁽¹⁾.

Dalla (3) scende che, in tal caso, se si pone

$$(4) \quad \frac{f_1(z_n) \alpha_1^{-n} + f_2(z_n) \alpha_2^{-n} + \dots + f_k(z_n) \alpha_k^{-n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)}{f_1(z_{n+1}) \alpha_1^{-(n+1)} + f_2(z_{n+1}) \alpha_2^{-(n+1)} + \dots + f_k(z_{n+1}) \alpha_k^{-(n+1)} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)} = \alpha + \varepsilon_n$$

ε_n dovrà tendere al limite zero quando n percorre la successione (N).

Ciò posto, sia $\eta(n)$ una funzione monotona decrescente che tende al limite zero quando n percorre la successione (N), decrescendo però in modo tale che sia

$$(5) \quad \varepsilon_n = o[\eta(n)] \quad , \quad \frac{1}{\log n} = o[\eta(n)].$$

Secondo un lemma dello Jungen ⁽²⁾, la successione dei valori interi di n , per i quali la disegualianza

$$(6) \quad |f_k(z_n)| \geq \eta(n)$$

non è soddisfatta, è una successione di densità nulla.

È peraltro ovvio che esiste una costante positiva M tale che, qualunque sia il valore positivo di z , e per tutti i v , sia $|f_v'(z)| \leq M$. Ne scende che, per ogni v , ed ogni n , è

$$|f_v(z_{n+1}) - f_v(z_n)| \leq M(z_{n+1} - z_n),$$

da dove, tenendo conto della definizione di z_n e delle (5), si deduce che, per ogni v ,

$$(7) \quad f_v(z_{n+1}) - f_v(z_n) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o[\eta(n)].$$

(1) Si noti che è sempre possibile scegliere così la numerazione dei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, che si abbia $\alpha_k \neq \alpha$.

(2) Veggasi loc. cit., p. 283.

Indichiamo ora con

$$(N_p) \quad n_1^{(p)}, n_2^{(p)}, \dots, n_v^{(p)}, \dots \quad (p = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

la successione di quegli interi, per ciascuno dei quali la disuguaglianza (6) è soddisfatta, ed i quali inoltre appartengono alla successione (N) insieme con i p interi immediatamente successivi. È chiaro che anche questa successione avrà una complementare di densità nulla. Infatti, se $\{m_\mu\}$ è la complementare di (N), e $\{n'_\kappa\}$ è la successione dei valori di n per i quali la (6) non è soddisfatta, la complementare di (N_p) si ottiene riunendo insieme tutti gli interi appartenenti all'una almeno delle successioni

$$\{n'_\kappa\}, \{m_\mu\}, \{m_\mu - 1\}, \dots, \{m_\mu - p\},$$

e siccome ciascuna di queste è di densità nulla, lo è anche la loro « somma ».

Si faccia ora percorrere ad n la successione (N_0) . Dalle (4), (5) e (7) si deduce subito che, per tali valori di n , sarà

$$\sum_{v=1}^{v=k} f_v(\chi_n) \alpha_v^{-n} + o[\eta(n)] = \left\{ \sum_{v=1}^{v=k} f_v(\chi_n) \alpha_v^{-(n+1)} + o[\eta(n)] \right\} \cdot \{\alpha + o[\eta(n)]\},$$

oppure

$$(8) \quad \sum_{v=1}^{v=k} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_v}\right) f_v(\chi_n) \alpha_v^{-n} = o[\eta(n)].$$

Se ora si danno ad n dei valori appartenenti alla successione (N_1) , per ciascuno di questi, tanto n , quanto $n+1$, apparterranno alla successione (N_0) , e pertanto per ciascuno di essi sarà valida la (8) ed anche la

$$\sum_{v=1}^{v=k} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_v}\right) f_v(\chi_{n+1}) \alpha_v^{-(n+1)} = o[\eta(n)],$$

che si ottiene dalla (8) quando vi si sostituisce $n+1$ ad $n^{(1)}$; quest'ultima relazione per via delle (7), si trasforma nella

$$(9) \quad \sum_{v=1}^{v=k} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_v}\right) f_v(\chi_n) \alpha_v^{-(n+1)} = o[\eta(n)].$$

Sottraendo la (9) dalla (8), dopo di aver moltiplicato la prima per α_1 , si ottiene che, quando n percorre la successione (N_1) , è

$$\sum_{v=2}^{v=k} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_v}\right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_v}\right) f_v(\chi_n) \alpha_v^{-n} = o[\eta(n)].$$

(1) A causa della decrescenza monotona di $\eta(n)$, è sempre $o[\eta(n+1)] = o[\eta(n)]$.

Da qui, ragionando nello stesso modo, si deduce che, quando n percorre la successione (N_2) , deve essere

$$\sum_{v=3}^{v=k} \left(1 - \frac{\alpha_v}{\alpha_v}\right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_v}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_v}\right) f_v(\tilde{\alpha}_n) \alpha_v^{-n} = o[\eta(n)],$$

e finalmente, dopo altre $k - 3$ ripetizioni del medesimo ragionamento, si constata che, quando n percorre la successione (N_{k-1}) deve essere

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k}\right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) f_k(\tilde{\alpha}_n) \alpha_k^{-n} = o[\eta(n)].$$

Ora, siccome il coefficiente di $f_k(\tilde{\alpha}_n)$ in questa formola non è nullo, questa formola è in contrasto con la diseuguaglianza (6), la quale deve essere soddisfatta per tutti i valori della successione (N_{k-1}) . La nostra supposizione che il rapporto a_n/a_{n+1} potesse tendere ad un limite quando n percorre una successione, la cui complementare è di densità nulla, deve dunque essere scartata; e con ciò il nostro teorema è completamente dimostrato.

Matematica. — *Sul calcolo di un particolare funzionale per le funzioni, che lo rendono stazionario* ⁽¹⁾. Nota di F. CONFORTO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

In un nuovo metodo, escogitato dal prof. M. Picone, di integrazione delle equazioni alle derivate parziali, che reggono sia i problemi statici che quelli dinamici della Scienza delle costruzioni, del calore, della elettrotecnica ecc., metodo attualmente in esperimento presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, interviene la ricerca del minimo di un funzionale, che è la somma di un integrale, il cui integrando è una forma quadratica in una o più funzioni incognite e nelle loro derivate fino ad un certo ordine, e di due forme quadratiche nei valori delle dette funzioni e derivate ai due estremi dell'intervallo d'integrazione.

Per le modalità del metodo occorre avere oltre che le funzioni estremali del detto funzionale, il valore che assume in corrispondenza il funzionale stesso. Ora è degna di rilievo la circostanza che, una volta in possesso di un determinato qualunque sistema di funzioni estremali, il corrispondente valore del funzionale si può avere mediante una formola notevolmente semplice, che si presta anche ad un calcolo rapido. Scopo di questa Nota è di presentare la formola indicata, che ci sembra utile anche da un punto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1935.

di vista teorico, per l'indagine dell'esistenza effettiva del minimo del funzionale.

Consideriamo un funzionale della forma

$$(1) \quad L[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l] = \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx + F$$

con

$$(2) \quad \Phi(x) = \sum_0^n \sum_0^n \sum_0^l \sum_0^l a_{hk;ij}(x) \varphi_i^{(h)}(x) \varphi_j^{(k)}(x) + \\ + 2 \sum_0^n \sum_0^l b_{h;i}(x) \varphi_i^{(h)}(x) + c(x),$$

$$a_{hk;ij}(x) = a_{kh;ji}(x)$$

e

$$(3) \quad F = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_0^l \sum_0^l a''_{hk;ij} \varphi_i^{(h)}(x_2) \varphi_j^{(k)}(x_2) + 2 \sum_0^{n-1} \sum_0^l b''_{h;i} \varphi_i^{(h)}(x_2) + \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_0^l \sum_0^l a'_{hk;ij} \varphi_i^{(h)}(x_1) \varphi_j^{(k)}(x_1) + 2 \sum_0^{n-1} \sum_0^l b'_{h;i} \varphi_i^{(h)}(x_1) + c'$$

$$a''_{hk;ij} = a''_{kh;ji}, \quad a'_{hk;ij} = a'_{kh;ji}.$$

Nella (2) le funzioni φ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, l$) si suppongono continue nell'intervallo $x_1 - x_2$ insieme alle loro derivate fino all'ordine $2n$ incluso, mentre le funzioni

$$a_{hk;ij}(x), b_{h;i}(x) \quad \text{e} \quad c(x) \quad (i = 0, 1, \dots, l; h, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

possono essere supposte continue, solamente fino alle derivate d'ordine n incluso.

Ciò premesso, ricordiamo che le equazioni di Eulero e le condizioni ai limiti, che esprimono la stazionarietà del funzionale L sono in questo caso le seguenti:

$$(4) \quad \sum_0^n (-1)^h \frac{d^h}{dx^h} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \right) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, l)$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\sum_0^n (-1)^{k-h} \frac{d^{k-h}}{dx^{k-h}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(k)}} \right) \right]_{x=x_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(h-1)}(x_2)} &= 0 \\ \left[\sum_0^n (-1)^{k-h} \frac{d^{k-h}}{dx^{k-h}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(k)}} \right) \right]_{x=x_1} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(h-1)}(x_1)} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$h = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Supponiamo che attraverso le condizioni (4) e (5) si sia riusciti a determinare $l + 1$ funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l$, che rendono stazionario il funzionale L . Si tratta di calcolare il valore, che assume il funzionale stesso, quando si sostituiscano nella (1) queste funzioni.

Mentre il calcolo diretto riuscirebbe, anche nei casi più semplici, molto laborioso, il detto calcolo può essere semplificato in base alle considerazioni, che seguono.

Dalla (2) si ha :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} = \sum_0^n \sum_0^l a_{hk;ij} \varphi_j^{(k)} + b_{h;i}$$

e

$$\frac{1}{2} \sum_0^n \sum_0^l \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \varphi_i^{(h)} = \sum_0^n \sum_0^l \sum_0^l \sum_0^l a_{hk;ij} \varphi_i^{(h)} \varphi_j^{(k)} + \sum_0^n \sum_0^l b_{h;i} \varphi_i^{(h)}.$$

Ne segue :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \varphi_i^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l b_{h;i} \varphi_i^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx.$$

Ma se $h \geq 1$, con successive integrazioni per parti si ha :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \varphi_i^{(h)} dx &= \left[\sum_0^{h-1} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \right) \varphi_i^{(h-k-1)} \right]_{x_1}^{x_2} + \\ &+ (-1)^h \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^h}{dx^h} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \right) \varphi_i dx \end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^l \left[\sum_0^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \right) \right] \varphi_i dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l b_{h;i} \varphi_i^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_1^n \sum_0^l \sum_0^{h-1} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(h)}} \right) \varphi_i^{(h-k-1)} \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Se ora le φ_i sono tali da rendere stazionario il funzionale L , valgono le equazioni di Eulero (4) e perciò l'ultima formula scritta, qualora nel suo ultimo membro si ponga $h - k = \lambda$ e si applichi la formula d'inversione per le sommatorie doppie di L . Dirichlet, diviene:

$$(6) \quad \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_b^n \sum_i^l b_{b;i} \varphi_i^{(b)} dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{\lambda}^n \sum_i^l \sum_b^n (-1)^{b-\lambda} \frac{d^{b-\lambda}}{dx^{b-\lambda}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(b)}} \right) \varphi_i^{(\lambda-1)} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Passiamo ora al calcolo della quantità F. Anzitutto per la (3) si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_2)} = 2 \sum_k^{n-1} \sum_j^l a''_{bk;ij} \varphi_j^{(k)}(x_2) + 2 b''_{b;i} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_1)} = 2 \sum_k^{n-1} \sum_j^l a'_{bk;ij} \varphi_j^{(k)}(x_1) + 2 b'_{b;i}$$

onde segue:

$$\frac{1}{2} \sum_b^n \sum_i^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_2)} \varphi_i^{(b)}(x_2) + \frac{1}{2} \sum_b^n \sum_i^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_1)} \varphi_i^{(b)}(x_1) = \\ = \sum_b^{n-1} \sum_k^{n-1} \sum_i^l \sum_j^l a''_{bk;ij} \varphi_i^{(b)}(x_2) \varphi_j^{(k)}(x_2) + \sum_b^{n-1} \sum_i^l b''_{b;i} \varphi_i^{(b)}(x_2) + \\ + \sum_b^{n-1} \sum_k^{n-1} \sum_i^l \sum_j^l a'_{bk;ij} \varphi_i^{(b)}(x_1) \varphi_j^{(k)}(x_1) + \sum_b^{n-1} \sum_i^l b'_{b;i} \varphi_i^{(b)}(x_1).$$

Per la (3) l'espressione di F si può per conseguenza scrivere:

$$(7) \quad F = \frac{1}{2} \sum_b^{n-1} \sum_i^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_2)} \varphi_i^{(b)}(x_2) + \frac{1}{2} \sum_b^{n-1} \sum_i^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(b)}(x_1)} \varphi_i^{(b)}(x_1) + \\ + \sum_b^{n-1} \sum_i^l b''_{b;i} \varphi_i^{(b)}(x_2) + \sum_b^{n-1} \sum_i^l b'_{b;i} \varphi_i^{(b)}(x_1) + c'.$$

Costruendo l'espressione L data dalla (1) in base alle (6) e (7) si ha:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sum_b^n \sum_i^l b_{b;i} \varphi_i^{(b)} dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{\lambda}^n \sum_i^l \sum_b^n (-1)^{b-\lambda} \frac{d^{b-\lambda}}{dx^{b-\lambda}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(b)}} \right) \varphi_i^{(\lambda-1)} \right]_{x=x_2} - \\ - \frac{1}{2} \left[\sum_{\lambda}^n \sum_i^l \sum_b^n (-1)^{b-\lambda} \frac{d^{b-\lambda}}{dx^{b-\lambda}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i^{(b)}} \right) \varphi_i^{(\lambda-1)} \right]_{x=x_1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_0^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(\lambda-1)}}(x_2) \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_2) + \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_0^l \frac{\partial F}{\partial \varphi_i^{(\lambda-1)}}(x_1) \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_1) + \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b''_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_2) + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b'_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_1) + c'.$$

Ma poichè le funzioni φ_i soddisfano alle condizioni ai limiti (5), quest'ultima espressione diviene semplicemente:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l b_{h,i} \varphi_i^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b''_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_2) + \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b'_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_1) + c'$$

ovvero, integrando successivamente per parti, nel primo integrale a secondo membro:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l (-1)^h \frac{d^h b_{h,i}}{dx^h} \varphi_i dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \\ + \left[\sum_1^n \sum_0^l \sum_0^{h-1} (-1)^s \frac{d^s b_{h,i}}{dx^s} \varphi_i^{(h-1-s)} \right]_{x_1}^{x_2} + \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b''_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_2) + \sum_0^{n-1} \sum_0^l b'_{h,i} \varphi_i^{(h)}(x_1) + c'.$$

Ora si ha ponendo $h - s = \lambda$ ed applicando la formula di L. Dirichlet:

$$\left[\sum_1^n \sum_0^l \sum_0^{h-1} (-1)^s \frac{d^s b_{h,i}}{dx^s} \varphi_i^{(h-1-s)} \right]_{x_1}^{x_2} = \\ = \left[\sum_1^n \sum_0^l \sum_{\lambda}^n (-1)^{h-\lambda} \frac{d^{h-\lambda} b_{h,i}}{dx^{h-\lambda}} \varphi_i^{(\lambda-1)} \right]_{x_1}^{x_2}$$

e quindi arriviamo alla formula definitiva:

$$(8) \quad L = \int_{x_1}^{x_2} \sum_0^n \sum_0^l (-1)^h \frac{d^h b_{h,i}}{dx^h} \varphi_i dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \\ + \sum_1^n \sum_0^l \left\{ \sum_{\lambda}^n (-1)^{h-\lambda} \frac{d^{h-\lambda} b_{h,i}}{dx^{h-\lambda}} + b'_{\lambda-1,i} \right\}_{\lambda=x_2} \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_2) - \\ - \sum_1^n \sum_0^l \left\{ \sum_{\lambda}^n (-1)^{h-\lambda} \frac{d^{h-\lambda} b_{h,i}}{dx^{h-\lambda}} + b'_{\lambda-1,i} \right\}_{\lambda=x_1} \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_1) + c'.$$

Questa formula è notevolmente più semplice di quella che si otterrebbe sostituendo nella (1) le funzioni φ_i , senza tener ulteriormente conto del fatto, che esse soddisfano alle condizioni (4) e (5).

Convorrà dunque applicare la (8) ogni qualvolta si debba effettivamente calcolare il valore del funzionale L, per le funzioni, che lo rendono stazionario.

Osservazione. — Molto spesso nelle applicazioni le $b_{h,i}$ sono delle costanti. In tal caso la (8) diviene:

$$L = \sum_0^l \int_{x_1}^{x_2} b_{0,i} \varphi_i dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \sum_1^n \sum_0^l (b_{\lambda,i} + b''_{\lambda-1,i}) \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_2) - \\ - \sum_1^n \sum_0^l (b_{\lambda,i} - b'_{\lambda-1,i}) \varphi_i^{(\lambda-1)}(x_1) + c'.$$

Se inoltre il funzionale L dipende da un'unica funzione φ_0 , si ha:

$$L = b_{00} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} c dx + \sum_1^n (b_{\lambda,0} + b''_{\lambda-1,0}) \varphi_0^{(\lambda-1)}(x_2) - \\ - \sum_1^n (b_{\lambda,0} - b'_{\lambda-1,0}) \varphi_0^{(\lambda-1)}(x_1) + c'.$$

Matematica. — *Sulle superficie algebriche a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$.* Nota di G. POMPILI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

1. Lo scopo di questa Nota è di porgere una dimostrazione elementare del noto teorema che: *le superficie a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$ sono o razionali o rigate.*

Lo studio di questa famiglia di superficie algebriche si inizia con una Memoria del prof. G. Castelnuovo ⁽²⁾ del 1890 che contiene la classificazione dei sistemi lineari di curve piane iperellittiche i quali rappresentano le superficie razionali, d'ordine n , a sezioni piane iperellittiche di genere p , possedenti un sistema lineare ∞^{p-1} di superficie aggiunte d'ordine $n-3$. Tre anni dopo, cioè nel 1893, il prof. F. Enriques ha riconosciuto ⁽³⁾ che tutte le superficie a sezioni piane iperellittiche di genere $p (\geq 2)$ sono o

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(2) Ved. «Rend. Circolo Mat. di Palermo», 1890.

(3) Ved. «Rend. Reale Acc. dei Lincei», 1893.

razionali o rigate osservando che nel caso (di fatto impossibile) in cui i coniugati di un punto P della superficie nelle varie sezioni piane, per esso, invadessero l'intera superficie questa verrebbe rappresentata sopra una involuzione nella stella di piani per P che è un ente razionale ∞^2 , d'onde (per un noto teorema di G. Castelnuovo) seguirebbe la sua razionalità⁽¹⁾. La dimostrazione del teorema che mi propongo di esporre non ha bisogno di invocare la razionalità delle involuzioni piane, basandosi essa sulla rappresentazione della superficie, supposta non rigata, sopra un piano doppio.

Riconosciuto che la curva di diramazione, avente un certo ordine $2h$, non possiede curve successive aggiunte d'ordine $2h-6, 2h-9 \dots$ si fa appello al criterio di razionalità dei piani doppi di Castelnuovo-Enriques⁽²⁾, che si basa come è noto sul semplice uso di trasformazioni quadratiche riduttrici nonchè sulla conoscenza dei tipi di piani doppi razionali di Clebsch e Noether.

2. Sia F una superficie, d'ordine n , a sezioni piane iperellittiche di genere $p (\geq 2)$; rappresentiamola su un piano doppio.

Si consideri la superficie Φ immagine delle ∞^2 coppie di punti coniugati nelle g_2^1 di un fascio (C) di sezioni piane di F . Ad ognuna delle g_2^1 , sopra considerate, corrisponde su Φ una curva razionale C^* ; pertanto la superficie Φ possiede un fascio lineare (C^*) di curve razionali; quindi, per un noto teorema di Noether, è razionale e si può rappresentare, biunivocamente, sopra un piano in modo che le C^* abbiano per immagine le rette per un punto O . Ma la Φ è in corrispondenza $[1, 2]$ con la superficie F e quindi quest'ultima è rappresentabile su un piano doppio con curva di diramazione D_{2h} , d'ordine $2h$, passante per il punto O con molteplicità $2h-2p-2$.

Agli n punti base del fascio (C) , prima considerato, corrispondono, su Φ , n curve razionali, distinte ed irriducibili unisecanti le C^* e quindi, per l'essenza stessa del teorema di Noether, possiamo passare dalla Φ al piano rappresentativo in modo che queste curve abbiano per immagine n curve L_i , d'ordine $s_i (> 0)$, irriducibili, distinte e passanti per O con molteplicità s_i-1 .

Le curve del piano doppio immagini delle sezioni piane di F sono delle C_k , d'ordine k e genere p , passanti per O con molteplicità $n-k$. Queste curve:

(1) Ved. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche raccolte da L. Campedelli* (Padova, Cedam, 1932), p. 462.

(2) Ved. « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 1900. Confronta anche: F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche raccolte da L. Campedelli*. (Padova, Cedam, 1932), p. 433 e F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. (Bologna, Zanichelli), vol. III, pp. 170-188-190.

1) avranno un certo numero di punti base di molteplicità σ_i ; e sarà lecito supporre che questi punti cadano in punti multipli d'ordine pari ρ_i della curva di diramazione, operando altrimenti una conveniente trasformazione quadratica di cui un punto base sia O;

2) saranno tangenti, ovunque l'incontrano (fuori dei punti base), alla curva di diramazione, in modo che il gruppo di questi punti di contatto sia equivalente a quelli segati sulle C_k dal sistema metà del sistema individuato dalla D_{2h} ;

3) possiederanno un certo numero di punti multipli (generalmente doppi) variabili i quali provengono dal passaggio della corrispondente sezione piana per punti coniugati nella involuzione che ci ha permesso di rappresentare la superficie F sul piano doppio;

4) formeranno un sistema continuo ∞^3 (completo o no) tale che una curva, di esso sistema, sia segata dalla sua infinitamente vicina in n punti tolte le intersezioni che cadono nei punti base, nei punti di contatto con la curva di diramazione e, a coppie, infinitamente vicine ai punti doppi variabili.

La quarta proprietà di cui debbono godere le curve C_k ci porge questa relazione:

$$\begin{aligned} (a) \quad k^2 - [(k-n)^2 + \sum \sigma_i^2] - \frac{1}{2} [2hk - (2h - 2p - 2)(k-n) - \sum \sigma_i \rho_i] - \\ - 2 \left[\frac{(k-1)(k-2)}{2} - p - \sum \frac{\sigma_i(\sigma_i-1)}{2} - \frac{(k-n)(k-n-1)}{2} \right] - n = \\ = k + 2p + pn + n - 2 - pk - hn + \sum \frac{\sigma_i \rho_i}{2} - \sum \sigma_i = 0. \end{aligned}$$

Mettiamo ora in evidenza due importanti relazioni che passano tra le C_k e le curve L_i o meglio tra le C_k e la curva somma delle L_i . Fissata una generica C_k facciamola variare con continuità fino a portarla a coincidere con l'immagine di una curva del fascio (C); al limite la C_k degenera in una retta per O contata due volte e nella curva somma delle L_i che sarà quindi di ordine $k-2$: diciamo $\bar{C}_{k-2}$. Si è escluso il caso che la C_k degeneri in una retta per O contata due volte, nella curva somma delle L_i e in una (o più) curva fondamentale (che è poi una retta per O) immagine di una coppia di punti coniugati di cui uno sia un punto base del fascio (C). Ciò è lecito perchè con opportune trasformazioni birazionali si può eliminare questa curva fondamentale senza che ne compaiano altre le quali interessino la nostra degenerazione. Inoltre se il punto Q_i è base d'ordine σ_i per le curve C_k , al limite la C_k spezzata vi passerà con molteplicità (almeno) eguale a σ_i , perciò la $\bar{C}_{k-2}$ passerà per Q_i (almeno) con molteplicità σ_i .

Da ciò risulta che la $\bar{C}_{k-2}$ appartiene al sistema lineare, se esiste, delle C_{k-2} , d'ordine $k-2$, che hanno un punto σ_i -plo in ogni punto Q_i (O

compreso) comune a tutte le C_k le quali vi passano anche esse, con molteplicità σ_i .

3. Mettiamoci nell'ipotesi, la cui necessità sarà messa in evidenza nel lemma del numero seguente, che LA SUPERFICIE F NON SIA RIGATA.

Supposto che, nella nostra ipotesi, esista il sistema $|C_{k-2}|$ prima considerato contiamo le intersezioni, fuori dei punti base, di queste C_{k-2} con le curve D_{2h-3t} , d'ordine $2h-3t$, t — aggiunte alla D_{2h} ; si avrà

$$\begin{aligned} r_t &= (k-2)(2h-3t) - \sum \sigma_i (\rho_i - t) - (k-n-2)(2h-2p-2-t) = \\ &= (2-t)(2k-4 - \sum \sigma_i) - tn - \\ &\quad - 2 \left(k + 2p + pn + n - 2 - pk - hn + \sum \frac{\sigma_i \rho_i}{2} - \sum \sigma_i \right) \end{aligned}$$

ossia per la relazione (a):

$$(b) \quad r_t = (2-t)(2k-4 - \sum \sigma_i) - tn.$$

Siccome nessuna curva L_i fa parte della curva di diramazione, la $\bar{C}_{k-2}$ incontrerà la D_{2h} , fuori dei punti base per le C_{k-2} , in un numero non negativo di punti; sarà quindi $r_0 \geq 0$, da cui:

$$(c) \quad 2k-4 - \sum \sigma_i \geq 0,$$

diseguaglianza che ci piace trascrivere sotto quest'altra forma:

$$(c') \quad \sum \frac{\sigma_i}{2} \leq k-2.$$

Dalla (c) e dalla (b) si ricava che per $t \geq 2$ è

$$(d) \quad r_t < 0.$$

Se il sistema $|C_{k-2}|$ esiste la (d) ci dice che le $D_{2h-6}, D_{2h-9}, \dots$ o non esistono o si riducono a componenti fisse del sistema $|C_{k-2}|$, le quali verrebbero incontrate dalle C_{k-2} in un numero negativo di punti.

Quindi per dedurre dalla (d) che le successive aggiunte, degli ordini $2h-6, 2h-9, \dots$ della curva di diramazione non esistono, bisogna ancora dimostrare che:

$\alpha)$ il sistema $|C_{k-2}|$ ha dimensione $\mu > 0$;

$\beta)$ ogni eventuale componente fissa del sistema $|C_{k-2}|$ incontra la generica curva C_{k-2} in un numero (virtuale) NON NEGATIVO di punti.

Per non interrompere la catena delle nostre deduzioni rimandiamo a più tardi la dimostrazione delle proprietà (α) e (β) che qui assumiamo.

Riepilogando siamo arrivati alla conclusione che la curva di diramazione del nostro piano doppio è priva delle successive aggiunte degli ordini

$2h - 6, 2h - 9, \dots$ siano quindi nelle ipotesi di un noto teorema di Castelnuovo-Enriques⁽¹⁾ e possiamo dedurre che la nostra superficie F , la quale per ipotesi non è rigata, è o razionale o trasformabile birazionalmente in una rigata irrazionale. Si voleva però dimostrare che una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere $p (\geq 2)$ la quale non sia rigata è razionale; resta quindi da dimostrare che la seconda eventualità, cioè che la F , non rigata, sia riferibile a rigata irrazionale, è da escludersi. A ciò arriveremo dimostrando che:

$\gamma)$ se una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere $p (\geq 2)$ è riferibile a una rigata irrazionale è essa stessa rigata.

4. Per avere la dimostrazione completa del teorema restano ora da dimostrare le tre proposizioni (α) , (β) e (γ) , assunte nel ragionamento che precede.

Per questo ci occorre mettere in evidenza ancora una proprietà della curva $\bar{C}_{k-2}$ che deriva dal seguente lemma:

LEMMA. — Se la superficie F NON È RIGATA le curve L_i , fuori dei punti base, incontrano le C_k almeno in due punti.

Una L_i è immagine di una curva della superficie F , che, per ipotesi, non è una retta e che, quindi, incontrerà una generica sezione piana di F in $m (\geq 2)$ punti, i quali cadono, sul piano doppio, in $m (\geq 2)$ punti di L_i . c. v. d.

Immediata conseguenza di questo lemma è che la $\bar{C}_{k-2}$, somma di tutte le L_i , incontrerà le curve C_k almeno in $2n$ punti; cioè

$$2n \leq k(k-2) - (k-n)(k-n-2) - \sum \sigma_i^2$$

da cui si ricava

$$(e) \quad \sum \frac{\sigma_i^2}{2} \leq kn - \frac{n^2}{2} - 2n.$$

Da quest'ultima relazione e dalla (c') si deduce per la dimensione μ del sistema lineare $|C_{k-2}|$ la disuguaglianza $\mu > 0$; infatti

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{(k-2)(k+1)}{2} - \frac{(k-n-2)(k-n-1)}{2} - \sum \frac{\sigma_i(\sigma_i+1)}{2} = \\ &= \left(nk - \frac{n^2}{2} - 2n - \sum \frac{\sigma_i^2}{2} \right) + \left(k-2 - \sum \frac{\sigma_i}{2} \right) + \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} > 0. \end{aligned}$$

(1) Vedi F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. Campedelli. (Padova, Cedam, 1932), p. 433.

Si è così dimostrata la proprietà (α).

La curva $\bar{C}_{k-2}$ è degenere in tutte e sole le n curve irriducibili L_i e pertanto le eventuali componenti fisse del sistema $|C_{k-2}|$ vanno ricercate tra le L_i ; ma dal lemma precedentemente stabilito si ricava, con semplicissimi calcoli, che le curve L_i incontrano le curve del sistema $|C_{k-2}|$ in un numero non negativo di punti: si è così dimostrata la proprietà (β).

Per dimostrare la proprietà (γ) ragioniamo così.

Se F è riferibile ad una rigata irrazionale le generatrici di questa rigata formano, su F , un fascio irrazionale (R) di curve razionali. Un fascio (C) di sezioni piane di F determina una trasformazione birazionale in sè, Ω , della superficie considerando, come corrispondente di un punto P , quel punto Q , che è coniugato di P , nella g_2^1 della sezione piana del fascio (C), che passa per P .

Questa trasformazione Ω muterà in sè il fascio (R) poichè esso è unico; cioè se nella g_2^1 della sezione piana generica $\bar{C}$, di (C), un punto di R ha come coniugato un punto di R' , anche ogni altro punto P di R ha come coniugato un punto di R' , nella g_2^1 della sezione piana del fascio (C) la quale passa per P . Ma si può passare da un fascio (C) ad un altro (C') con successivi fasci i quali abbiano, a due a due, una sezione piana in comune, possiamo quindi affermare che la trasformazione in sè di (R) è indipendente dal fascio (C) che si considera; cioè i coniugati di un generico punto P della superficie F nelle g_2^1 delle ∞^2 sezioni piane per esso stanno tutti su una curva R' di (R). Abbiamo così questo carattere della curva R' : essa, fuori di P , incontra le sezioni piane per P in un sol punto. Quindi o R' non passa per P , e allora è una *retta*, o passa per P e allora è una conica perchè P , essendo un generico punto di R' , è semplice.

Quest'ultima eventualità è da escludersi perchè, se si avverasse, le curve (R) incontrerebbero una sezione piana generica $\bar{C}$, della superficie F , secondo coppie di punti coniugati, cioè segherebbero su $\bar{C}$ proprio la g_2^1 , che è una serie razionale! In conclusione R' è una retta e quindi la superficie F è rigata.

Così il teorema resta completamente dimostrato.

Matematica. — *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare.* Nota I di L. TOSCANO, presentata⁽¹⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

1. Il prof. Pincherle nelle sue ricerche *Sopra uno speciale operatore lineare*⁽²⁾ ha considerato uno spazio lineare (S) di elementi base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, linearmente indipendenti, ed ha definito in esso l'operatore Q con le posizioni

$$Q(\varepsilon_0) = 0, \quad Q(\varepsilon_1) = k_1 \varepsilon_0, \dots, Q(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_{n-1}, \dots,$$

essendo la successione $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ un elemento del campo numerico (G) definito in [1].

Sia P_μ un'operatore permutabile con Q^μ : risulta che esso è pure permutabile con $Q^{k\mu}$.

Infatti

$$\begin{aligned} Q^{k\mu} P_\mu &= Q^{(k-1)\mu} (Q^\mu P_\mu) = Q^{(k-1)\mu} P_\mu Q^\mu = \\ &= Q^{(k-2)\mu} P_\mu Q^{2\mu} = \dots = P_\mu Q^{k\mu}. \end{aligned}$$

In particolare ogni operatore P permutabile con Q lo è anche con Q^m . Ma non inversamente.

Si consideri infatti l'operatore I definito dalle posizioni

$$(1) \quad I(\varepsilon_n) = \alpha^n \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con α radice primitiva *m*-esima dell'unità.

Si ha

$$\begin{aligned} Q^i I(\varepsilon_n) &= \alpha^n k_n k_{n-1} \dots k_{n-i+1} \varepsilon_{n-i} \\ I Q^i(\varepsilon_n) &= \alpha^{n-i} k_n k_{n-1} \dots k_{n-i+1} \varepsilon_{n-i}, \end{aligned}$$

e poichè *m* è il più piccolo valore di *i* che rende $\alpha^i = 1$ (e quindi $\alpha^n = \alpha^{n-i}$) si conclude che

$$(2) \quad Q^i I - I Q^i \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \quad \text{per} \quad i \begin{cases} < m \\ = m \end{cases}.$$

Risulta così un esempio di operatore permutabile con Q^m e non con potenza di Q a esponente minore di *m*.

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(2) « Rend. R. Accademia Nazionale Lincei », ser. 6^a, vol. XIII, pp. 555-562; vol. XIV, pp. 237-243 e 317-322; 1931. In seguito queste Note saranno richiamate con [1], [2], [3].

2. Per lo studio degli operatori permutabili con Q^m si introduca l'operatore R con la posizione

$$(3) \quad QR - \alpha RQ = 0,$$

essendo α radice primitiva dell'unità di indice m .

Un esempio di operatore R è l'operatore I .

Valgono le proprietà:

a) Ogni operatore PR o RP è un R .

b) Ogni operatore R è permutabile con Q^m e non con potenza di Q ad esponente minore di m .

Infatti si ha

$$Q^i R = \alpha Q^{i-1} RQ = \alpha^2 Q^{i-2} RQ^2 = \dots = \alpha^i RQ^i,$$

e per $i = m$

$$Q^m R = RQ^m.$$

c) I successivi scarti di R dalla permutabilità con Q sono degli R .

Infatti denotando con $R^{(s)}$ lo scarto *s-esimo* si ha [1]

$$R^{(s)} = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s}{i} Q^{s-i} RQ^i,$$

e poichè

$$Q^{s-i} RQ^i = \alpha^{s-i} RQ^s,$$

si deduce

$$R^{(s)} = (\alpha - 1)^s RQ^s,$$

e per questa

$$QR^{(s)} = Q(\alpha - 1)^s RQ^s = (\alpha - 1)^s QRQ^s = \alpha(\alpha - 1)^s RQ^s Q = \alpha R^{(s)} Q.$$

d) Non tutti gli operatori permutabili con Q^m sono R .

Infatti per l'operatore $R + P$ si ha

$$Q^m (R + P) = (R + P) Q^m$$

$$Q(R + P) = (\alpha R + P) Q.$$

e) Il prodotto di m operatori R è permutabile con Q .

Infatti

$$\begin{aligned} QR_1 R_2 \dots R_i &= \alpha R_1 QR_2 \dots R_i = \\ &= \alpha^2 R_1 R_2 QR_3 \dots R_i = \dots = \alpha^i R_1 R_2 \dots R_i Q, \end{aligned}$$

e per $i = m$

$$QR_1 R_2 \dots R_m = R_1 R_2 \dots R_m Q.$$

f) Il prodotto di qualsiasi numero di operatori R è permutabile con Q^m .

Infatti.

$$Q^m R_1 R_2 \dots R_i = \alpha^{mi} R_1 R_2 \dots R_i Q^m \neq R_1 R_2 \dots R_i Q^m.$$

In particolare ogni potenza di un'operatore R è permutabile con Q^m .

g) Ogni operatore R si può ottenere come prodotto a destra o a sinistra di un'operatore P per l'operatore I .

Infatti posto

$$R_1 = R, R_2 = R, \dots = R_m = I,$$

oppure

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = I, \quad R_m = R,$$

si deducono dalla e)

$$RI^{m-1} = P, \quad I^{m-1}R = P'$$

e da queste, moltiplicando a destra o a sinistra per I , ne derivano

$$(4) \quad R = PI, \quad (5) \quad R = IP'.$$

3. Denotando con $\varphi(m)$ la funzione di Gauss, per ogni intero m esistono $\varphi(m)$ radici primitive dell'unità di indice m , e quindi $\varphi(m)$ operatori I per la formazione degli operatori R permutabili con Q^m e non con potenza di Q ad esponente inferiore ad m . Le altre $m - 1 - \varphi(m)$ radici (esclusa la radice 1), non primitive di indice m , lo sono rispetto a un indice μ , divisore di m , e quindi individuano altrettanti operatori I per la formazione di operatori R permutabili con Q^μ e non con potenza di Q ad esponente inferiore a μ .

Ma questi ultimi R risultano (n. 1) pure permutabili con Q^m e quindi si può concludere: Le $m - 1$ radici dell'unità (esclusa la radice 1) di indice m individuano $\varphi(m)$ operatori I permutabili con Q^m e non con Q^n per $n < m$ e $m - 1 - \varphi(m)$ operatori I permutabili con Q^μ e non con Q^ν per $\nu < \mu$; i quali $m - 1$ operatori permettono la formazione degli operatori permutabili con Q^m .

Si dirà generico un operatore R che soddisfa la (3) con α radice dell'unità (diversa da 1) di indice m , primitiva o no.

4. Lo scarto di un'operatore H rispetto ad una potenza di Q è dato dalla formula

$$(6) \quad Q^r H - H Q^r = \sum_{i=0}^{r-1} Q^{r-i-1} H^{(i)} Q^i,$$

che ammessa vera per i primi valori di r risulta facilmente dimostrata per induzione. Pertanto: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un operatore H , non permutabile con potenza di Q ad esponente minore di m , sia permutabile

tabile con Q^m , è che lo scarto $H^{(1)}$ di H dalla permutabilità con Q soddisfa la relazione

$$\sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} H^{(1)} Q^i = 0.$$

5. Dato un operatore R generico si consideri l'espressione

$$\sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} R Q^i.$$

Si ha

$$Q^{m-i-1} R = \alpha^{m-i-1} R Q^{m-i-1}$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} R Q^i = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^{m-i-1} R Q^{m-i-1} = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^{m-i-1} \right\} R Q^{m-1};$$

ma

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha^{m-i-1} = 0,$$

e quindi

$$\sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} R Q^i = 0.$$

Dalla c) del n. 2 si ha che anche gli scarti di R sono degli R , e quindi ogni R soddisfa le due relazioni

$$(7) \quad \sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} R Q^i = 0$$

$$(8) \quad \sum_{i=0}^{m-1} Q^{m-i-1} R^{(1)} Q^i = 0.$$

Viceversa se un operatore K soddisfa la (7) si deduce da questa, moltiplicando a sinistra e a destra per Q e confrontando, che

$$Q^m K - K Q^m = 0;$$

essendo ora K permutabile con Q^m , per la (6) sussiste la (8), e confrontando la (7) e la (8) con $s = 1$ dopo aver moltiplicato la (7) a destra per Q , si deduce che

$$K^{(1)} = q K Q,$$

con q costante. Si ha allora

$$H K - K Q = q K Q,$$

ovvero

$$Q K = (1 + q) K Q;$$

sostituendo nella (7) risulta $q + 1$ radice dell'unità $\neq 1$ e quindi K è un R generico. Pertanto ogni operatore K che soddisfa la (7) è un'operatore R generico.

6. Si può ora dimostrare la proposizione fondamentale:
Ogni operatore H permutabile con Q^m è della forma

$$(9) \quad P + \sum R,$$

dove R è generico: soddisfa cioè la (7) o la (3) con $\alpha \neq 1$ radice qualsiasi dell'unità, di indice m .

Escluso il caso in cui H è un P o un R e quindi della forma (9), l'espressione

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i$$

è un'operatore P .

Infatti

$$\begin{aligned} Q \sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i &= Q^m H + \sum_{i=1}^{i=m-1} Q^{m-i} H Q^i \\ \left\{ \sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i \right\} Q &= \sum_{i=0}^{i=m-2} Q^{m-i-1} H Q^{i+1} + H Q^m, \end{aligned}$$

e poichè le due somme del secondo membro sono uguali e per ipotesi

$$Q^m H = H Q^m,$$

si ricava

$$Q \sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i = \left\{ \sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i \right\} Q;$$

quindi la suddetta espressione è un operatore P .

Si può ora determinare un operatore $\bar{P}$ tale che $H - \bar{P}$ sia un generico R . Infatti dalla

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} (H - \bar{P}) Q^i = \\ &= \sum_{i=0}^{i=m-1} Q^{m-i-1} H Q^i - m \bar{P} Q^{m-1} = P - m \bar{P} Q^{m-1} \end{aligned}$$

si deduce che basta porre $\bar{P} = \frac{1}{m} Q^{-m+1} P$ perchè $H - \bar{P}$ sia un R .

Risulta allora

$$H = P + \sum R$$

con

$$R = P_i I \quad \text{o} \quad R = IP'_i,$$

ed I costruito con una generica radice dell'unità (diversa da 1) di indice m , primitiva o no.

Matematica. — *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare.* Nota II di L. TOSCANO presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui aux points homologues ont une paire de droites conjuguées communes.* Nota di L. ERMOLAEF, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Tensori vincolati a un sistema di geodetiche.* Nota di MARIA PASTORI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In alcuni problemi di Meccanica dei sistemi continui, e in particolar modo dei corpi elastici, si introduce come ipotesi semplificatrice l'annullarsi in ogni punto di alcune componenti del tensore degli sforzi. Ne sono esempi classici i problemi di Saint-Venant e di Clebsch. Rappresentato il corpo elastico come un cilindro, nel primo problema si suppone infatti che le fibre parallele all'asse di cui il cilindro (verga) si può pensare costituito non subiscano che tensioni tangenziali, nel secondo che gli strati paralleli alle basi in cui il cilindro (piastra) si può immaginare decomposto non si influenzino reciprocamente ammettendo ciascuno un tensore degli sforzi piano, variabile però da strato a strato.

La nota soluzione del problema di Clebsch porta ad esprimere le componenti non nulle del tensore degli sforzi come funzioni di secondo grado nella coordinata x_3 (distanza dalla sezione media della piastra) i cui coefficienti dipendono da un'unica funzione biarmonica delle altre due variabili,

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

quando si supponga la sollecitazione al bordo simmetrica rispetto alla sezione media ⁽¹⁾.

Alla soluzione del problema di Clebsch si può dare facilmente forma tensoriale che si presti ad un riferimento a coordinate curvilinee qualunque sulle sezioni parallele alle basi, e quindi a coordinate cilindriche generali nello spazio.

Si ha precisamente:

$$(I) \quad \Phi^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha h} \varepsilon^{\beta k} f_{jhk}$$

dove, per le note proprietà di emisimmetria delle ε a tre indici (componenti controvarianti del tensore di Ricci) sono nulle quelle componenti del tensore (I) in cui almeno uno degli indici ha il valore 3, come esige il problema di Clebsch. La f ha l'espressione seguente:

$$(II) \quad f = U - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{x^3{}^2}{2} \Delta U$$

essendo U una funzione biarmonica delle due variabili x^1 e x^2 e λ il coefficiente di contrazione trasversale ⁽²⁾.

Se, servendosi della forma tensoriale, ci si propone di studiare un problema analogo a quello di Clebsch per una piastra comunque curva, concepita come composta di tanti strati paralleli alle basi, si incontrano però complicazioni analitiche che non hanno riscontro nel caso piano.

Si può ancora riferire lo spazio a un sistema di coordinate analoghe alle cilindriche in cui fungono da $x^3 = \text{cost.}$ le basi della piastra e le sezioni parallele ad esse ed x^3 rappresenta la distanza da una di queste superficie, ad es. dalla sezione media (cfr. § 1), e cioè consente di tener separata, per quanto è possibile, la dipendenza dalla coordinata x^3 da quella dalle altre due.

(1) A. CLEBSCH, *Theorie der Elasticität fester Körper* (Leipzig, 1862, p. 148 e segg.). Per la deduzione diretta del tensore degli sforzi cfr. ad es. LOVE, *A Treatise on the Mathem. Theorie of Elasticity* (Cambridge, 1927, p. 206). Ved. inoltre la Nota del prof. G. SUPINO, *Sul problema di Clebsch* (questi «Rendiconti», vol. XV, ser. 6°, 1932, pp. 366-371) nella quale è mostrata la dipendenza elementare del problema di Clebsch dal problema elastico piano in due dimensioni. Ved. inoltre le nove Note del prof. ALMANZI dal titolo: *Sulla deformazione delle piastre elastiche*, apparse in questi «Rendiconti» dal novembre 1932 al luglio 1933; la deformazione in esame è chiamata di classe A.

(2) Si può infatti constatare che le (I) soddisfano, per lo spazio euclideo e se le $x^3 = \text{cost.}$ sono piani alle equazioni indefinite $\Phi^{\alpha\beta}_{|3} = 0$ qualunque sia f , e che, per la forma (II) di f vengono soddisfatte le equazioni di Beltrami che evidentemente si scrivono in coordinate generali, e sempre per lo spazio euclideo; $\bar{\Delta}\Phi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{1+\lambda}\Phi_{|\alpha\beta}$ con $\bar{\Delta}\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta|\gamma\delta}g^{\gamma\delta}$ e $\Phi = \Phi_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. Per una deduzione diretta di queste equazioni in coordinate generali cfr. B. FINZI, *Su di una forma delle equazioni indefinite dei sistemi flessibili elastici* («Rend. del R. Istit. Lombardo», vol. LXVII, 1934, pp. 261-269, § 3).

Ma la derivazione covariante nello spazio introduce termini con i coefficienti della seconda forma fondamentale delle superficie $x^3 = \text{cost.}$, che mancano solo nel caso piano, e se si vuol conservare la forma (I) del tensore degli sforzi, si vengono a introdurre enti che hanno carattere tensoriale solo rispetto a cambiamenti di variabili che conservano le x^3 , e che chiamo *tensori vincolati* al sistema delle x^3 ⁽¹⁾.

In questa Nota, che fa da introduzione analitica al problema meccanico sul quale riferirò in seguito, traccio brevemente la teoria dei tensori vincolati, teoria che d'altra parte non mi pare priva d'interesse anche per se stessa. In vista appunto delle applicazioni meccaniche, limito la trattazione allo spazio ordinario nel quale le x^3 sono rette normali a una famiglia di superficie parallele; ma essa si potrebbe fare egualmente, come indico da ultimo, per una varietà riemanniana, pur di prendere per x^3 un sistema di geodetiche.

Fra i risultati che mi sembrano più interessanti ricorderò i seguenti:

La derivazione dei tensori vincolati è la derivazione tensoriale parziale, che già ebbi occasione di studiare ⁽²⁾, e conseguentemente le operazioni di derivare tensorialmente e di vincolare un tensore non sono tra loro commutabili.

Mentre, come è ben noto, il tensore fondamentale ha derivato nullo, il vettore vincolato che si ottiene da esso ha derivato non nullo e atto a individuare la seconda forma fondamentale di ogni superficie $x^3 = \text{cost.}$

La trattazione relativa ai tensori vincolati è legata in modo essenziale alla seconda forma fondamentale delle superficie $x^3 = \text{cost.}$, e solo nel caso in cui queste siano piani i tensori vincolati vanno trattati come tensori ordinari.

I. — TENSORI VINCOLATI E LORO DERIVAZIONE.

Riferiamo lo spazio a un sistema di coordinate curvilinee così costituito: dai punti di una qualunque superficie σ , e da una stessa parte, spicchiamo le normali, che prendiamo per linee x^3 . Le superficie $x^3 = \text{cost.}$ sono tutte parallele a σ e quest'ultima è la $x^3 = 0$. Non poniamo nessuna restrizione per le linee $x^1 x^2$. Come è noto il ds^2 assume la forma geodetica:

(1) La denominazione di tensori vincolati è già stata usata dal prof. Cisotti con significato che si avvicina a questo attraverso alla derivazione (cfr. U. CISOTTI, *Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca* (questi «Rendiconti», vol. IX, ser. 6^a, 1929, pp. 673-676) cfr. inoltre M. PASTORI, *Sulla derivazione parziale dei tensori* («Ibidem», II sem., 1929, pp. 10-15).

(2) Cfr., oltre alla Nota già citata, la seguente: *Ancora sulla derivazione parziale dei tensori* (questi «Rendiconti», 1930, pp. 17-22) e *Derivazione parziale dei tensori in relazione con la loro rappresentazione intrinseca e parzialmente intrinseca* («Ibidem», pp. 85-90).

$$(1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{ik} dx^i dx^k + dx^3{}^2 \quad (1)$$

dove le g_{ik} sono funzioni di $x^1 x^2 x^3$ che, per ogni particolare valore di quest'ultima variabile, diventano i coefficienti della prima forma fondamentale della corrispondente superficie $x^3 = \text{cost.}$, in particolare di σ per $x^3 = 0$.

Notiamo che per la forma particolare del ds^2 si ha:

$$(2) \quad g_{i3} = g^{i3} = 0 \quad g_{33} = g^{33} = 1$$

e inoltre:

$$(3) \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ i \ k \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3} = b_{ik} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ 3 \ k \end{matrix} \right\} = -b_{ik} g^{hi} = -b_k^i$$

dove le b_{ik} sono funzioni di $x^1 x^2 x^3$ che, per $x^3 = \text{cost.}$ diventano, relativamente alla corrispondente superficie, i coefficienti della seconda forma fondamentale, caratterizzante, come è noto, la configurazione della superficie stessa in $S_3^{(2)}$.

Si ha infine:

$$(4) \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Operiamo una qualunque trasformazione delle variabili $x^1 x^2$, conservando invece la x^3 . Verrà conservata la forma geodetica (1) trasformandosi in se stessa la forma bidimensionale che ne costituisce il primo termine. Indicando con $\bar{x}^1 \bar{x}^2 \bar{x}^3$ le nuove variabili, si avranno le seguenti formule di trasformazione:

$$(5) \quad \begin{cases} x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \\ x^3 = \bar{x}^3. \end{cases}$$

Consideriamo ad es. un tensore doppio di S_3 di componenti covarianti $T_{\alpha\beta}$. Scegliamo tra le sue 9 componenti le 3 seguenti $T_{\alpha 3}$, che come è ben noto, non costituiscono in generale le componenti di un vettore. Esse però si comportano come le componenti covarianti di un vettore di S_3 di fronte a un cambiamento di variabili del tipo (5). Si ha infatti per esse:

$$(6) \quad \bar{T}_{\alpha 3} = T_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \delta_3^\gamma = T_{\beta 3} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha}.$$

(1) Indicheremo sempre con una lettera latina un indice che possa assumere solo i valori 1 e 2 e con una lettera greca un indice che possa assumere anche il valore 3.

(2) Cfr., ad es., L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. (Bologna, Zanichelli, 1923, vol. II, parte II, p. 423).

Chiameremo *vettore vincolato* al sistema delle x^3 l'ente individuato da queste tre componenti. Naturalmente da un tensore triplo si possono ottenere un tensore doppio vincolato $T_{\alpha\beta 3}$, un vettore vincolato $T_{\alpha 33}$ e un invariante vincolato T_{333} . È ovvia l'estensione ad un tensore m^{blo} .

Ritornando per semplicità al tensore doppio, ricordiamo la formola di derivazione covariante che applichiamo alle sole componenti $T_{\alpha 3}$. Avremo, tenendo conto delle (3) e (4):

$$(7) \quad T_{\alpha 3/\gamma} = \frac{\partial T_{\alpha 3}}{\partial x^\gamma} - T_{\lambda 3} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\} + T_{\alpha l} b_\gamma^l.$$

Osserviamo che l'ultimo termine del secondo membro contiene quelle componenti di $T_{\alpha\beta}$ che noi abbiamo escluse per avere il vettore vincolato $T_{\alpha 3}$. Per costruire il derivato di questo vettore vincolato non va dunque tenuto conto dell'ultimo termine, ma solo dei primi due, va cioè fatta una derivazione tensoriale parziale nella quale il secondo indice non va considerato come indice di covarianza.

In armonia con la notazione già introdotta a proposito della derivazione parziale, rappresenteremo d'ora in poi i tensori vincolati al sistema delle x^3 nel modo seguente: $T_{\alpha(3)}$, $T_{\alpha\beta(3)}$, $T_{\alpha(33)}$, ecc.

Avremo dunque, per il derivato di $T_{\alpha(3)}$ ad es.:

$$(8) \quad T_{\alpha(3)/\gamma} = \frac{\partial T_{\alpha(3)}}{\partial x^\gamma} - T_{\lambda(3)} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\}.$$

Osserviamo che il carattere di tensore doppio vincolato per (8) discende sia dalle formole di derivazione parziale dei tensori, ove si tenga conto delle (5)⁽¹⁾, sia dal fatto che in (7) tanto il primo membro che l'ultimo termine del secondo membro hanno tale carattere (cfr. § seguente).

2. — TENSORI VINCOLATI FONDAMENTALI. — SIGNIFICATO GEOMETRICO DEI LORO DERIVATI.

Dal tensore fondamentale $g_{\alpha\beta}$ possiamo ottenere un vettore vincolato $g_{\alpha(3)}$ (vettore vincolato fondamentale), che, a differenza del tensore da cui proviene, ha derivato $g_{\alpha(3)/\gamma}$ non nullo, e dotato di significato geometrico notevole. Applicando infatti la formola di derivazione (8) e tenendo conto delle (2) (3) (4) si conclude che sono nulle quelle componenti di $g_{\alpha(3)/\gamma}$ nelle quali uno almeno degli indici fuori parentesi ha il valore 3, e per le altre si ha:

$$(9) \quad g_{r(3)/s} = -b_{rs}.$$

(1) Cfr., oltre alle Note già citate, la seguente: *I sistemi assoluti di Pascal-Vitali e la derivazione parziale dei tensori* (« Atti della Pontificia Acc. Nuovi Lincei », anno LXXXIV, 1931, pp. 3-22).

Il derivato del vettore vincolato fondamentale individua quindi la seconda forma fondamentale di ogni superficie $x^3 = \text{cost.}$ Indicheremo in seguito anche con $-b_{\alpha\gamma}$ il tensore doppio vincolato $g_{\alpha(3)/\gamma}$.

Un altro tensore, intimamente legato al tensore fondamentale, è in S_3 il tensore triplo emisimmetrico di Ricci $E_{\alpha\beta\gamma}$, anch'esso a derivato nullo.

Il tensore doppio vincolato $\varepsilon_{\alpha\beta(3)}$, ottenuto dal tensore di Ricci, ha pure derivato *non nullo* e legato alla seconda forma fondamentale delle superficie $x^3 = \text{cost.}$ Applicando infatti le formole di derivazione parziale analoghe alle (8), tenendo conto delle proprietà delle componenti del tensore di Ricci, delle (4) e della nota formola $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \lambda \ \gamma \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial x^\gamma}$, si conclude che, quando gli indici α e β hanno entrambi o nessuno il valore 3, le corrispondenti componenti di $\varepsilon_{\alpha\beta(3)/\gamma}$ sono nulle; quando uno solo degli indici α e β ha il valore 3, si ha:

$$(10) \quad \varepsilon_{3k(3)/\gamma} = -\varepsilon_{\lambda k(3)} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ 3 \ \gamma \end{smallmatrix} \right\} = \varepsilon_{\lambda k(3)} b_{\gamma}^{\lambda} = \varepsilon_{ik(3)} b_{\gamma}^i$$

che è 0 solo quando $\gamma = 3$, altrimenti è legato in modo semplice alla seconda forma fondamentale delle $x^3 = \text{cost.}$

Evidentemente del vettore vincolato $\varepsilon_{\alpha(3)}$ non è il caso di parlare perchè è nullo.

3. — TENSORI VINCOLATI DI CURVATURA. — IDENTITÀ NOTEVOLI.

Consideriamo ora il tensore di curvatura di componenti miste $R_{\alpha}^{\beta}{}_{,\gamma\delta} = \{ \alpha\beta, \gamma\delta \}$ (simboli di Riemann). Per le note proprietà di emisimmetria di questo tensore esso dà luogo solo ai seguenti tensori vincolati: a) $R_{(3)}^{\beta}{}_{,\gamma\delta}$, b) $R_{\alpha}^{(3)}{}_{,\gamma\delta}$, c) $R_{\alpha}^{\beta}{}_{,(3)\delta}$, d) $R_{(3)}^{\beta}{}_{,(3)\delta}$, e) $R_{\alpha}^{(3)}{}_{,(3)\delta}$. Ma nel caso in esame il tensore di curvatura è nullo per essere lo spazio euclideo; tali saranno quindi tutti i tensori vincolati precedenti. Si vede facilmente che l'annullarsi di alcuni di essi esprime relazioni già note per altra via, quali le equazioni di Codazzi per ogni superficie $x^3 = \text{cost.}$ (1), l'annullarsi di altre porta ad identità dovute alla forma particolare del ds^2 . Riuniamo queste identità (form. (11)) e ne aggiungiamo altre analoghe di facile verifica:

$$(11) \quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^3} = -b_i^l b_{lk}, \quad \frac{\partial b_k^i}{\partial x^3} = b^{il} b_{lk}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \begin{smallmatrix} r \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\} = -b_{i|k}^r$$

$$(12) \quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^3} = 2 b^{ik}, \quad \frac{\partial b^{ik}}{\partial x^3} = 3 b^{il} b_l^k.$$

(1) Si ha infatti dalle componenti di a) e di b) non identicamente nulle e diverse da quelle di d) e di e): $b_{h|k}^r - b_{k|h}^r = 0$, $b_{rh|k} - b_{rk|h} = 0$. Le equazioni di Gauss per

4. — INVARIANTI VINCOLATI E MISTI. — INVARIANTI INCOMPLETI.

Come caso particolare di tensore vincolato si ha un invariante vincolato, ottenuto prendendo quell'unica componente di un tensore in cui tutti gli indici hanno il valore 3. Per le considerazioni del § 1 si ha ad es.:

$$(13) \quad T_{(33)/\gamma} = \frac{\partial T_{(33)}}{\partial x^\gamma}.$$

Da un invariante vincolato si ottiene quindi per derivazione un vettore vincolato allo stesso modo come da un invariante ordinario si ottiene un ordinario vettore. Naturalmente le sue componenti differiscono da quelle di $T_{\alpha\beta/\gamma}$ in cui i primi due indici hanno il valore 3. Si ha infatti:

$$(14) \quad T_{33/\gamma} - T_{(33)/\gamma} = (T_{13} + T_{31}) b_\gamma^1.$$

Se in un tensore vincolato si saturano gli indici liberi si ottiene ancora un invariante rispetto alle trasformazioni (5). Lo chiameremo invariante misto. Il più semplice invariante misto è del tipo $T_{\alpha(3)} X^\alpha$. Il vettore vincolato ottenuto per derivazione da tale invariante misto è:

$$(15) \quad (T_{\alpha(3)} X^\alpha)_{/\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (T_{\alpha(3)} X^\alpha) = T_{\alpha(3)/\gamma} X^\alpha + T_{\alpha(3)} X_{/\gamma}^\alpha.$$

Altri invarianti rispetto alle trasformazioni (5) sono del tipo $T_{ij} g^{ij}$, formati cioè con le sole componenti di T ad indici diversi da 3: li chiameremo invarianti incompleti. Il loro legame con gli invarianti vincolati si trova subito costruendo l'invariante ordinario ottenuto per contrazione da un tensore doppio e tenendo conto delle (2). Si ha:

$$(16) \quad T = T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = T_{ij} g^{ij} + T_{33} = T^* + T_{(33)}.$$

L'invariante incompleto T^* è dunque la differenza tra un invariante ordinario e un invariante vincolato; discende allora che anche per un invariante incompleto la derivazione covariante coincide con l'ordinaria. Naturalmente $T_{/\gamma}^*$ differisce da $T_{ij/\gamma} g^{ij}$. Si ha per (16), (12), (14):

$$(17) \quad T_{/\gamma}^* = T_{\alpha\beta/\gamma} g^{\alpha\beta} - T_{(33)/\gamma} = T_{ij/\gamma} g^{ij} + (T_{13} + T_{31}) b_\gamma^1.$$

ogni superficie $x^3 = \text{cost.}$ si avrebbero invece dalle componenti del tensore di curvatura ad indici tutti diversi da 3.

Per le applicazioni che abbiamo in vista giova considerare il caso particolare in cui il tensore doppio $\mathbf{T}$ sia il derivato di una funzione f . Indicando allora con $\bar{\Delta}$ l'operatore di Laplace per lo spazio, si ha per le (2):

$$(16') \quad \bar{\Delta}f = f_{|ij} g^{ij} + f_{|33} = \Delta^*f + f_{|33}.$$

e le (17) diventano:

$$(17') \quad \Delta^*f_{|v} = \frac{\partial}{\partial x^v} \Delta^*f = f_{|ijv} g^{ij} + 2f_{|l3} b_v^l.$$

Dalle considerazioni svolte in questo paragrafo e nel § 1 sulla derivazione dei tensori vincolati risulta in modo ovvio che l'annullarsi di uno di questi enti porta come conseguenza l'annullarsi dei suoi derivati. Risulta inoltre che le due operazioni di derivare tensorialmente e vincolare un tensore non sono tra loro commutabili, avendo trovato in casi semplici la differenza prodotta dall'applicare le due operazioni in ordine diverso.

5. — ESTENSIONI.

Nei paragrafi precedenti ci siamo limitati ai casi più semplici, ma è ovvia l'estensione ai casi generali. Abbiamo generalmente rappresentato i tensori in forma covariante, ma le stesse conclusioni valgono evidentemente per la rappresentazione controvariante o mista ⁽¹⁾. Abbiamo considerato tensori dello spazio ordinario, ma la trattazione si potrebbe fare allo stesso modo per una qualunque varietà riemanniana, pur di sostituire alla famiglia delle superficie parallele $x^3 = \text{cost.}$ una famiglia di ipersuperficie geodeticamente parallele e quindi alle rette x^3 le geodetiche. È noto infatti che la metrica della varietà assume allora la forma geodetica (1) e valgono le (2), (3), (4) ⁽²⁾.

È quindi naturale di parlare in generale di tensori vincolati a un sistema di geodetiche.

Le conclusioni che non sono più valide nel caso generale sono quelle contenute nel § 3 e dovute all'annullarsi del tensore di curvatura. In particolare non sono più valide le identità (11).

(1) Per le (2) l'indice 3 può considerarsi indifferentemente di covarianza o di controvarianza.

(2) Ved. L. BIANCHI, loc. cit.

Fisica (Fisica tecnica). — *La decantazione delle sospensioni cristalline.* — III. *Decantatori continui cilindrici* ⁽¹⁾. Nota di G. BOZZA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

In una precedente Nota ⁽³⁾ sono state scritte le equazioni generali differenziali cui deve soddisfare la concentrazione di una sospensione di grani non colloidali durante una decantazione. Prendiamo qui ora in particolare considerazione il caso delle decantazioni continue.

Si dirà continua una decantazione durante la quale non varia nel tempo la concentrazione della sospensione decantante. È chiaro perciò che si deve continuamente alimentare la sospensione originaria dall'alto del decantatore e sottrarre dal basso la sospensione inspessita. Come ho accennato nella prima Nota, in questo caso il fattore di rallentamento ψ , che rispecchia l'influenza del fondo o di strati a densità rapidamente variabile sulla velocità di caduta dei grani, si può ritenere eguale ad uno: difatti, se anche esiste uno strato inspessito presso il fondo, poichè l'altezza di questo strato non varia con il tempo, si può sempre prescindere da esso limitando idealmente lo strato decantante con un piano orizzontale distante da tale strato inspessito sufficientemente perchè al disopra sia trascurabile la sua influenza.

In tale ipotesi vale l'equazione (13) della Nota I.

La velocità V globale della sospensione in una data sezione è caratterizzata evidentemente dalla quantità di sospensione che viene continuamente eliminata dal basso, quantità che deve, nel nostro problema, essere costante nel tempo. Invece V può essere diversa nelle diverse sezioni, se queste non sono eguali fra loro. Tale il caso dei decantatori conici. Ad ogni modo, se le sezioni sono variabili con l'altezza, bisognerà ritenere che queste variazioni siano *piccole*, in modo che siano trascurabili le velocità trasversali rispetto a quelle verticali.

Considero ora il caso dei decantatori cilindrici; tali sono ad es. i decantatori tipo Dorr, nei quali lo scarico continuo è assicurato da una pompa che estrae il fango condotto al centro da apposite braccia.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano (Cattedra di Termotecnica).

(2) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(3) « Rend. Lincei », vol. XXI, fasc. 10, p. 697. Per il significato dei simboli si rinvia a questa Nota: inoltre le espressioni saranno citate con il loro numero seguito dal numero d'ordine della Nota.

Poichè V è, per i decantatori cilindrici, indipendente da ξ , l'equazione (13, I) diviene

$$(1) \quad - \left\{ \frac{V}{V_1} + c(1-c)\varphi' + (1-2c)\varphi \right\} \frac{dc}{d\xi} = 0.$$

Essa non può essere soddisfatta che per $\frac{dc}{d\xi} = 0$. Perciò la concentrazione è una costante in tutto lo strato decantante (al disopra dello strato limitante la zona nella quale si fa sentire l'influenza del fondo).

Si tratta ora di definire la costante stessa.

La velocità V costante, caratteristica del fenomeno, è determinata dalla portata di scarico del decantatore, e si identifica con il volume di materiale che si scarica per unità di superficie del decantatore nell'unità di tempo, che indicherò con q :

$$(2) \quad V = q.$$

Ricordando la (3, I), poichè la quantità di solido che passa attraverso una sezione unitaria al secondo è $V_s c$, si ha

$$(3) \quad V_s c = cq + c(1-c)\varphi V_1$$

che è la quantità di solido che si scarica nel volume q . Perciò la concentrazione della sospensione scaricata c_0 è legata a quella del decantatore c e alla portata di questo dalla

$$(4) \quad c_0 = \frac{c V_s}{q} = c + c(1-c)\varphi \frac{V_1}{q}.$$

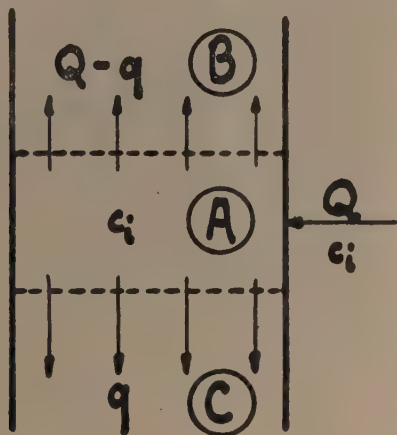
La quantità $\frac{q}{V_1}$ si può definire come una specie di portata unitaria adimensionale; con essa l'espressione resta indipendente dalla grandezza dei grani e quindi da V_1 .

Se la sospensione di concentrazione c_i viene introdotta nel decantatore con la portata Q per unità di superficie, la quantità in volume di solido introdotta nel decantatore per unità di superficie e per unità di tempo è Qc_i . Perchè non si abbiano perdite di solido per tracimazione tale quantità dovrà eguagliare quella uscente qc_0 . Si definisce così senz'altro il rapporto fra la portata di introduzione e quella di scarico necessario ad ottenere un dato rapporto di concentrazione, ossia a raggiungere una prefissa concentrazione c_0 partendo da una sospensione di concentrazione c_i

$$(5) \quad \frac{q}{Q} = \frac{c_i}{c_0}.$$

Non è fissato invece il valore di Q (o di q), ossia la quantità di solido che si può decantare per unità di superficie.

Per poterla determinare, schematizziamo l'apparecchio come segue: in una zona A si ha l'alimentazione della quantità Q per unità di superficie; in tutta questa zona si supponga che la concentrazione sia uniforme, c_i , il che corrisponde ad ammettere in essa un continuo mescolamento. Nella



zona B si ha il passaggio di liquido puro, senza solido in sospensione, con una portata unitaria $Q - q$. Questa, che corrisponde alla velocità ascensionale del liquido in B, deve essere tale da non trascinare le particelle che si trovano disperse in A; quindi deve essere minore di V_l (trascinamento di una particella isolata), e tutt'al più eguale a $(1 - c_i) \varphi_i V_l$, velocità di caduta in massa alla concentrazione c_i . È facile allora determinare il valore massimo per Q quando è noto il rapporto $\frac{q}{Q}$, tenendo conto della (5)

$$(6) \quad Q_{\max} = \frac{c_o(1 - c_i) \varphi_i V_l}{c_o - c_i}.$$

Si ha così la massima alimentazione ammissibile in funzione della concentrazione di alimentazione, di quella di scarico e della velocità in caduta libera, relazione cui bisogna aggiungere la (5) per fissare $q_{\max}$.

Agevolmente si ricava allora la relazione fra c_i , c_o e la concentrazione nella colonna decantante: risulta dalla (4), tenendo conto del valore di $q_{\max}$ ricavabile dalla (6).

$$(7) \quad c_o = c + \frac{c(1 - c) \varphi}{c_i(1 - c_i) \varphi_i} (c_o - c_i).$$

Da questa si può ottenere c essendo noti c_0 e c_i , per tentativi, oppure c_0 in funzione di c e di c_i

$$(8) \quad c_0 = \frac{c c_i \{ (1 - c_i) \varphi_i - (1 - c) \varphi \}}{c_i (1 - c_i) \varphi_i - c (1 - c) \varphi}.$$

Naturalmente si può fare anche un'alimentazione meno forzata, guadagnando in sicurezza di funzionamento: si può cioè porre

$$(9) \quad Q - q = \alpha (1 - c_i) \varphi_i V_i$$

che corrisponde a $Q = \alpha Q_{\max}$, con α fattore di sicurezza inferiore all'unità: in tal caso

$$(10) \quad Q = \frac{\alpha c_0 (1 - c_i) \varphi_i V_i}{c_0 - c_i}$$

$$(11) \quad c_0 = \frac{c c_i \{ \alpha (1 - c_i) \varphi_i - (1 - c) \varphi \}}{\alpha c_i (1 - c_i) \varphi_i - c (1 - c) \varphi}.$$

Bisogna escludere evidentemente sia i valori negativi di c_0 , sia i valori $c_0 < c$; d'altra parte, ricordando la (4), poichè il termine $(1 - c) \varphi \frac{V_i}{q}$ è essenzialmente positivo, deve essere $c_0 > c$, e bisogna escludere tutti i valori di c che risultassero maggiori della concentrazione di scarico c_0 .

La conoscenza di c ha importanza per la *capacità di accumulo* del decantatore. È chiaro che questo fattore può intervenire tutte le volte che le condizioni prefissate di concentrazione di scarico e di alimentazione e di portata vengono accidentalmente alterate.

Si immagini così che ad un dato istante lo scarico venga arrestato per un certo periodo di tempo, senza che venga modificata l'alimentazione: il volume Q per unità di superficie deve tutto sfuggire per tracimazione nell'unità di tempo. Si vede immediatamente la necessità che, in questa eventualità, qualora non si voglia fin dal primo istante la tracimazione di sostanza solida, Q sia inferiore a $(1 - c_i) \varphi_i V_i$, e che si adotti perciò un coefficiente α di sicurezza almeno corrispondente a tali condizioni:

$$(12) \quad \alpha = \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{(1 - c_i) \varphi_i V_i}{(1 - c_i) \varphi_i V_i c_0} (c_0 - c_i) = \frac{c_0 - c_i}{c_0} = 1 - \frac{c_i}{c_0}.$$

I fattori di sicurezza devono perciò essere tanto più piccoli quanto più concentrata è la torbida che viene alimentata.

Nelle condizioni suddette però il solido in breve riempie il decantatore; si passa ad una decantazione non più continua, che esaminerò in altro luogo; però fin d'ora si può vedere che il tempo affinché il decan-

tatore si riempia di fango è strettamente legato alla concentrazione c preesistente nel decantatore, alla grandezza dei granelli di solido, ossia a V_i , e all'altezza del decantatore (o meglio, all'altezza adimensionale del decantatore stesso), oltre che alle condizioni di alimentazione. E ricordo che anche in una decantazione discontinua la concentrazione della zona superiore rimane costante, per concentrazioni non troppo elevate, mentre si accresce quella della zona inferiore e si innalza lo strato di separazione fra le due zone. Il decantatore sarà pieno quando questo strato di separazione avrà raggiunto la zona di introduzione della torbida A. Si inizia allora la trascinazione immediatamente se α è stato scelto secondo la (12), solo dopo qualche tempo, cioè quando la concentrazione è ancora salita, se α è minore.

Qualora lo scarico venga aperto di nuovo prima che il decantatore sia pieno, con la stessa portata q , si scaricherà un materiale di concentrazione maggiore di c_0 dato l'accrescimento di concentrazione negli strati inferiori: gradualmente il decantatore si vuota fino a ristabilire le iniziali condizioni di regime in c_0 e in c . Il tempo necessario per questo vuotamento è dato dal tempo di evacuazione del volume contenuto nello strato nel quale la concentrazione è aumentata rispetto a quella di regime; esso perciò è immediatamente calcolabile nota l'altezza di riempimento del decantatore durante il periodo di chiusura dello scarico.

Chimica. — *La suscettività magnetica degli ossidi misti delle terre rare: miscele di Neodimio e Praseodimio e di Neodimio e Samario*⁽¹⁾. Nota I di L. MAZZA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Il metodo di analisi magnetochimica di Urbain⁽³⁾ risolve un problema di grande importanza nel campo delle terre rare quale la determinazione quantitativa di due elementi presenti in una miscela binaria. Di particolare interesse e di più frequente applicazione è il caso in cui si tratta di determinare due elementi vicini, come, ad es., nelle separazioni delle terre rare. Questo stesso problema trova una soluzione nella determinazione dei pesi atomici delle miscele: però questa determinazione — oltre ad essere lunga e laboriosa — trattandosi di elementi vicini, aventi quindi pesi atomici che differiscono fra loro soltanto di poco, risulta in generale di precisione insufficiente. L'analisi basata sulla röntgenspettrografia rappresenta pure un metodo molto importante e generale, ma la sua precisione nelle applicazioni quan-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(3) G. URBAIN, «C. R.», 150, 913 (1910).

titative che si riferiscono alle terre rare è, nella maggior parte dei casi ⁽¹⁾, sensibilmente inferiore a quella del metodo di analisi magnetochimica. La condizione fondamentale per la applicabilità del metodo di Urbain è basata sul fatto che la suscettività della miscela si comporti in modo strettamente additivo per rapporto alla suscettività dei componenti. Infatti, secondo le esperienze di Urbain ⁽²⁾, risulta che la legge di variazione della suscettività magnetica in funzione della composizione è lineare. Ciò è stato verificato da questo Autore su diversi miscugli ottenuti per via chimica partendo dai corpi puri, cosicchè si può calcolare con sufficiente esattezza dalla suscettività di una miscela di terre rare la quantità dei componenti.

Questi risultati sono in accordo con quanto si può prevedere, in base alle vedute più recenti sulla struttura atomica degli elementi trivalenti delle terre rare. Negli atomi di questi 14 elementi, come è noto, procedendo dall'esterno all'interno, ai tre elettroni di valenza $(5d)(6s)_2$ segue da prima uno strato completo formato dagli otto elettroni $(5s)_2(5p)_6$, poi il livello incompleto 4f il quale si riempie gradualmente con 14 elettroni passando dal Cerio (58) al Lutezio (71). A questo livello 4f in via di formazione si devono attribuire le proprietà singolari (magnetiche ed ottiche) delle terre rare. Questi elettroni 4f magneticamente attivi, risultano quasi schermati dal livello completo di numero quantico più alto $(5s)_2(5p)_6$ e non sono perturbati nel loro comportamento magnetico da azioni esterne anche chimiche, come avviene negli elementi di transizione, ad esempio, nel gruppo del ferro, nei quali sono magneticamente attivi gli elettroni più esterni e quindi le azioni chimiche hanno una influenza molto grande sul magnetismo, tantochè si verificano frequentemente degli errori notevoli nella determinazione dei momenti magnetici.

Nella esecuzione di misure accurate sulla suscettività magnetica di ossidi misti formati da due elementi delle terre rare ho potuto osservare che non sempre la suscettività si comporta in modo strettamente additivo. Questa anomalia, che, a mia conoscenza, non è stata prima d'ora messa in rilievo, si verifica, nel gruppo dei ceridi, quando uno degli elementi che compongono la miscela può dare uno ione quadrivalente (Ce-Pr).

Per questi due elementi si deve ammettere che i primi elettroni che vanno ad occupare il livello 4f in via di formazione possano essere liberati con una certa facilità; così il Cerio, il quale ha un solo elettrone (4f) può liberare questo e divenire quadrivalente, il Praseodimio che ne ha due può analogamente liberarne uno, sebbene con maggior difficoltà.

I risultati che vengono riferiti in questa Nota riguardano gli ossidi misti di Praseodimio e Neodimio (nei quali non si verifica la regola di additività)

(1) Se si eccettuano i casi in cui la miscela binaria è costituita fondamentalmente da un elemento in presenza di quantità minime di un altro.

(2) G. URBAIN, loc. cit.

e quelli di Neodimio e Samario (nei quali la variazione del magnetismo in funzione della composizione è sensibilmente rappresentata da una retta).

Le misure di suscettività furono eseguite col metodo di Gouy-Pascal misurando le forze ponderomotrici con una sensibile microbilancia. L'intensità del campo magnetico (circa 9000 gauss) fu mantenuta costante in tutte le esperienze. Tutte le misure furono effettuate a temperatura ambiente, intorno a 15° quelle di Pr_6O_{11} — Nd_2O_3 e intorno a 18° quelle di Nd_2O_3 — Sm_2O_3 .

Ad ogni serie di misure delle differenti miscele fu eseguita una taratura mediante il sale di Mohr, la cui suscettività magnetica è stata accuratamente determinata da Foex ⁽¹⁾ e da Jackson ⁽²⁾ e di cui si conosce la variazione della suscettività in funzione della temperatura. I dati di questi due Autori sul sale di Mohr sono fra di loro in buon accordo ⁽³⁾.

La preparazione degli ossidi è stata eseguita partendo da soluzioni di PrCl_3 ; NdCl_3 e SmCl_3 esattamente titolate e di purezza spettroscopica: in particolare il Samario, che tanto spesso contiene tracce di Gadolinio, è stato separato appositamente per queste ricerche da frazioni neodimio-samarifere ricche di Neodimio con il metodo di Drossbach ⁽⁴⁾ dei nitrati doppi col magnesio [$2\text{M}(\text{NO}_3)_3$, $3\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 24\text{H}_2\text{O}$].

Sono state preparate delle soluzioni contenenti Praseodimio e Neodimio oppure Neodimio e Samario in rapporti regolarmente variabili fra 0 e 100 e da queste sono stati precipitati i due elementi presenti allo stato di ossalati.

Dalle miscele di ossalati per calcinazione a circa 900° si ottennero gli ossidi. L'azione dell'anidride carbonica e dell'acqua su di essi è stata completamente eliminata chiudendo gli ossidi in fiale di vetro.

Sono state determinate le suscettività delle miscele delle seguenti composizioni e inoltre quelle dei singoli ossidi puri:

(1) G. FOEX, « Ann. de Phys. », 16, 259 (1921).

(2) JACKSON, « Trans. Royal Soc. », 224, 1 (1923).

(3) Il valore della suscettività specifica del $\text{FeSO}_4(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ assunto in queste determinazioni è $\chi \cdot 10^6 = 32.0$ a 18°C .

(4) DROSSBACH, « Ber. », 35, 2826 (1902).

TABELLA I.

Ossidi Praseodimio-Neodimio.

	Pr ₆ O ₁₁	Nd ₂ O ₃	$\chi \cdot 10^6$
1	0	100	31.1
2	10	90	30.3
3	20	80	28.7
4	30	70	25.6
5	40	60	23.1
6	50	50	20.8
7	60	40	18.9
8	70	30	17.5
9	80	20	16.4
10	90	10	15.8
11	100	0	15.6

TABELLA II.

Ossidi Neodimio-Samario.

	Nd ₂ O ₃	Sm ₂ O ₃	$\chi \cdot 10^6$
1	0	100	6.1
2	10	90	8.5
3	20	80	11.0
4	30	70	13.4
5	40	60	16.0
6	50	50	18.4
7	60	40	21.0
8	70	30	23.4
9	80	20	25.9
10	90	10	28.4
11	100	0	31.0

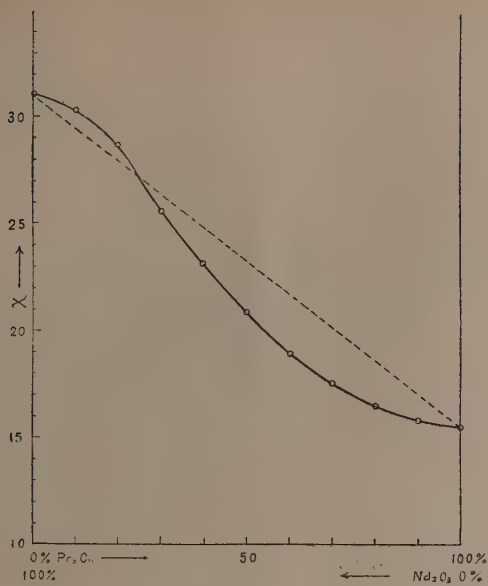


Fig. 1.

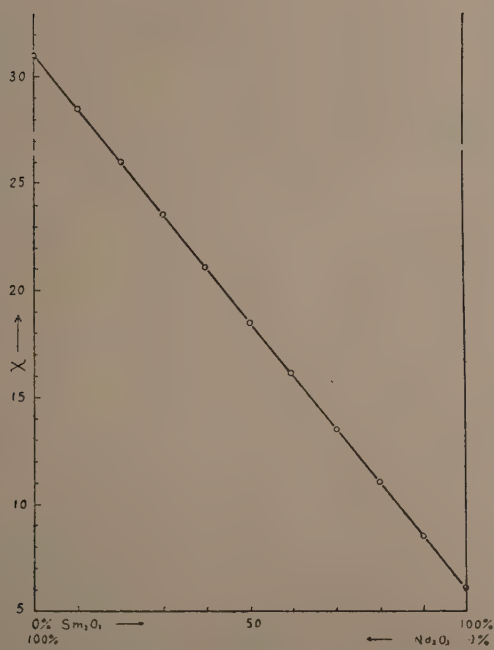


Fig. 2.

Con i valori riportati nella tabella 1 e 2 sono stati costruiti i diagrammi (figg. 1 e 2).

I risultati che si ottengono con gli ossidi misti di Nd e Sm, che sensibilmente possono essere rappresentati mediante una linea retta, confermano la regola di Urbain e non richiedono ulteriori considerazioni oltre a quelle già fatte.

Solo si può osservare la notevole precisione che si può ottenere in simili casi nelle applicazioni analitico-quantitative.

Il diagramma I (ossidi Pr — Nd) mostra con grande evidenza l'accennata anomalia. La prima parte della curva compresa fra 0 e 25 % di ossido di Praseodimio corrisponde ad una suscettività più elevata di quella che si può calcolare secondo la regola di additività; l'altra parte della curva fra 25 % e 100 % di ossido di praseodimio corrisponde, all'opposto, ad una suscettività assai minore in confronto a quella indicata dal calcolo.

La variazione della suscettività in funzione della composizione in queste miscele potrebbe essere messa in relazione con il fenomeno constatato da Marc ⁽¹⁾ e da Meyer e Koss ⁽²⁾ che l'ossido di Neodimio (Nd_2O_3) agisce ostacolando la formazione di ossidi superiori di Praseodimio, mentre secondo lo stesso Marc e Brauner ⁽³⁾ in presenza di piccole quantità di Praseodimio il Neodimio formerebbe un ossido che si avvicina a NdO_2 .

Ringrazio vivamente la sig.ra S. Sacchi per la collaborazione nelle misure.

(1) R. MARC, « Ber. », 35, 2370 (1902).

(2) MEYER e KOSS, « Ber. », 35, 3740 (1902).

(3) BRAUNER, « Zeitsch. f. an. Chem. », 32, 1 (1901).

Chimica. — *La struttura dell'antipirina in soluzione acquosa*⁽¹⁾.
Nota di G. DEVOTO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

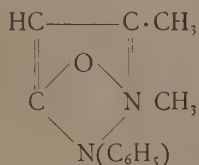
È noto che nella serie eterociclica pentatomica si ritrovano casi caratteristici di anfoteria: il pirazolo e i triazoli ne sono esempi tipici con la loro reazione neutra. Si distinguono così dall'imidazolo che reagisce alcalino e dal tetrazolo che reagisce acido.

Può avere qualche interesse l'indagare il tipo di anfoteria che questi composti presentano.

In una Nota precedente⁽³⁾ ho accennato infatti alle diverse gradazioni di polarità che si possono avere tra gli ioni anfoteri propriamente detti e le molecole polari nell'accezione di solito usata. Ho chiarito per esempio che nel caso del dimetilpirone in soluzione acquosa non si ha, come da qualcuno fu proposto un ione anfotero con l'ossigeno, ossonico, positivo, e l'ossigeno carbonilico negativo; ma bensì solo una molecola polare che chimicamente può tendere al carattere anfotero, ma fisicamente tale non è⁽⁴⁾. D'altra parte sono notissimi i veri ioni anfoteri; gli amminoacidi grassi e le betaine sono tali, si può dire, al cento per cento.

Prima però di studiare i composti eterociclici sopra accennati ho voluto accertarmi della possibilità di esistenza di forme polari in composti ossigenati. E questo perchè la localizzazione delle cariche è evidentemente facilitata in tali condizioni.

Tra i pirazoloni, ad esempio, già Michaelis⁽⁵⁾ aveva proposto una forma betainica nell'antipirina



formula da scriversi oggi più correttamente come

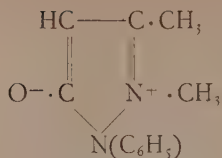
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 63, 847 (1933).

(4) Anche F. ARNDT (« Ber. », 63, 3121 (1930)), arriva da un punto di vista chimico ad uguali conclusioni.

(5) « Ann. », 320, 45 (1902); 339, 122 (1905).



E ne nacque così una polemica alla quale parteciparono Knorr⁽¹⁾, Stolz⁽²⁾ ed altri.

Ora è noto come forme polari anfotere si svelino nettamente mediante misure di costante dielettrica in soluzione acquosa. Ho condotto appunto ricerche con questo metodo sull'antipirina e il piramidone, in soluzione acquosa. Nella tabella che segue, c è la concentrazione in mol/litro, ϵ la costante dielettrica riferita a 25°, per lunghezze d'onda di 90 cm., $\frac{d\epsilon}{dc}$ il coefficiente dielettrico (C. d.).

Antipirina.

c	ϵ	$\frac{d\epsilon}{dc}$
0.000	77.85	} $\sim - 1.5$
0.128	77.65	

Piramidone.

0.000	77.85	} $- 6.7$
0.063	77.43	
0.108	77.11	

I risultati per le due sostanze non si possono in nessun modo conciliare con una formula polare anfotera.

Il C. d. che per tale forma si può prevedere, data la distanza di circa 3.5-4.0 Å calcolabile tra le due cariche, si aggira infatti sulle 30 unità.

La differenza è tale che non si può nutrire alcun dubbio in proposito. Abbiamo dunque qui un altro caso di polarità potenziale, non reale, come quelli dell'acido antranilico, dell'etereacetacetico, del dimetilpirone, cui altrove ho accennato⁽³⁾.

Ma se i risultati escludono una forma polare, certamente non si risolvono in una conferma della formula classica con doppi legami. L'indicazione di questi ultimi in composti di tale classe appare oggi cosa superata: e i numerosissimi fenomeni di tautomeria che si rivelano nei pirazoloni ne sono la prova palese.

(1) « Ann. », 328, 78 (1903).

(2) « Ber. », 36, 3281 (1903).

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 63, 847 (1933).

Fisiologia (Chimica biologica). — *Intorno all'azione del bromo sull'accrescimento e sulla metamorfosi delle larve di « Bufo vulgaris »* ⁽¹⁾.
Nota di V. FAMIANI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le osservazioni di Gudernatsch ⁽³⁾, relative alla influenza, tra l'altro, della tiroide e del timo — somministrati come alimento alle larve di rana — sull'accrescimento e sulla differenziazione di detti anfibi anuri, e dalle quali risultò che l'alimentazione con glandola tiroide determina una assai precoce metamorfosi con soppressione pressochè totale dall'accrescimento corporeo della larva, aprendo — com'è noto — ai ricercatori un vasto campo di studio, indussero G. Cotronei ⁽⁴⁾ ad occuparsi della questione e ad analizzarla più minutamente.

Con una numerosa serie di ricerche, eseguite su larve di rana e su larve di bufo, alimentate con tiroide fresca, G. Cotronei oltre a confermare la precedente osservazione di Gudernatsch ha potuto stabilire — sviluppando lo studio dell'argomento anche dal punto di vista anatomico ed istologico — come la influenza esercitata dalla tiroide sulla differenziazione delle larve sia disarmonica, e in maniera assai grave; in quanto che al momento culminante, critico, della metamorfosi, per quanto rapidamente possano procedere i fenomeni, non tutti gli organi si trovano ad un grado parallelo di differenziazione, sì che le larve non sono in grado di evolvere verso la nuova vita, e, non correggendosi la disarmonia, questa culmina col fenomeno della morte: chè, se pure reciprocamente autonomo e indipendente è lo sviluppo dei singoli organi, necessariamente armonico deve esserne il funzionamento.

Generalmente si ammette da numerosi autori che lo iodio, combinato con protidi, eserciti sulle larve la stessa azione che la tiroide; e che l'azione di questa è da riferire allo iodio in essa presente in tale combinazione. Non ricordiamo in particolare le molteplici osservazioni al riguardo per non uscire dai limiti proposti.

Ma se tanto è stato fatto circa l'azione dello iodio, manca senza dubbio una corrispondente serie di ricerche per il bromo, pur essendo giustificata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(3) I. F. GUDERNATSCH, *Feeding Experiments on Tadpoles. I. The influence of specific organ given as food on growth and differentiation. A contribution to the Knowledge of organs with internal secretion.* « Arch. f. Entwicklungsmechanik », 1912, 35, 457.

(4) G. COTRONEI, *Primo contributo sperimentale allo studio delle relazioni degli organi nell'accrescimento larvale, e nella metamorfosi degli anfibi anuri.* « Bios », 1913, 2, fasc. 1; e, in francese, « Arch. Ital. de Biologie », 1914, 61, 305.

dalla posizione di questo elemento nel sistema periodico, dalla sua presenza come microcostituente di tessuti e organi animali — tra cui la tiroide — e dalle proprietà che ha in comune con lo iodio, che può sostituire nelle stesse combinazioni protidiche.

Pertanto abbiamo ritenuto utile studiare, in rapporto all'accrescimento ed alla metamorfosi intanto delle larve di « *Bufo vulgaris* » l'eventuale azione di piccolissime quantità di bromo, aggiunte alla alimentazione abituale.

A tale scopo ci siamo serviti di 48 girini di « *Bufo vulgaris* » ottenuti circa 3 settimane prima tutti da uova dello stesso cordone, e non ancora alimentati. Essi sono stati divisi in due gruppi di 24 girini ognuno, ed alimentati: quelli del gruppo I con tuorlo d'uovo di gallina coagulato al calore — alimento che al Cotronei si è rilevato completo ed atto a permettere accrescimento e metamorfosi normale delle larve di anfibio —, e quelli del Gruppo II con lo stesso tuorlo d'uovo, al quale però si aggiungevano (per impastamento con ogni razione offerta) 6 gocce di acqua di bromo, contenente l'elemento nella proporzione del 0.002 %. I due lotti di larve sono stati posti in vaschette di vetro eguali, contenenti eguali quantità di acqua condotta e sistemate in pari condizioni di illuminazione e temperatura ambiente. L'acqua era rinnovata quotidianamente, l'alimento a giorni alterni.

Riassumiamo l'andamento dell'esperimento, nei suoi punti più salienti. All'inizio della ricerca, gli animali del gruppo I presentavano una lunghezza totale media di mm. 14.58 e quelli del gruppo II di mm. 14.54. Dopo 13 giorni la lunghezza media era di mm. 19.18 per gli animali del gruppo I e di mm. 22.11 per quelli del gruppo II, cioè, mentre gli animali alimentati con solo tuorlo cotto di uovo erano cresciuti di mm. 4.6, quelli alimentati con tuorlo d'uovo più 6 gocce della detta acqua di bromo erano invece cresciuti di mm. 7.54. Al 47° giorno di esp. erano morti 8 girini del I gruppo ma nessuno del gruppo II, nel quale anzi si notava già, in un animale, la comparsa degli arti posteriori. Al 51° giorno si contavano nel gruppo II 11 animali con le zampe posteriori; di questi uno presentava al 59° giorno la rottura della membrana opercolare con comparsa anche degli arti anteriori: ma esso si trovava morto il giorno seguente. A questo momento ancora nessuna larva del gruppo I presentava gli arti posteriori, che solo più tardi, al 63° giorno, incominciavano a osservarsi, e in un solo animale. Successivamente aumenta di continuo nel gruppo II il numero di girini, che presentano la comparsa degli arti anteriori, alla quale di regola segue la morte, entro le 24-36 ore successive. Soltanto al 75° giorno una sola larva del lotto I presenta la comparsa degli arti anteriori, e la sua metamorfosi procede quindi come di norma.

Volendo riassumere in altre parole i risultati ottenuti, possiamo dire, che i girini alimentati con tuorlo d'uovo cotto cui erano aggiunte piccole quantità di bromo, in un primo tempo hanno mostrato di risentirne beneficio — in confronto con quelli alimentati con solo tuorlo d'uovo, — nel

senso che l'accrescimento corporeo è stato maggiore, la mortalità nulla, e l'inizio della metamorfosi più precoce: ma quest'ultima non ha proceduto come di norma, in quanto gli arti posteriori sono rimasti cortissimi e tozzi, e, al momento critico della rottura della membrana opercolare, la larva non ha potuto evolvere ulteriormente ed è sempre morta entro le 24-36 ore successive.

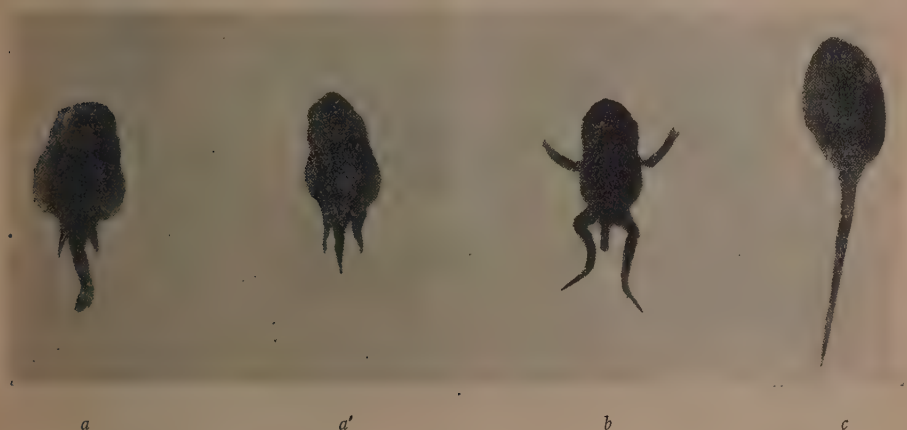


Fig. 1.

- a, a'* : larva di «*Bufo vulgaris*» alimentata con tuorlo d'uovo più bromo (6 gocce).
b : larva di «*Bufo vulgaris*» alimentata con embrioni di grano.
c : larva di «*Bufo vulgaris*» alimentata con tuorlo d'uovo.

Quanto abbiamo detto appare evidente dalla fig. 1, nella quale accanto al controllo a solo tuorlo d'uovo (*c*), e a due esemplari di larve alimentate con uovo e bromo (*a, a'*) che hanno iniziato, ma non completato (per esser morte prima) la metamorfosi, si può vedere (*b*) un girino della stessa età, ma alimentato con embrioni di grano, nel quale la metamorfosi è proceduta normalmente. Ancor meglio inoltre può rilevarsi dalla fig. 2 che rappresenta ingrandito uno degli esemplari a uovo più bromo: sono nettamente visibili gli arti posteriori corti e tozzi, gli anteriori appena comparsi, la coda senza accenno a riassorbimento, le dita non ancora sviluppate, nè ben separate tra loro.

L'esame anatomico degli organi interni ha fatto apprezzare che fegato ed intestino — come risulta dalle figg. 2 e 3 — sono già vicinissimi al tipo dell'animale adulto ⁽¹⁾, mentre invece permane quasi integro l'apparato branchiale.

(1) Consultare in proposito: G. COTRONEI, *L'apparato digerente degli anfibii nelle sue azioni morfogenetiche. (Ricerche sull'accrescimento larvale e post-larvale)*. «*Memorie della R. Accad. dei Lincei*», 1914, 10, 143-229.

Risultati con questi perfettamente concordanti abbiamo successivamente ottenuto, alimentando altre larve di «*Bufo vulgaris*» con tuorlo d'uovo impastato con 2 anzichè con 6 gocce della stessa acqua di bromo; la fig. 4 mostra due di tali esemplari (*a*, *a'*) insieme al loro controllo (*b*) a solo tuorlo d'uovo.



Fig. 4.

a a': larve di «*Bufo vulgaris*» alimentate con tuorlo d'uovo più bromo (2 gocce).
b: controllo alimentato con tuorlo d'uovo.

Risulta pertanto evidente, da queste nostre osservazioni, che non tutti gli organi ed apparati della larva alimentata con aggiunta di piccole quantità di bromo al tuorlo d'uovo, hanno raggiunto un parallelo grado di sviluppo al momento critico della metamorfosi: in altri termini *questa è stata disarmonica*. Non si tratta, è vero, della disarmonia gravissima, osservata da G. Cotronei nelle larve alimentate con tiroide — nelle quali la metamorfosi iniziava senza quasi alcun accrescimento corporeo e la morte interveniva ancor prima che arrivassero a presentare la comparsa del secondo arto anteriore, — ma di disarmonia comunque di entità notevole, e tale da non permettere la evoluzione della larva verso la nuova vita, determinandone la morte prima che fosse completa la differenziazione.

In conclusione ci riteniamo autorizzati da queste nostre ricerche ad ammettere, che piccolissime quantità di bromo, opportunamente somministrate a larve di «*Bufo vulgaris*», ne favoriscono — entro certi limiti ed in confronto con le larve di controllo — l'accrescimento corporeo, rendendone anche più precoce l'inizio della metamorfosi, che peraltro appare chiaramente disarmonica, sì da non permettere — almeno quando la disarmonia non venga in alcun modo corretta — la vita degli animali medesimi.

INDICE DEL VOLUME XXI, SERIE VI. — RENDICONTI

1935. Primo Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1934 ed andamento del ciclo solare ». 294.
ACQUA C. — « Sulla natura degli ultravirus ». 534, 593.
AKIMOFF N. W. — « Considerazioni sul rendimento propulsivo ». 569.
ALOCCO G. — Vedi ROSSI B.
AMATI A. — Vedi MEZZADROLI G.
ANDRISSI G. L. — « Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934 ». 160.
ANTONIANI C. — « Trasformazione enzimatica dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico per mezzo dei germogli del "Sorghum saccharatum" ». 192.
ARMELLINI G. — « Sopra un'equazione differenziale della Dinamica ». 111.

B

- BAGLIONI S. — « Le variazioni fisiologiche della curva glicemica e i fattori che le determinano ». 120, 219.
BARBIERI U. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di primo ordine di Tortona nel luglio 1933 ». 20.
BARONI A. — « Sugli ossidi di platino di Laffite ». 759.
BERGMANN L. — Vedi SCHAEFER C.
BERNSTEIN V. — « Alcune osservazioni sopra un teorema di Fobey ». 780.

- BEZZI S. — « Influenza di anelli esatomici sulla viscosità delle soluzioni di polimeri a molecole "filiformi" ». 372.
BIOCCA E. — « Su un fenomeno di gelificazione presentato dai sangui ad emazie nucleate e da alcuni sangui umani patologici ». 666.
BLANC G. A. — « Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice ». 120.
ID. — « Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice idrata ». 296.
BOGGIO T. — « Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz ». 415.
BORGHELLO V. N. — Vedi SANDONNINI C.
BORTOLOTTI E. — « Trasporti di specie superiore ». 225.
BOZZA G. — « La decantazione delle sospensioni cristalline: I. Teoria generale ». 697.
ID. — « La decantazione delle sospensioni cristalline: II. Funzioni caratteristiche ». 752.
ID. — « La decantazione delle sospensioni cristalline: III. Decantatori continui cilindrici ». 755, 809.
BUZANO P. — « Sistemi di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative ». 6.

C

- CAMBI E. — Vedi CORBINO O. M.
CAROBBI G. — « "Mercallite", nuovo minerale fra i prodotti dell'attività fumarolica vesuviana del 1933 ». 385.

CASSINA U. — «Sulla costruzione del piano osculatore ad una quartica di prima specie». 681.

CESARIS DEMEL A. — «L'atonia dell'apparato contrattile della milza nella patogenesi di alcune forme di splenomegalia». 120.

CHIANCONE F. M. — «Influenza della natura del materiale di cui son fatte le gabbie per gli animali, negli studi del ricambio». 287.

Id. — Vedi MUSAJO L.

CIANI E. — «Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche». Nota I, 551. Nota II, 568, 631.

CIMINO M. — «Sullo studio di un moto einsteiniano mediante i principi di equivalenza del Levi-Civita». 347.

COLOMBO B. — «Ancora sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine». 475.

COMUCCI P. — «Scisti di Dasso nel Balistan». 287.

CONFORTO F. — «Sul calcolo di un particolare funzionale per le funzioni, che lo rendono stazionario». 785.

CORBELLINI A. — Vedi RONDONI P.

CORBINO O. M. e CAMBI E. — «Sugli effetti acustici derivanti da imperfezioni di centratura dei dischi fonografici». 116.

D

DELPINO I. — «La "Trutta genivittata" (Heckel-Kner, 1858) nell'Adige». 54.

Id. — «Notizie sulla diffusione della "Trutta genivittata"». 532.

DE MIRA FERNANDES A. — «Derivazione tensoriale composta negli spazi non puntuali». 555.

DEVOTO G. — «La struttura dell'antipirina in soluzione acquosa». 819.

DUBREIL-JACOTIN M. L. — «Complément à une Note antérieure sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes». 344.

DULZETTO F. — «Il glutazione nella estivazione della "Helix aperta Born."». 195.

Id. — «Nuove osservazioni sulla vita e sul rapporto sessuale dei nati di "Gambusia holbrooki Grad."». 524.

E

EINAUDI R. — «Sugli esponenti caratteristici di una configurazione di equilibrio di un sistema dissipativo». 336.

ELISEI FL. G. — «Nuovo studio dell'apparato cribro-legnoso in plantule di "Raphanus sativus"». 99.

ERMOLAEF L. — «Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui aux points homologues ont une paire de droites conjuguées communes». 801.

F

FABBRI M. R. — «Sui differenziali d'ordine superiore». 543.

FAMIANI V. — «Sullo sviluppo del "sarcoma di Jensen" in alcune particolari condizioni di alimentazione». 721.

Id. — «Intorno all'azione del bromo sull'accrescimento e sulla metamorfosi delle larve di "bufo vulgaris"». 821.

FENICI A. — «Centri di gravitazione e corpi centrobarici». 493.

FINIKOFF S. — «Couple de surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent». 85.

FOÀ A. — «Limitazione delle somme (C, 1) di una serie di polinomi di Legendre di una funzione lipschitziana di ordine $\alpha > 1/2$ ». 239.

FRACASTORO M. G. — «Stime della grandezza visuale della "Nova Herculis 1934"». 269.

FRANZINI T. — «La diffusibilità del deuterio nei metalli». 521, 577.

G

GHERARDELLI G. — «Sulle serie lineari semplicemente infinite con lo stesso gruppo jacobiano». 261.

GHIRON D. — Vedi LEVI G. R.

GIACOMELLO G. — «Sulla costituzione del monocloruro di zolfo e sui derivati dell'ipotenico acido (S.OH)₂». 36.

GIALANELLA L. — «Orbita ellittica del Pianeta Maria Pia (1933 S. A.)». 157.

Id. — «Ascensioni rette di Saturno nel 1934». 92.

- GIGANTE G. — « Sull'azione dell'insulina nei colombi digiunanti ». 725, 763.
- GIORGI G. — « Sulle grandezze meccaniche fondamentali ». 293, 611.
- ID. — « Una questione sulla forza sollecitante un polo magnetico in un campo ». 732.
- GOMES R. L. — « L'opérateur S — opérateur de Schrödinger ». 179.
- ID. — « Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la "Nouvelle Conception de la Lumière" du prof. Louis de Broglie ». 284, 358 Nota II. 443.
- ID. — « Sur la déduction des formules de Lorentz ». 433.
- ID. — « Sur une propriété de l'opérateur H de M. de Broglie ». 499.
- GOIDANICH G. — « Una nuova specie di "Ceratosomella" ("Ceratosomella cationiana" G. Goid. n. sp.) vivente sul pero ». 199.
- GOLAB ST. — « Sur une condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de Finsler soit un espace riemannien ». 133.
- GRAFFI D. — « Sopra l'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria ». 438.

L

- LABOCCETTA L. — « Definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare ». 661.
- ID. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue: IV. Funzioni periodicamente variabili ». 745.
- LAMPARIELLO G. — « Sulla natura analitica delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici ». 637.
- LEVI G. R. e PEYRONEL G. — « Clorito di piombo: sali doppi e basici ». 381.
- ID. e GHIRON D. — « Azione dell'acido arsenico e arsenicali sull'acqua ossigenata ». 454.

M

- MACCAGNO A. M. — « Risultati della separazione dei due primi blastomeri dell'uovo di Lampreda ("Lampetra [Petrionomyzon] fluviatilis L.") ». 202.

- MANARINI M. — « Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario ». 173, 277.
- MANGINI A. — « Ricerche nella serie dell'I-cloro-3-4-dinitrobenzolo: III ». 759.
- MANIÀ B. — « Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche ». Nota I, 137. Nota II, 148, 243.
- ID. — « Sopra alcuni problemi condizionati del calcolo delle variazioni ». 426.
- MANZONI ANSIDEI R. — « Sullo spettro Raman dei nitrotoluoli isomeri ». 581.
- MARCHETTI M. — « Sulla presenza del Cretaceo medio in Cirenaica ». 25.
- ID. — « Sulla presenza di nuovi affioramenti oligocenici a sud del Gebel Cirenaico ». 187.
- MARLETTA G. — « Riflessioni di Geometria proiettiva differenziale ». 485.
- MAROTTA L. — « Risultati di alcune culture "in vitro" di cellule vegetali isolate ». 211.
- MATTIOLI G. D. — « Dissipazione vorticosa nei regimi turbolenti ». 87.
- ID. — « Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza ». 751.
- MAXIA A. — « Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3 ». 248.
- MAZZA L. — « La suscettività magnetica degli ossidi misti di Neodimio e Praseodimio e Neodimio e Samario ». 763.
- ID. — « La suscettività magnetica degli ossidi misti delle terre rare: Miscela di Neodimio e Praseodimio e di Neodimio e Samario ». 813.
- MERCOGLIANO D. — « Sul numero delle equazioni quadratiche sufficienti a rappresentare una curva razionale normale C_r ». 82.
- MESSERI A. — « Del potere organizzatore del legno e del cribro primari ». 600.
- MEZZADROLI G. e AMATI A. — « Azione di alcuni alcaloidi sulla saccarasi prodotta dall' "Aspergillus Niger" ». 46.
- ID. e SGARZI L. — « Azione di alcuni alcaloidi sul "Bac. Radicicola" in coltura pura ». 105.

- MINETTI S. — «Sulla struttura topologica dello spazio funzionale (A) costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass». 645.
- MIRANDA C. — «Teoremi di esistenza e di unicità delle superficie di assegnato bordo verificanti un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine e applicazione al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica». 253.
- MORPURGO B. — «Produzione sperimentale di un mioblastoma della lingua di un ratto albino». 740.
- MOTZKIN TH. — «Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes». 562.
- ID. — «Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes». 751, 773.
- MUSAJO L. — «L'acido xanturenico». Nota I. 368.
- ID. — «Ricerche sull'acido xanturenico». Nota II. 384, 461.
- ID. — «Genesi dell'acido xanturenico». Nota III. 384.
- ID. e CHIANCONE F. M. — «Ricerche sull'acido xanturenico. Genesi dell'acido xanturenico». Nota III. 468.
- PETRI L. — «*Deuterophoma tracheiphila*» e malattie da *virus* degli agrumi». 301.
- PEYRONEL G. — Vedi LEVI G. R.
- PIAZZOLLA-BELOCH M. — «Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria». 77.
- ID. — «Sugli asintoti d'una curva algebrica piana in relazione alla teoria dei diametri». 335, 471.
- PICCARDI G. — «Sulle atmosfere dei pianeti». 576.
- ID. — «Sullo spettro dell'ossido di neodimio allo stato di vapore». 584.
- ID. — «Sullo spettro dell'ossido di samario allo stato di vapore». 589.
- PICONE M. — «Sulla trasformata di Laplace». 306.
- PIRRONE F. — «Studio sui composti aliciclici. I. Sintesi di β -chetoammine». 521.
- PIROTTI M. — «Relazione del primo piano di segmentazione con il piano di simmetria dell'embrione di Lampreda (*"Lampetra [Petromyzon] fluviatilis L."*)». 205.
- POCHETTINO V. — «Movimenti igroscopici delle brattee di *"Carlina acaulis"*». 50.
- POMPILI G. — «Sulle superficie algebriche a sezioni piane iperelittiche di genere $p \geq 2$ ». 790.
- PUCCANTI L. — «Chiarimenti sulle inducibilità elettrica e magnetica in rapporto alla nuova metrologia elettrica». 732.

N

- NOBILE V. — «Sulla possibilità di nuovi indirizzi della teoria della refrazione astronomica e di occasionali contributi alla fisica dell'atmosfera». Nota I. 615. Nota II. 675.

O

- ODONE F. — «Fondamenti termodinamici della teoria dell'equilibrio elettrico e delle correnti permanenti nei conduttori metallici». 515.

P

- PASSERINI L. e ROLLIER M. A. — «Sulla costituzione dell'acido tellurico». 364.
- PASTORI M. — «Tensori vincolati a un sistema di geodetiche». 801.

R

- REY PASTOR J. — «Sulla convergenza quasi continua di successioni di funzioni». 335, 481.
- RIGHINI G. — «Ricerche preliminari sullo spettro della *"Nova Herculis"*». 272.
- ROLLIER M. A. — Vedi PASSERINI L.
- RONDONI P. e CORBELLINI A. — «L'azione cancerogena del 1, 2-benzopirene sintetico». 128.
- ROSSI B. e ALOCCO G. — «Influenza del filtraggio sulle proprietà della radiazione produttrice degli sciami». 167.
- ROTH L. — «Sulla regolarità delle superficie algebriche». 547.
- ID. — «Gli invarianti d'una varietà algebrica di S_4 ». 314.

ROVERETO G. — «La serie di Montenotte come elemento costituente delle Alpi Occidentali e dell' Appennino». 539.

S

SALVADORI M. — «Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica». 142.

SANDONNINI C. e BORGHELLO V. N. — «Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici». 30.

SAVIANO M. — «Ricerche sul ricambio dell'acqua. IX. Variazione della diuresi e pH urinario in animali a dieta acidogena e alcalogena». 715.

SBRANA F. — «Parallelismo monodromo sopra una superficie». 679.

SEGRE B. — «Proprietà in grande delle linee piane convesse. Sulle ovali inscritte o circoscritte ad un poligono convesso». Nota III. 11.

ID. — «I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste». Nota I. 656, Nota II. 660, 692.

SERIANNI E. — «L'azione dell'insulina sull'alcoolemia provocata nell'uomo normale». 394.

SEVERI F. — «Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie». 3.

SCHAEFER C. e BERGMANN L. — «Un nuovo metodo ottico per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli». 580, 701.

SCORZA G. — «A proposito di un recente lavoro di A. A. Albert». 727.

SCORZA DRAGONI G. — «Un teorema sulle funzioni di Baire». 741.

SIGNORINI R. — «Linee tettoniche trasversali nell' Appennino settentrionale». 42.

SOBRERO L. — «Del significato meccanico della funzione di Airy». 264.

ID. — «Un teorema relativo ai sistemi differenziali». 317.

ID. — «Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella Fisica-matematica». 448.

SPAMPINATO N. — «Sulle algebre potenziali reali o complesse». 65.

ID. — «Intorno ad una proprietà delle equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti». 73.

ID. — «Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili». Nota I. 626, Nota II. 568, 688.

ID. — «Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo». Nota I. 568, 621, Nota II. 568, 683.

T

TERRACINI A. — «Sul criterio di Plücker-Clebsch». 651.

TOGNETTI M. — «Sulle matrici permutabili». 149.

TOLOTTI C. — «Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale». 326.

ID. — «Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro». 488.

ID. — «Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro». 572.

TONELLI L. — «Sulle estremaloidi del Calcolo delle variazioni». 289.

TOSCANO L. — «Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare». 801.

TRICOMI F. — «Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. I. Inversione della trasformazione». 232.

ID. — «Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. II. Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre». 260, 332.

ID. — «Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace». 420.

V

VALIRON G. — «Remarques sur un critère de normalité de M. Minetti». 145.

VINASSA DE REGNY P. — «Commemorazione del Socio Corrispondente Alessandro Martelli». 402.

VOLTERRA E. — « Questioni di elasticità vincolata. III. Espressioni della θ e della ψ nel caso generale. Le equazioni dell'elasticità vincolata pei solidi la cui fibra baricentrica è piana », 14.

W

WATAGHIN G. — « Sulla teoria dei protoni e neutroni », 703.

WICK G. C. — « Teoria dei raggi β e momento magnetico del protone », 170.

ID. — « Sullo spettro di oscillazione e rotazione della molecola HD », 708.

Z

ZABBAN-B. — « Come aumenta il numero dei cromosomi nei nuclei inferiori del sacco embrionale di "Myricaria germanica Desv." », 208.

ZAGAR F. — « Sul calcolo d'orbita dei sistemi doppi del tipo 61 Cygni », 353.

ID. — « Sull'orbita di un terzo corpo invisibile in un sistema binario », 508.

ZANABONI O. — « La determinazione dei carichi critici per mezzo del principio dei lavori virtuali », 501.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — « Altezza della cromosfera nel 1934 ed andamento del ciclo solare ». ABETTI G. 294.
- « Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934 ». ANDRISSI G. L. 160.
 - « Stime della grandezza visuale della "Nova Hercules 1934" ». FRACASTORO M. G. 269.
 - « Ascensioni rette di Saturno nel 1934 ». GIALANELLA L. 92.
 - « Orbita ellittica del Pianeta Maria Pia (1933 S. A.) ». ID. 157.
 - « Sulla possibilità di nuovi indirizzi della teoria della refrazione astronomica e di occasionali contributi alla fisica dell'atmosfera ». Nota I e II. NOBILE V. 615, 675.
 - « Ricerche preliminari sullo spettro della "Nova Hercules" ». RIGHINI G. 272.
 - « Sul calcolo d'orbita dei sistemi doppi del tipo 61 Cygni ». ZAGAR F. 353.
 - « Sull'orbita di un terzo corpo invisibile in un sistema binario ». ID. 508.

B

- Biologia.** — « Sulla natura degli ultraviventi ». ACQUA C. 534, 593.
- « La "Trutta genivittata" (Heckel-Kner, 1858) nell'Adige ». DELPINO I. 54.
 - « Notizie sulla diffusione della "Trutta genivittata" ». ID. 532.
 - « Il glutinone nella estivazione della "Helix aperta Born." ». DULZETTO F. 195.
 - « Nuove osservazioni sulla vita e sul rapporto sessuale dei nati di "Gambusia holbrooki Grad." ». ID. 524.

- Biologia.** — « Sullo sviluppo del "sarcoma di Jensen" in alcune particolari condizioni di alimentazione ». FAMIANI V. 721.
- « Una nuova specie di "Ceratostomella" ("Ceratostomella catoniana" G. Goid. n. sp.) vivente sul pero ». GOIDANICH G. 199.
 - « Risultati della separazione dei due primi blastomeri dell'uovo di Lampreda ("Lampetra [Petromyzon] fluviatilis L.") ». MACCAGNO A. M. 202.
 - « Azione di alcuni alcaloidi sulla saccarasi prodotta dall'"Aspergillus Niger" ». MEZZADROLI G. e AMATI A. 46.
 - « Azione di alcuni alcaloidi sul "Bac. Radicicola" in coltura pura ». ID. e SGARZI L. 105.
 - « "Deuterophoma tracheiphila" e malattie da virus degli agrumi ». PETRI L. 301.
 - « Relazione del primo piano di segmentazione con il piano di simmetria dell'embrione di Lampreda ("Lampetra [Petromyzon] fluviatilis L.") ». PIROTTI M. 205.

- Biologia vegetale.** — « Risultati di alcune culture *in vitro* di cellule vegetali isolate ». MAROTTA L. 211.
- « Come aumenta il numero dei cromosomi nei nuclei inferiori del sacco embrionale di "Myricaria germanica Desv." ». ZABBAN B. 208.

- Botanica.** — « Nuovo studio dell'apparato cribro-legnoso in plantule di "Raphanus sativus" ». ELISEI FL. G. 99.
- « Del potere organizzatore del legno e del cribro primari ». MESSERI A. 600.
 - « Movimenti igroscopici delle brattee di "Carlina acaulis" ». POCHETTINO V. 50.

C

- Chimica.** — «Sugli ossidi di platino di Laffitte». BARONI A. 759.
- «Influenza di anelli esatomici sulla viscosità delle soluzioni di polimeri a molecole filiformi». BEZZI S. 372.
- «Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice». BLANC G. A. 120.
- «La struttura dell'antipirina in soluzione acquosa». DEVOTO G. 819.
- «Sulla costituzione del monocloruro di zolfo e sui derivati dell'ipotetico acido (S-OH)₂». GIACOMELLO G. 36.
- «Clorito di piombo: sali doppi e basici». LEVI G. R. e PEYRONEL G. 381.
- «Azione dell'acido arsenico e arseniati sull'acqua ossigenata». LEVI G. R. e GHIRON D. 454.
- «Ricerche nella serie dell'1-cloro-3-4-dinitrobenzolo: III. Mangini A.». 759.
- «Sullo spettro Raman dei nitrotoluoli isomeri». MANZONI ANSIDEI R. 581.
- «La suscettività magnetica degli ossidi misti di Neodimio e Praseodimio e Neodimio e Samario». MAZZA L. 763.
- «La suscettività magnetica degli ossidi misti delle terre rare: Miscele di Neodimio e Praseodimio e di Neodimio e Samario». MAZZA L. 813.
- «L'acido xanturenico». I. MUSAJO L. 368.
- «Ricerche sull'acido xanturenico». II. Id. 384, 461.
- «Genesi dell'acido xanturenico». III. Id. 384.
- «Ricerche sull'acido xanturenico. Genesi dell'acido xanturenico». III. Id. e CHIANCONE F. M. 468.
- «Sulla costituzione dell'acido tellurico». PASSERINI L. e ROLLIER M. A. 364.
- «Sulle atmosfere dei pianeti». PICCARDI G. 576.
- «Sullo spettro dell'ossido di Neodimio allo stato di vapore». Id. 584.
- «Sullo spettro dell'ossido di Samario allo stato di vapore». Id. 589.
- «Studio sui composti aliciclici. I. Sintesi di β -chetoammine». PIRRONE F. 521.
- «Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici». SANDONNINI C. e BORGHELLO V. N. 30.

Chimica. — «Ricerche sul ricambio dell'acqua. IX. Variazione della diuresi e pH urinario in animali a dieta acidogena e alcalogena». SAVIANO M. 715.

Chimica biologica. — «Trasformazione enzimatica dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico per mezzo dei germogli del "Sorghum saccharatum"». ANTONIANI C. 192.

Chimica-Fisica. — «Studio di un ultrafiltro colloidale a base di silice idrata». BLANC G. A. 296.

Commemorazioni. — «Commemorazione del Socio-Corrispondente Alessandro Martelli». VINASSA DE REGNY P. 402.

F

Fisica. — «La decantazione delle sospensioni cristalline: I. Teoria generale». BOZZA G. 697.

— «La decantazione delle sospensioni cristalline: II. Funzioni caratteristiche». Id. 752

— «La decantazione delle sospensioni cristalline: III. Decantatori continui cilindrici». BOZZA G. 755, 809.

— «Sugli effetti acustici derivanti da imperfezioni di centratura dei dischi fonografici». CORBINO O. M. e CAMBI E. 116.

— «La diffusibilità del deuterio nei metalli». FRANZINI T. 521, 577.

— «L'opérateur S — opérateur de Schrödinger». GOMES R. L. 179.

— «Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la "Nouvelle Conception de la Lumière" du prof. Louis de Broglie». Id. 284, 358 Nota I; 443 Nota II.

— «Definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare». LABOCETTA L. 661.

— «Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario». MANARINI M. 173, 277.

— «Fondamenti termodinamici della teoria dell'equilibrio elettrico e delle correnti

permanenti nei conduttori metallici». (D'ONE F. 515.

Fisica. — «Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova metrologia elettrica». PUCCIANTI L. 732.

— «Influenza del filtraggio sulle proprietà della radiazione produttrice degli sciami». ROSSI B. e ALOCCO G. 167.

— «Un nuovo metodo ottico per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli». SCHAEFFER C. e BERGMANN L. 580, 701.

— «Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella Fisica-matematica». SOBRERO L. 448.

— «Sulla teoria dei protoni e neutroni». WATAGHIN G. 703.

— «Teoria dei raggi β e momento magnetico del protone». WICK G. C. 170.

— «Sullo spettro di oscillazione e rotazione della molecola HD». Id. 708.

Fisiologia. — «Le variazioni fisiologiche della curva glicemica e i fattori che le determinano». BAGLIONI S. 120, 219.

— «Su un fenomeno di gelificazione presentato dai sangui ad emazie nucleate e da alcuni sangui umani patologici». BIOCCA E. 666.

— «Influenza della natura del materiale di cui son fatte le gabbie per gli animali, negli studi del ricambio». CHIANCONE F. M. 287.

— «Intorno all'azione del bromo sull'accrescimento e sulle metamorfosi delle larve di "Bufo vulgaris"». FAMIANI V. 821.

— «Sull'azione dell'insulina nei colombi digiunanti». GIGANTE G. 725, 763.

— «L'azione dell'insulina sull'alcoolemia provocata nell'uomo normale». SERIANNI E. 394.

G

Geodesia. — «Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di primo ordine di Tortona nel luglio 1933». BARBIERI U. 20.

Geologia. — «Sulla presenza del Cretaceo medio in Cirenaica». MARCHETTI M. 25.

— «Sulla presenza di nuovi affioramenti oligocenici a sud del Gebel Cirenaico». Id. 187.

— «La serie di Montenotte come elemento costituente delle Alpi Occidentali e dell'Appennino». ROVERETO G. 539.

— «Linee tettoniche trasversali nell'Appennino Settentrionale». SIGNORINI R. 42.

Geometria. — «Riflessioni di Geometria proiettiva differenziale». MARLETTA G. 485.

— «Sul numero delle equazioni quadratiche sufficienti a rappresentare una curva razionale normale C_r ». MERCOGLIANO D. 82.

— «I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste». SEGRE B. Nota I, 656. Nota II, 660, 692.

— «Sul criterio di Plücker-Clebsch». TERRACINI A. 651.

M

Matematica. — «Alcune osservazioni sopra un teorema di Fabry». BERNSTEIN V. 780.

— «Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz». BOGGIO T. 415.

— «Trasporti di specie superiore». BORTOLOTTI E. 225.

— «Sistemi di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative». BUZANO P. 6.

— «Sulla costruzione del piano osculatore ad una quartica di prima specie». CASSINA U. 681.

— «Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche». CIANI E. Nota I, 551. Nota II, 568, 631.

— «Ancora sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine». COLOMBO B. 475.

— «Sul calcolo di un particolare funzionale

per le funzioni, che lo rendono stazionario». CONFORTO F. 785.

Matematica. — « Derivazione tensoriale composta negli spazi non puntuali ».
DE MIRA FERNANDES A. 555.

— « Sugli esponenti caratteristici di una configurazione di equilibrio di un sistema dissipativo ». EINAUDI R. 336.

— « Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui aux points homologues ont une paire de droites conjuguées communes ». ERMO-LAEF L. 801.

— « Sui differenziali d'ordine superiore ». FABBRI M. R. 543.

— « Couple de surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent ». FINIKOFF S. 85.

— « Limitazione delle somme $(C, 1)$ di una serie di polinomi di Legendre di una funzione lipschitziana di ordine $\alpha > 1/2$ ». FOÀ A. 239.

— « Sulle serie lineari semplicemente infinite con lo stesso gruppo jacobiano ». GHERARDELLI G. 261.

— « Sur une condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de Finsler soit un espace riemannien ». GOLAB ST. 133.

— « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue: IV. Funzioni periodicamente variabili ». LABOCETTA L. 745.

— « Sulla natura analitica delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici ». LAMPARIELLO G. 637.

— « Sopra il problema di Dirichlet per i campo compreso fra due sfere concentriche ». MANIÀ B. Nota I, 137. Nota II, 148, 243.

— « Sopra alcuni problemi condizionati del calcolo delle variazioni ». Id. 426.

— « Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3 ». MAXIA A. 248.

— « Sulla struttura topologica dello spazio funzionale (A) costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass ». MINETTI S. 645.

— « Teoremi di esistenza e di unicità delle superficie di assegnato bordo verificanti un'equazione alle derivate parziali del

secondo ordine e applicazione al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica ». MIRANDA C. 253.

Matematica. — « Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes ». MOTZKIN TH. 562.

— « Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes ». Id. 751, 773.

— « Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria ». PIAZZOLLA-BELOCH M. 77.

— « Sugli asintoti d'una curva algebrica piana in relazione alla teoria dei diametri ». Id. 335, 471.

— « Sulla trasformata di Laplace ». PRICONE M. 306.

— « Sulle superficie algebriche a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$ ». POMPILI G. 790.

— « Sulla convergenza quasi continua di successioni di funzioni ». REY PASTOR J. 335, 481.

— « Gli invarianti d'una varietà algebrica di S_4 ». ROTH L. 314.

— « Sulla regolarità delle superficie algebriche ». Id. 547.

— « Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica ». SALVADORI M. 142.

— « Parallelismo monodromo sopra una superficie ». SBRANA F. 679.

— « Proprietà in grande delle linee piane convesse. Sulle ovali inscritte o circoscritte ad un poligono convesso ». Nota III. SEGRE. B. 11.

— « Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie ». SEVERI F. 3.

— « A proposito di un recente lavoro di A. A. Albert ». SCORZA G. 727.

— « Un teorema sulle funzioni di Baire ». SCORZA DRAGONI G. 741.

— « Un teorema relativo ai sistemi differenziali ». SOBRERO L. 317.

— « Sulle algebre potenziali reali o complesse ». SPAMPINATO N. 65.

— « Intorno ad una proprietà delle equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti ». Id. 73.

Matematica. — «Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili». Nota I e II. ID. 568, 626, 568, 688.

— «Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo». Nota I e II. ID. 568, 621, 568, 683.

— «Sulle matrici permutabili». TOGNETTI M. 149.

— «Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale». TOLOTTI C. 326.

— «Sulle estremaloidi del Calcolo delle variazioni». TONELLI L. 289.

— «Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare». TOSCANO L. 801.

— «Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. I. Inversione della trasformazione». TRICOMI F. 232.

— «Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. II. Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre». ID. 260, 332.

— «Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace». ID. 420.

— «Remarques sur un critère de normalité de M. Minetti». VALIRON G. 145.

Meccanica. — «Considerazioni sul rendimento propulsivo». AKIMOFF N. W. 569.

— «Sopra un'equazione differenziale della Dinamica». ARMELLINI G. 111.

— «Sullo studio di un moto einsteiniano mediante i principi di equivalenza del Levi-Civita». CIMINO M. 347.

— «Complément à une Note antérieure sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes». DUBREIL-JACOTIN M. L. 344.

— «Centri di gravitazione e corpi centrobatici». FENICI A. 493.

— «Sulle grandezze meccaniche fondamentali». GIORGI G. 293, 611.

— «Una questione sulla forza sollecitante un polo magnetico in un campo». ID. 732.

— «Sur la déduction des formules de Lorentz». GOMES R. L. 433.

— «Sur une propriété de l'opérateur H de M. de Broglie». ID. 499.

Meccanica. — «Sopra l'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria». GRAFFI D. 438.

— «Dissipazione vorticoso nei regimi turbolenti». MATTIOLI G. D. 87.

— «Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza». ID. 751.

— «Tensori vincolati a un sistema di geodetiche». PASTORI M. 801.

— «Del significato meccanico della funzione di Airy». SOBRERO L. 264.

— «Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro». TOLOTTI C. 488.

— «Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro». ID. 572.

— «Questioni di elasticità vincolata. III. Espressioni della θ e della ψ nel caso generale. Le equazioni dell'elasticità vincolata pei solidi la cui fibra baricentrica è piana». VOLTERRA E. 14.

— «La determinazione dei carichi critici per mezzo del principio dei lavori virtuali». ZANABONI O. 501.

— «“Mercallite”, nuovo minerale fra i prodotti dell'attività fumarolica vesuviana del 1933». CAROBBI G. 385.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 61, 218, 412, 536, 673, 771.

P

Patologia. — «L'atonía dell'apparato contrattile della milza nella patogenesi di alcune forme di splenomegalia». CESARIS DEMEL A. 120.

— «Produzione sperimentale di un mioblastoma della lingua di un ratto albino». MORPURGO B. 740.

— «L'azione cancerogena del 1, 2-benzopirrene sintetico». RONDONI P. e CORBELLINI A. 128.

Personale accademico. — 59, 216, 411, 769.

Petrografia. — « Scisti di Dasso nel Bal-
tistàn ». COMUCCI P. 284.

Premi in corso di assegnazione
presso la R. Accademia Na-
zionale dei Lincei. — 606.

Presentazione di libri. — 59, 217, 411,
535, 671, 769, 770.

Presentazione di Note e Memorie.

— 59, 217, 411, 535, 671, 770.

Presentazione di plichi suggellati.

— 59.

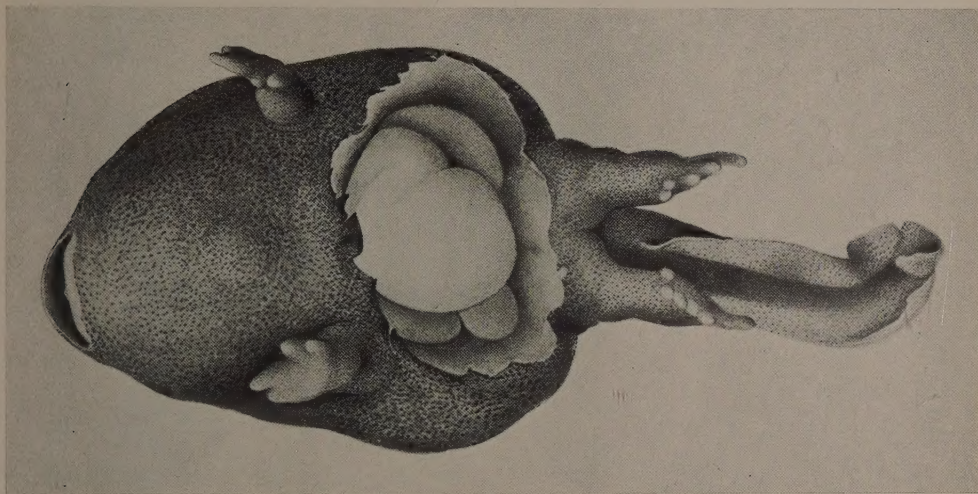


Fig. 2

Larva di *B. vulgaris* alimentata con tuorlo di uovo più bromo:
molto ingrandita e col fegato in evidenza.

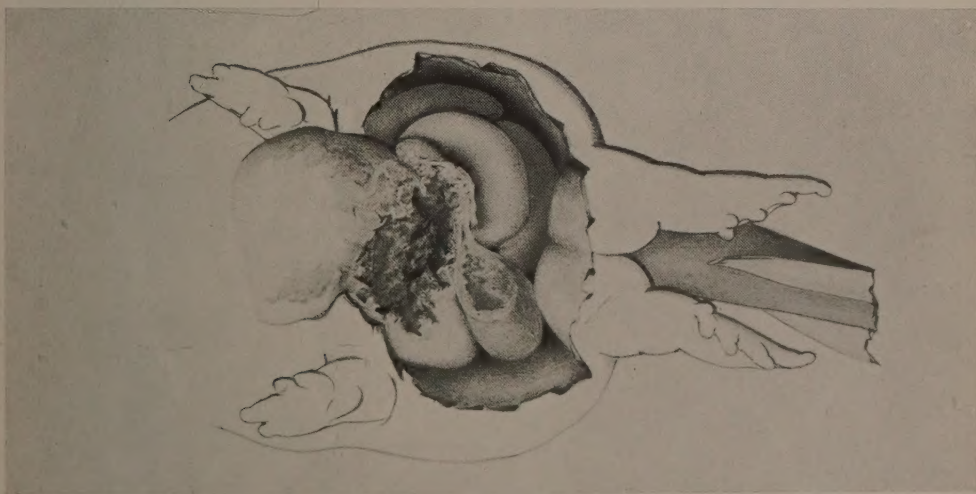


Fig. 3

Lo stesso esemplare della fig. 2 con in evidenza l'intestino.

